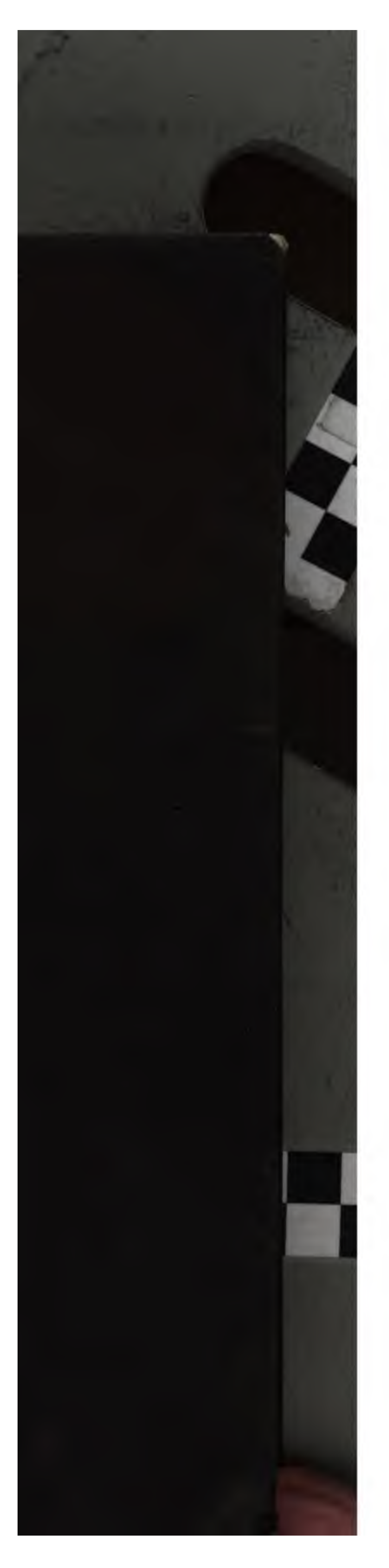
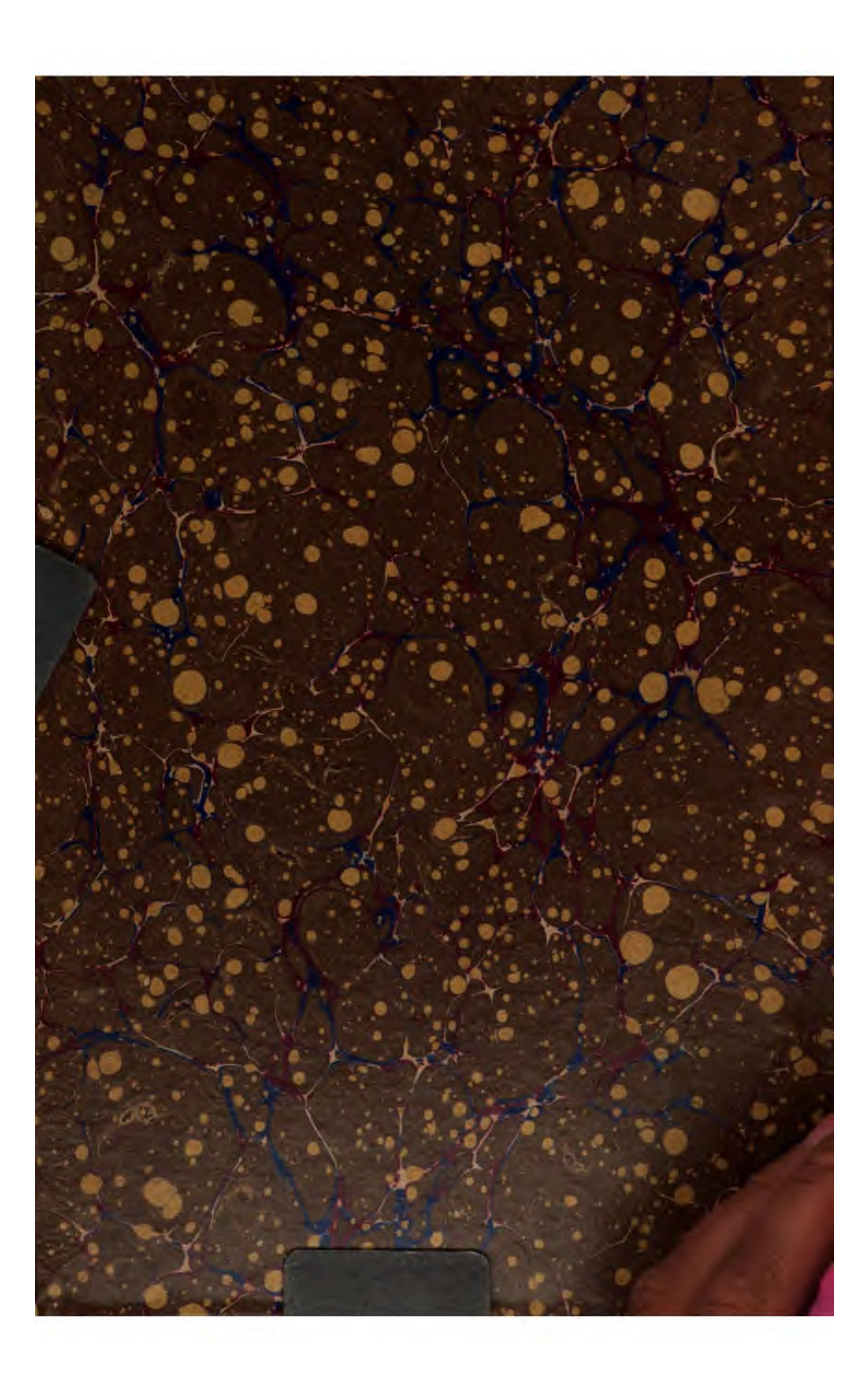
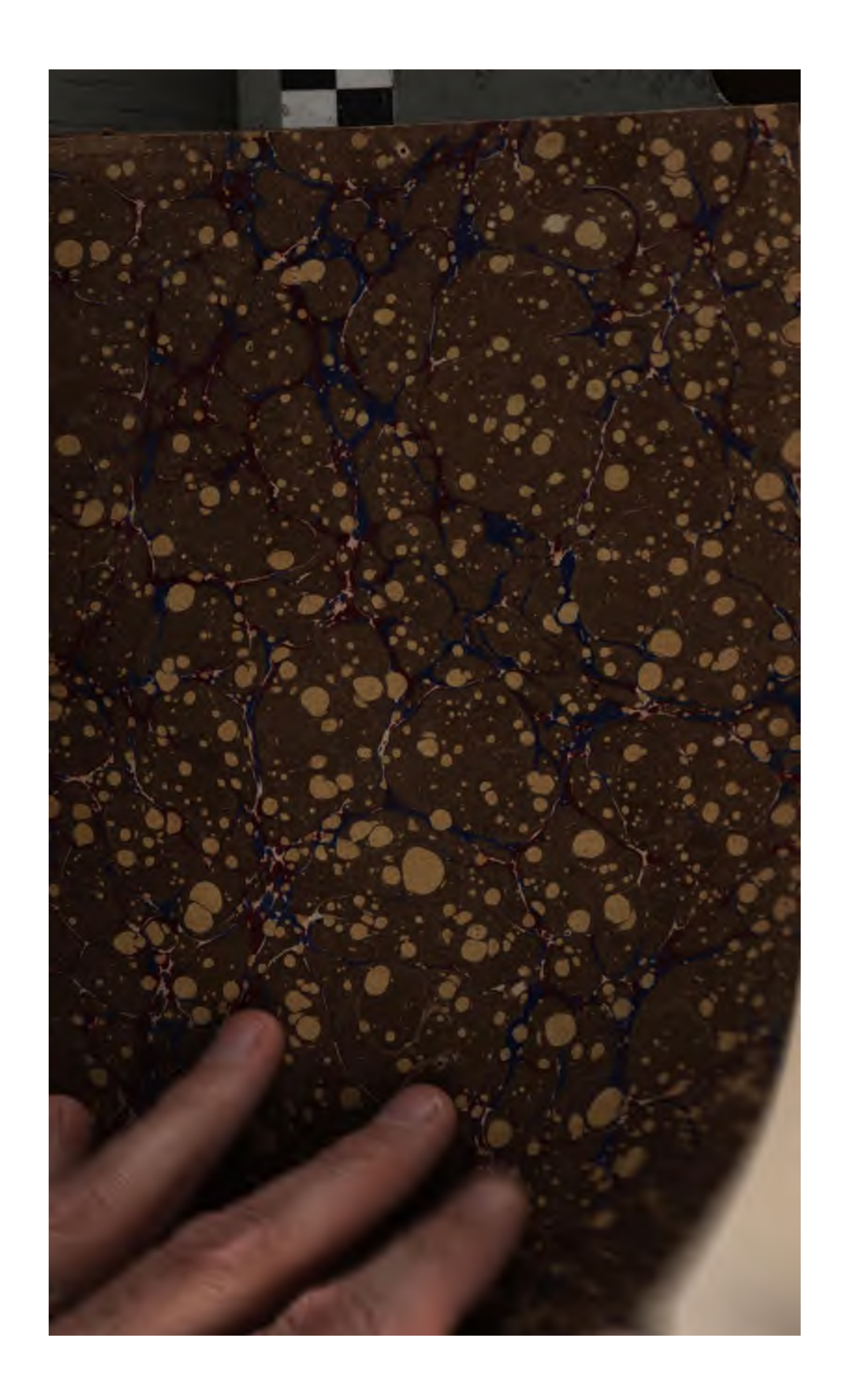
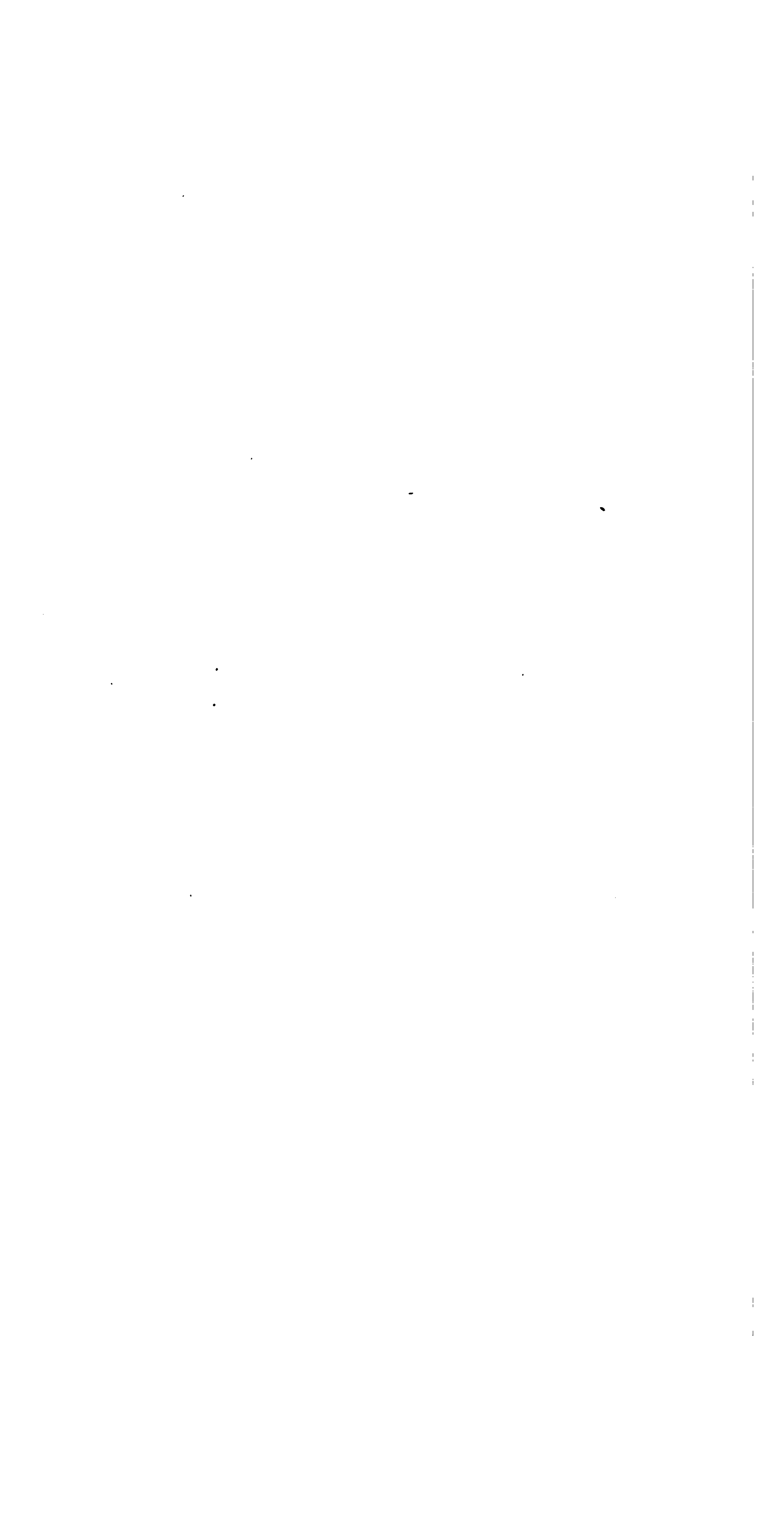










# ZEITSCHRIFT
# FÜR MATHEMATIK UND PHYSI

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–190

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

**R. MEHMKE** UND **C. RUNGE**
IN STUTTGART IN GÖTTINGEN

53. BAND. 1. HEFT.

MIT 28 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 13. März 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

**Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29**

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

**O. Biermann, N. Delaunay, R. Gans, R. Girtler, A. Grünwald, J. Horn, A. Leon, M. Lerch, H. Linsenmann, R. Mehmke, M. Radaković, C. Runge, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, S. Wellisch, K. Wieghardt, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, A. Wlassow, E. Wölffing.**

# ZEITSCHRIFT
# FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

**R. MEHMKE** IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

53. BAND.

MIT VIER TAFELN UND 110 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

# Inhalt.



## Kleinere Mitteilungen.



## Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik und Physik.

## Bücherschau.

# Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen.[1])

Von Konrad Nitz in Königsberg i. Pr.

**Inhaltsübersicht.**



## § 1. Geschichtliche Einleitung.

Die ersten Betrachtungen über die *Genauigkeit geometrischer Operationen* beim Feldmessen und beim Zeichnen dürften im 17. Jahrhundert angestellt worden sein.[2]) Bei R. Cotes[3]) finden wir schon eine ganze Reihe von Sätzen über die Fehler bei Dreiecksbestimmungen (mit besonderer Rücksicht auf die Astronomie). In einfacherer Form und mit mehr Anwendungen stellte Chr. v. Wolf dieselben Untersuchungen an[4]); bei ihm beanspruchen nicht nur die verschiedenen für die Praxis des Zeichnens bestimmten Vorschriften über die Zeicheninstrumente[5]) ein historisches Interesse, sondern auch besonders die

1) Diese Arbeit steht in Zusammenhang mit der auf Anregung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Prof. W. Franz Meyer, von mir verfaßten Dissertation über „Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal" (Königsberg 1905), indem sie neben andern Ergänzungen vor allem eine Reihe von Anwendungen der dort ausgeführten Theorie gibt; sie ist aber in der Hauptsache selbständig und nimmt nur an wenigen unwesentlichen Stellen auf jene Dissertation Bezug.

2) Kaestner, Gesch. d. Math.; verschiedene Stellen in Bd. 1 und 3.

3) Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici. 1709.

4) Elementa Matheseos, 1713; z. T. schon vorher in den Anfangsgr. d. Math. 1710.

5) Elementa Geometriae, Cap. II.

*Frage nach dem Verhältnis der Genauigkeiten bei geometrischer Konstruktion einerseits und Berechnung andrerseits.*[1]) Wolf scheint also der erste gewesen zu sein, der sich mit der Genauigkeit geometrischer Zeichnungen im engeren Sinne beschäftigt hat.

Nach einer zweiten Seite hin läßt sich der Gegenstand vorliegender Abhandlung ebenfalls bis in den Anfang des 18. Jahrhunderts zurückverfolgen: es war wieder Cotes, der am Schlusse der zitierten Aestim. err. etc. den Grund zu einer *Theorie der Fehler in der Ebene und im Raum* gelegt hat in dem später nach ihm benannten „Prinzip des Schwerpunkts" (die wahrscheinlichste Lage eines gesuchten Punktes im Raum ist der Schwerpunkt der beobachteten Punkte).[2])

Besonders bemerkenswert sind dann weiter die Arbeiten von Lambert[3]) sowohl über die Theorie der Fehler in der Ebene, als auch über die Fehler bei einer Zeichenoperation. Die Betrachtungen über *Fehler in der Lage eines Punktes* („Der Fehler besteht in dem Abstande des gefundenen Punktes von seinem wahren Orte, und dieser Abstand ist also dem Grade der Zuverlässigkeit umgekehrt proportional" (§ 395)) werden angeknüpft an geodätische Operationen, speziell an das Vorwärtseinschneiden mit zwei Strahlen. Als *Spielfläche* für den wahren Punkt erhält Lambert dann richtig ein *Parallelogramm*; die günstigste Punktlage für das Einschneiden sucht er nach dem Prinzip zu er-

1) Elementa Trigonometriae planae, §§ 58 ff.

2) Auf dieses Prinzip haben bekanntlich Schols (1875) und unabhängig von ihm Bertrand (1888) eine Ableitung des Gesetzes für Fehler im Raum gestützt.

3) *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, 1. Teil, Berlin 1765; Abschnitt I „Anmerkungen und Zusätze zur praktischen Geometrie". Die fehlertheoretischen Arbeiten Lamberts scheinen unverdienterweise gänzlich in Vergessenheit geraten zu sein; es möge deshalb an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß schon in seiner *Photometria* (1760) ein ganzer Abschnitt (§§ 271—306) über die Methoden zur Fehlerabschätzung handelt, und daß die zu § 296 gehörige Figur 31 die *erste* gut getroffene *Zeichnung einer Fehlerwahrscheinlichkeitskurve* gibt (das bei Simpson, 1755, als Fehlerkurve auftretende gleichschenklige Dreieck entspricht zu wenig dem wirklichen Sachverhalt). Auch ein *Halbkreis* erscheint als Fehlerkurve schon vor D. Bernoulli (1778) bei Lambert. Die „Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche" behandelt die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen nach einem Prinzip, das schon sehr an die Methode der kleinsten Quadrate erinnert, nämlich: „Die Summe der Abweichungen auf beiden Seiten soll einander gleich sein." Auf das von Lambert angewandte einfache Rechnungsverfahren ist man wiederholt zurückgekommen (s. z. B. Weinstein, Handb. d. physik. Maßbest. 1, S. 462). Ferner hat Lambert auch die *„Theorie der Fehler im Triangel"* zum ersten Male systematisch entwickelt und an einigen Beispielen ausführlich diskutiert (Kap. XI—XIV der Anmerk. u. Zusätze).

mitteln, daß der größte Fehler (die längere der beiden Diagonalen des Fehlerparallelogramms) relativ klein zu machen ist, was freilich zu keiner bestimmten Lösung führt.[1])

Lambert scheint auch der erste — und beinahe einzige — gewesen zu sein, der eine Versuchsreihe über die *Genauigkeit einer Zeichenoperation* angestellt hat, nämlich über den Fehler beim Abgreifen einer gegebenen Strecke mit dem Zirkel (§ 435 ff.); dieselbe ist so geschickt und sorgfältig ausgeführt, daß sie später (in § 5) genauer erörtert werden soll.

Unter besonderen geometrischen Gesichtspunkten handelt es sich um die Genauigkeit von Konstruktionen in der „*Geometria del compasso*" von Mascheroni.[2]) Der ursprüngliche Plan dieses Werkes war zwar ein rein theoretischer (wie ich mir entgegen der Darstellung von Klein[3]) zu bemerken erlaube), nämlich Rückkehr zu der elementaren Geometrie und Neubelebung ihrer Aufgaben durch „Spaltung des mathematischen Elements (Zirkel und Lineal) in seine beiden Bestandteile"; bei der Ausarbeitung aber trat eine praktische Absicht in den Vordergrund, nämlich die *Erzielung größerer Genauigkeit durch Verwendung des Zirkels allein;* das Lineal wird als ungeeignet für exakte Konstruktionen bezeichnet. Neben diesem Grundgedanken ziehen sich durch das ganze Buch Bemerkungen über die *Genauigkeit einzelner Konstruktionen;* so werden vor allem Schnitte von Kreisbögen unter spitzem Winkel zu vermeiden gesucht, und in einigen Fällen werden besondere Hilfskonstruktionen zur Erhöhung der Genauigkeit angegeben; es wird auch die Verwendung mehrerer Zirkel empfohlen, welche ihre Öffnung während derselben Konstruktion unverändert beibehalten. Nähere Ausführungen über die Art und Größe der zu erwartenden Fehler sind freilich nirgends zu finden.

Die aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen bekannten Werkchen von Servois (1804) und Brianchon (1818) bieten hinsichtlich der Genauigkeit der geometrischen Operationen nur wenig[4]),

1) Untersuchungen dieser Art sind meines Wissens erst wieder von Jordan in Angriff genommen worden (Über die Genauigkeit einfacher geodätischer Punktbestimmungen, diese Ztschr. 16, 1871).

2) Pavia, 1797; es existieren verschiedene Übersetzungen, z. B. von Carette, 2. édit., Paris 1828.

3) Ausgewählte Fragen der Elementarmathematik, S. 26.

4) Es sei aber bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen, daß besonders Brianchon bei vielen Konstruktionen schon darauf aufmerksam macht, daß sie allein mit *Lineal* und *Streckenübertrager* (Meßkette) ausführbar sind. Die *Parallelenkonstruktion* bei Brianchon (§ 20, Fig. 5) ist identisch mit der von Hilbert (Grundl. d. Geom., 2. Aufl., S. 74) angegebenen.

ebenso die Steinersche Abhandlung von 1833, aus welcher hier nur bemerkenswert ist, daß sie ein umfassendes Programm für eine Weiterentwicklung der elementaren Geometrie, auch mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Konstruktionen, aufstellt.[1])

Aus den nächsten Jahrzehnten ist hier nur zu erwähnen die Entwicklung der Theorie der Fehler in der Ebene durch Bravais (1846) Andrae (1858), Helmert (1868) u. a.[2])

Über die *Genauigkeit von Zeichnungen* aber kann ich erst aus dem Jahre 1871 eine Arbeit von Chr. Wiener anführen[3]), welche ebenfalls in § 5 besprochen werden soll. In etwas veränderter Darstellung findet man diese Abhandlung in Wieners *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* wiederholt.[4]) Diese Untersuchung hat wahrscheinlich die Veranlassung zu den Ausführungen des dort folgenden Abschnittes gegeben, überschrieben: Einige *Regeln über genaues Konstruieren*. Hier tritt wohl zum ersten Male der Gedanke an eine *rationelle Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen* in bestimmter Form auf (S. 190 „Die Aufgaben des genauesten Konstruierens müßten in der Weise der Aufgaben der höheren Geodäsie mittels der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden“). Wiener begnügt sich mit der Angabe von einigen „mehr oder weniger sicheren Sätzen, welche auf Erfahrung, Anschauung und Abschätzung gegründet sind“ (z. B. Satz 2: „Der Schnittpunkt zweier Geraden ist um so sicherer bestimmt, je näher diejenigen Punkte, welche jede Gerade bestimmen, bei dem Schnittpunkt liegen“).

Auf Grundlage dieser Sätze (im ganzen 5) werden dann für drei einfache Aufgaben die Regeln für das genaueste Konstruieren abgeleitet, nämlich: 1) Errichten einer Senkrechten, 2) Halbieren einer Strecke, 3) Fällen einer Senkrechten. Diese elementare Methode empfiehlt sich natürlich sehr durch ihre Einfachheit. Sie zeigt aber ihre Unvollkommenheit schon darin, daß die Bedingungen für die genaueste Konstruktion nicht immer richtig erhalten werden, und vor allem auch darin, daß sie keine Anhaltspunkte für die Größe der zu erwartenden Fehler liefert.

Es scheint, als ob derartige Betrachtungen keine weite Verbreitung gefunden haben. Ich kann hier nur das *Lehrbuch der zeichnenden Geo-*

---

1) Ges. Werke 1, S. 509; Ostw. Klass. Nr. 60, S. 64.

2) Darstellung dieser Theorie nebst Literaturübersicht bei Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, 3. Teil, Lpz. 1891 und Referat in Deutsche Math.-Ver. 7, 1897/98, S. 217—224. S. auch meine Dissertation S. 6/7.

3) Über die möglichst genaue mechanische Rektifikation eines verzeichneten Kurvenbogens usw., diese Ztschr. 16 (1871), S. 112—124.

4) Bd. 1 (1884), S. 184 ff.

*metrie* von G. Müller anführen[1]), welches sich, wahrscheinlich im Anschluß an Wiener, ausführlicher mit solchen Regeln über genauestes Konstruieren befaßt. U. a. wird darin auch folgender Grundsatz aufgestellt (§ 2, 7): „Aus je weniger Elementargeschäften sich die Lösung einer Aufgabe zusammensetzt, um so genauer wird (im allgemeinen) die Zeichnung“ usw.

Dies ist genau der Gedanke, den Lemoine in seiner *Geometrographie* (seit 1888) für die Beurteilung der Genauigkeit einer Konstruktionsmethode angewendet hat. Er stellt bekanntlich jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal durch ein Symbol von der Form: Op. $(l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3)$ dar und bezeichnet die Zahl $l_1 + m_1 + m_2$ als *Maß der Genauigkeit* (coefficient d'exactitude). Wie schon aus dieser Festsetzung hervorgeht und wie Lemoine auch ausdrücklich hervorhebt, wird dabei auf die Praxis des Zeichnens insofern gar keine Rücksicht genommen, als z. B. ein sehr spitzwinkliger Schnittpunkt gleichberechtigt mit einem rechtwinkligen erscheint. Ein geometrographisches Genauigkeitsmaß kann also immer nur eine ganz summarische, angenäherte Beurteilung der Genauigkeit gestatten und kann höchstens als ein vorläufiger Ansatz zu einem rationellen Genauigkeitsmaß bezeichnet werden.[2]) Aber selbst so ist die Berechtigung der von Lemoine gebrauchten Genauigkeitszahl noch einem erheblichen Einwand ausgesetzt, der vor einiger Zeit von Mehmke[3]) auch hinsichtlich der Einfachheitszahl geltend gemacht worden ist: muß nicht das Einsetzen der Zirkelspitze in den Schnittpunkt zweier Geraden mit $2 C_2$ bezeichnet werden, entsprechend der Zählung $2 R_1$ für das Anlegen des Lineals an zwei Punkte? Dadurch würde natürlich die Genauigkeitszahl in vielen Fällen bedeutend größer werden (indem $C_1 = 2 C_2$ gesetzt wird), und die Vergleichung verschiedener Lösungen derselben Aufgabe würde zu ganz anderen Resultaten führen. Die von mir nach der hier zu entwickelnden genaueren Fehlertheorie durchgerechneten Beispiele erlaubten noch keine bindenden Schlüsse in dieser Richtung, weil das Verhältnis zwischen der wirklichen und der durch die Genauigkeitszahl angegebenen Genauigkeit durch die Abänderung der Zählung ebenso oft verbessert, wie verschlechtert wurde (3 : 3).[4]) Zu Gunsten der

1) 6. Aufl., Stuttgart 1901; ich wurde auf dasselbe aufmerksam durch die Rezension in dieser Ztschr., 48 (1903), S. 323.

2) Vgl. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Vorlesungen, Sommer 1901. S. 360.

3) Bemerkungen zur Geometrographie von M. E. Lemoine. Deutsche Math.-Ver. 12 (1903), S. 113—116.

4) Da sich die verschiedenen Lösungen einer Aufgabe hinsichtlich ihrer wirklichen Genauigkeit nur selten in allgemeiner Weise vergleichen lassen, so

Änderung von Op. $C_1$ in Op. $2C_2$ möchte ich hier aber auf den auffallenden Dualismus hinweisen, der sich in den Formeln für die Genauigkeit von Op. $C_1$ und Op. $2R_1$ herausgestellt hat.[1])

Weiter ist hier, wenn auch nur kurz, eine Programmabhandlung von Witting[2]) zu erwähnen, welche, an die Problemstellung von Steiner anknüpfend, in ihrem ersten Teile eine Reihe interessanter Bemerkungen über die Ungenauigkeiten beim Zeichnen, über Konstruktionen zur Erhöhung der Genauigkeit usw. enthält; dieselben scheinen mir aber nicht immer einwandfrei zu sein.

In besonders nachdrücklicher Form findet sich der Gedanke an eine rationelle Fehlertheorie der zeichnenden Geometrie in den schon angeführten Vorlesungen von Klein über Differentialgeometrie ausgesprochen (S. 358ff.); es wird darin auf die mustergültige Ausbildung der Fehlerrechnung in der Geodäsie hingewiesen, der gegenüber die üblichen unbestimmten Anschauungen über die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen höchst mangelhaft erscheinen müssen, und es wird auch an dem Beispiele des Pascalschen Satzes gezeigt, wie eine solche Fehleruntersuchung etwa anzufangen wäre.

Vom Standpunkt der Ausgleichungsrechnung aus hat F. Geuer[3]) einen Beitrag zu diesem Problem geliefert. Er behandelt die *konstruktive Ausgleichung* einer durch mehr als zwei Punkte bestimmten Geraden und eines durch mehr als zwei Geraden bestimmten Punktes; dabei muß also vorausgesetzt werden, daß man bei einer Zeichnung zur Erhöhung der Genauigkeit und zur Beurteilung der Größe der Fehler mehrfache *Überbestimmungen* vorgenommen hat. Es kann zugegeben werden, daß dies bisweilen angebracht ist, vielleicht auch noch, daß man in ganz seltenen Fällen eine exakte konstruktive Ausgleichung wirklich vornehmen wird (meistens wird man sich ja auf das zeichnerische Gefühl allein verlassen können); im allgemeinen aber liegen Überbestimmungen nicht im Wesen der zeichnenden Geometrie (anders bei der Geodäsie); und Geuer selbst ist zu dem Resultat geführt worden (S. 27), daß es „eine mühsame und mißliche Sache ist, den

---

wird eine große Anzahl von Beispielen nötig sein, um über den Grad der Zuverlässigkeit eines geometrographischen Genauigkeitsmaßes einigermaßen sicher entscheiden zu können.

1) Da ich auf diesen Dualismus hier nicht weiter einzugehen brauche, so verweise ich auf die Ausführungen in meiner Dissertation, §§ 6 und 7.

2) Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Progr. d. Gymn. z. heil. Kreuz, Dresden, 1899.

3) Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gaußschen Ausgleichungsverfahren. Diss. Freiburg 1902, auch Progr. d. Progymn. in Durlach, 1902.

Grad der absoluten Genauigkeit einer Zeichnung durch zahlreiche Überbestimmungen zu heben". Auch die wenigen durchgeführten Anwendungen auf einzelne Konstruktionsaufgaben sprechen nicht für die Fruchtbarkeit dieser Methode; vor allem erhält man auch hier nur die Bedingungen für die maximale Genauigkeit, während Angaben über die numerische Größe der Fehler weder gemacht werden, noch überhaupt möglich erscheinen.

Die von Klein l. c. ausgesprochenen Gedanken hat P. Böhmer in seiner Dissertation[1]) auszuführen unternommen, aber, was wesentlich ist, ohne Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie. Die verwendeten Methoden (es kommt hier hauptsächlich das 1. Kapitel der Diss. in Betracht) sind daher ganz elementargeometrisch und vollständig im Sinne der älteren Genauigkeitsuntersuchungen (vor Gauß und Laplace) gehalten. Dies zeigt sich besonders an dem Auftreten eines *Parallelogramms* als *„Spielfläche"* für das Einsetzen der Zirkelspitze in den Schnittpunkt zweier Geraden und in der Art der *Fehlerzusammensetzung*; beides findet sich in fast genau derselben Form schon bei Lambert vor. In diesen beiden Punkten (Begriff des Spielraumes und Zusammensetzung der Spielräume) liegt aber die Schwäche und streng genommen sogar Unhaltbarkeit dieser elementaren Methoden. Denn ein Spielraum für den wahren Wert einer beobachteten Größe oder, was doch nur darunter verstanden werden kann, eine *Fehlergrenze* (Maximalfehler) läßt sich nicht einmal streng definieren und noch weniger mit genügender Schärfe experimentell bestimmen; und bei der Fehlerzusammensetzung ergibt die einfache Addition der Partialspielräume schon bei zwei Fehlern einen zu hohen Wert für den Maximalfehler, der in Wirklichkeit nicht erreicht wird und daher nicht mehr als Fehlergrenze im eigentlichen Sinne bezeichnet werden kann.[2]) Trotzdem aber ist die Arbeit von Böhmer als ein erster Versuch zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen anzusehen, weil es mit Hilfe der *„Differentialformeln"* wohl in den meisten Fällen möglich sein wird, die Bedingungen für die größte relative Genauigkeit richtig festzustellen, und weil man wenigstens Anhaltspunkte für die numerischen Werte der Fehler erhält.

Endlich habe ich vor kurzem in meiner schon zitierten Dissertation den Versuch gemacht, im engen Anschluß an die Theorie der

---

1) Über geometrische Approximationen. Diss. Göttingen 1904.

2) Für die Schwierigkeiten, welche bei dem Rechnen mit Maximalfehlern auftreten, findet man bei Lambert interessante Belege; insbesondere wird ein Fehlschluß, der ihm bei der Zusammensetzung von Fehlern begegnet ist, in § 5 auseinandergesetzt werden.

Fehler in der Ebene, insbesondere an eine Arbeit von Helmert[1]), die für die Fehleruntersuchung der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal nötigen Formeln anzugeben. Während es mir dort nur auf die rein mathematische Seite des Gegenstandes ankam, ist das Hauptziel vorliegender Arbeit die Anwendung der Theorie auf eine größere Anzahl von Konstruktionen (§§ 6 u. 7). Jedoch sollen vorher (§§ 3 u. 4) die wichtigsten Formeln der Theorie noch einmal zusammengestellt werden, sowie auch die Voraussetzungen der Theorie (§ 2) und die numerische Größe der Fehler (§ 5) ausführlicher erörtert werden.

## § 2. Die Voraussetzungen der Theorie.

Man kann bei den Fehlern der geometrischen Zeichnungen im wesentlichen zwei Arten unterscheiden: 1. solche, die von den Unvollkommenheiten der Zeichenapparate herrühren und daher als *„technische Fehler“* bezeichnet werden können (Unebenheiten des Reißbretts, ungleichmäßige Breite und unscharfe Begrenzung der Striche; Federn der Zirkelschenkel und Schlottern in den Gelenken; Mangelhaftigkeit des Lineals, schwankende Führung der Reißfeder beim Ziehen von Geraden; Unkorrektheiten von Dreiecken, Maßstäben usw.), 2. Fehler, welche allein in der Person des Zeichners ihren Grund haben (z. B. Ungenauigkeiten beim Einsetzen der Zirkelspitze, beim Anlegen des Lineals, beim Abmessen von Entfernungen) und daher vielleicht als *„subjektive Fehler“* zu bezeichnen wären; ihre Größe hängt natürlich ab von der Geschicklichkeit, Übung und Aufmerksamkeit des Zeichnenden, außerdem von äußeren Umständen, wie Beleuchtung usw.

Es ist klar, daß bei einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen im allgemeinen nur die Fehler der 2. Art Berücksichtigung finden können, denn die der ersten Art sind zum größten Teile konstante Fehler, welche in jedem einzelnen Falle besonders behandelt werden müßten. Nur ganz summarisch läßt sich aussagen, daß die technischen Fehler im allgemeinen dahin wirken, die subjektiven Fehler zu vergrößern, und daß man sie daher vielleicht implizite berücksichtigen kann, wenn man die Größe der subjektiven Fehler aus Konstruktionen ermittelt, die mit einer Reihe verschiedener Zeichenapparate ausgeführt worden sind.

Wir setzen nun von diesen subjektiven Fehlern voraus, daß ihre Größe nur abhängig sei von der Individualität des Zeichners, unabhängig dagegen von besonderen Umständen, wie der Lage der Zeichnung in der Zeichenebene und der Stellung des Zeichners zu ihr. Wir erhalten

1) Studien über rationelle Vermessungen usw., diese Ztschr. 13 (1868).

damit, unabhängig von einer speziellen Form des Fehlergesetzes, sogleich folgende Aussagen über einige *einfache Arten von Fehlerverteilungen:*

Beim *Einsetzen der Zirkelspitze* in einen beliebigen Punkt einer gegebenen Geraden liegen alle Treffpunkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf einer aus der Schar von Parallelen zu dieser Geraden.

Beim Einstechen in einen gegebenen kreisrunden Bleistiftpunkt[1]) liegen alle Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf einem aus der Schar konzentrischer Kreise um diesen Punkt.

Beim *Anlegen des Lineals* an einen gegebenen kreisförmigen Punkt in beliebiger Richtung umhüllen alle Geraden gleicher Wahrscheinlichkeit einen aus der Schar konzentrischer Kreise um diesen Punkt.

Ferner setzen wir die *Gültigkeit des Gaussischen Fehlergesetzes* für die subjektiven Fehler voraus. Es erscheint zweifellos, daß dies mit nicht viel geringerer Annäherung richtig sein wird, als es von den gewöhnlichen Beobachtungsfehlern bekannt ist. Immerhin aber möchte ich darauf hinweisen, daß gerade bei den geometrischen Konstruktionen die Erfahrung wahrscheinlich etwas größere *Abweichungen* vom Gaussischen Fehlergesetz zeigen wird, weil die endliche Breite der Striche besondere Sichtbarkeitsbedingungen mit sich bringt.[2]) Wie sich die folgenden Betrachtungen dann etwa ändern würden, läßt sich ungefähr übersehen; jedoch scheint es vorläufig nicht lohnend, näher darauf einzugehen.

Den Entwicklungen der beiden nächsten Paragraphen vorausgreifend wollen wir hier gleich die Frage nach der *Unabhängigkeit* gewisser Operationen voneinander streifen, weil wir auch hierbei eine für die ganze Theorie sehr wesentliche Annahme machen müssen. Es handelt sich darum, ob z. B. beim Anlegen des Lineals an zwei gegebene Punkte die Fehler des Anlegens in beiden Punkten als unabhängig voneinander angesehen werden können. Lemoine fordert dies ausdrücklich, und nur so hat er das Recht, diese Operation mit $2R_1$ zu bezeichnen. Auch wir werden im Interesse einer möglichst einfachen Theorie die gleiche Voraussetzung treffen; dieselbe wird wohl

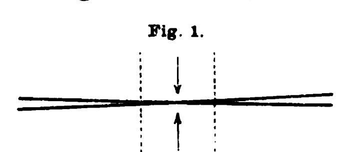
---

1) Beim Einsetzen der Zirkelspitze in ein schon vorhandenes Stichloch entsteht, wie Böhmer (S. 10 u. 19) richtig bemerkt hat, gewöhnlich kein neuer Fehler; jedoch ist daraus nur selten Vorteil zu ziehen.

2) Die physiologische Grenze des Sehvermögens, welche hier eine wichtige Rolle spielt (s. weiteres in § 5) tritt mehr oder weniger wohl bei allen Beobachtungsfehlern in Erscheinung; vielleicht ist hierin der Grund zu suchen für die eigentümliche Art der Abweichungen vom Gaussischen Fehlergesetz in größeren Beobachtungsreihen.

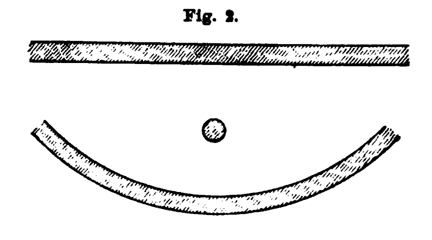
im allgemeinen ungefähr richtig sein; nur wenn die beiden Punkte sehr nahe aneinander liegen, so faßt das Auge sie als ein Ganzes auf und bewirkt dadurch, daß die Verbindungsgerade etwas genauer gezogen werden kann, als es nach der Theorie der Fall sein sollte. Noch deutlicher tritt dies hervor an dem Einsetzen der Zirkelspitze in den Schnittpunkt zweier Geraden: bei aufmerksamer Selbstbeobachtung wird man finden, daß besonders bei sehr spitzen Schnittwinkeln nicht nur die beiden Geraden als bestimmende Elemente des Schnittpunkts aufgefaßt werden, sondern daß es noch andre Anhaltspunkte für das Auge zur genaueren Erfassung des wahren Schnittpunkts gibt, nämlich in erster Linie die Spitzen der keilförmigen weißen Flächen zwischen den schwarzen Strichen; genau in der Mitte zwischen ihnen muß ja der ideale Schnittpunkt liegen (Fig. 1); außerdem richtet man sich auch nach der Stelle der kleinsten Breite, indem man die Figur der beiden Geraden wieder als ein Ganzes betrachtet.[1]) Die Fehler des Einstechens inbezug auf beide Geraden sind also *nicht* unabhängig voneinander, und infolgedessen wird ein sehr spitzwinkliger Schnittpunkt in Wirklichkeit nicht als so ungünstig empfunden, wie es nach der Theorie sein müßte. Es würde aber sehr umfangreicher experimenteller Untersuchungen bedürfen, um die Größe der Abweichungen von Theorie und Praxis festzustellen, und eine solche *verfeinerte Theorie* würde voraussichtlich gleich erheblich verwickelter werden.

Fig. 1.



Zum Schluß dieser einleitenden Bemerkungen möchte ich noch, besonders in Anknüpfung an die zitierte Arbeit von Böhmer, auf die Definition und Bedeutung der *geometrischen Realgebilde* eingehen. Indem wir bei den empirisch darstellbaren Strichen und Punkten absehen von der physikalischen Beschaffenheit, von der unscharfen Begrenzung der Ränder, von der ungleichmäßigen Breite der Striche und unregelmäßigen Gestalt der Punkte usw., können wir folgende einfachen Festsetzungen treffen:

Fig. 2.



Unter *Realgeraden* verstehen wir schmale, von zwei parallelen Idealgeraden begrenzte Streifen (*„Geradenstreifen“*). (Fig. 2.)

---

1) Zur Bestätigung möchte ich eine Stelle aus Culmanns Graphischer Statik anführen (Vorrede S. V): „der Ingenieur ist vermöge seiner topographisch-geodätischen Bildung mehr als der Architekt und der Mechaniker gewohnt, die Genauigkeit von Schnitten zu beurteilen und Linien und Punkte scharf zu bestimmen“.

Als *Realpunkte* nehmen wir kleine, genau kreisförmige Flächen an; sie mögen „*Punktkreise*" heißen.[1]) (Fig. 2.)

*Realkreise* (Fig. 2) und andere Realkurven sind analog den Geradenstreifen zu definieren („*Kurvenstreifen*").

Jedes Realgebilde repräsentiert uns genau ein und nur ein Idealgebilde, nämlich ein Kurvenstreifen die ideale Mittellinie und ein Punktkreis den idealen Mittelpunkt.[2]) Mit den in dieser Weise idealisierten Realgebilden werden wir im folgenden operieren und sie in den Figuren in etwa 20facher Vergrößerung wiedergeben (vgl. die Angaben in § 5).

## § 3. Die Fehlerellipsen.

Als Aufgabe einer rationellen Fehlertheorie der zeichnenden Geometrie ist anzusehen: die Berechnung des in dem Resultat einer beliebigen Konstruktion zu erwartenden Fehlers aus den Fehlern einer beschränkten Anzahl von Grundoperationen. Indem wir uns fortan auf die *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal* beschränken, haben wir es bekanntlich mit 5 solchen *Grundkonstruktionen* zu tun; demnach sind nur folgende *5 Grundfehler* zu berücksichtigen:

I. Fehler beim Einsetzen der Zirkelspitze in den Schnittpunkt
  a) zweier Geraden
  b) einer Geraden und eines Kreises } (§ 3).
  c) zweier Kreise

II. Fehler beim Anlegen des Lineals an zwei gegebene Punkte (§ 4).

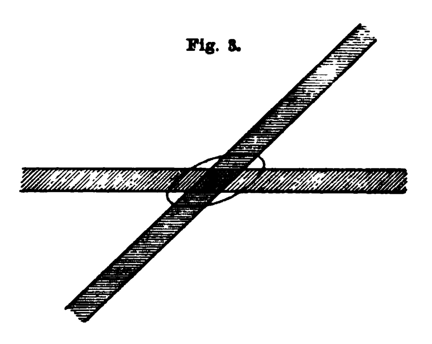
III. Fehler beim Konstruieren eines Kreises, der durch Mittelpunkt und Radius gegeben ist (§ 4).

Wir können die beim Einsetzen der Zirkelspitze in einen gegebenen Schnittpunkt auftretende Fehlerverteilung leicht mit einer andern, aus

1) Vgl. Lambert, Anm. u. Zus. § 429: „Wir gebrauchen hierzu eine Circulfläche, weil kein Grund da ist, warum man sich einen Punkt, den das Auge nicht mehr unterscheidet, als eckicht vorstellen sollte."

2) Es scheint vielfach die Ansicht zu bestehen (z. B. bei Klein, Witting und Böhmer), als ob die Realgebilde schon an und für sich wegen ihrer endlich großen Dimensionen den repräsentierten Idealgebilden einen gewissen Spielraum ließen und als ob z. B. die Genauigkeit der Lage eines Schnittpunktes auch abhängig wäre von der Breite der sich schneidenden Geraden. Dementgegen meine ich, daß jeder Strich, sei er noch so breit, einen ganz bestimmten Idealstrich (die Mittellinie) festlegt, daß aber auch in praxi die Bestimmtheit eines Realgebildes nur von der *Schärfe der Begrenzung*, nicht von der Größe der Abmessungen abhängt. Als Bestätigung möchte ich anführen, daß die internationalen Meterprototype bei einer Breite der Endstriche von 0,006—0,008 mm bis auf 0,0001 mm genau bestimmt gelten. Die ideale Mittellinie einer sauber auf Papier gezeichneten Geraden von etwa 0,1—0,2 mm Breite kann mikroskopisch mit leichter Mühe bis auf etwa 0,005 mm genau festgestellt werden.

der Geodäsie her bekannten, identifizieren, indem wir uns vorstellen, daß der wahre Schnittpunkt der beiden geometrischen Örter immer genau getroffen wird, daß aber diese selbst mit einer Unsicherheit in ihrer Lage behaftet sind. Wir können dann sofort auf Grund der Theorie der *„Genauigkeit von Punktbestimmungen"* folgenden Satz aussprechen:


Fig. 3.

Die Genauigkeit des Einstechens in den Schnittpunkt zweier Geraden ist in der Art durch eine *Schar von konzentrischen, homothetischen Ellipsen* um den gegebenen Schnittpunkt charakterisiert, daß alle Treffpunkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf einer dieser Ellipsen liegen. (Fig. 3.)

Werden die gegebenen Geraden als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems genommen (Schnittwinkel $\omega$), sind ferner $m_1$ und $m_2$ die mittleren Fehler des Einsetzens der Zirkelspitze in bezug auf die erste resp. zweite Gerade, so ist

$$\frac{x^2}{m_2^2} + \frac{y^2}{m_1^2} = \frac{2\varkappa^2}{\sin^2\omega}$$

die Gleichung dieser *„Fehlerellipsen"* ($\varkappa^2$ willkürliche Konstante). Vorausgesetzt ist dabei also die Gültigkeit des Gaussischen Fehlergesetzes und die Unabhängigkeit der Fehler in bezug auf die erste und zweite Gerade voneinander.[1])

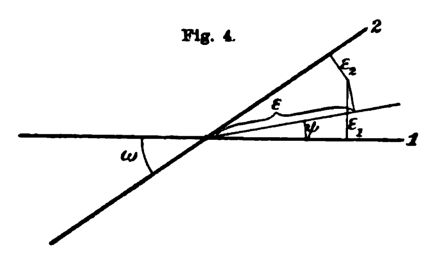


Fig. 4.

Bei den hier beabsichtigten Anwendungen handelt es sich gewöhnlich nur um die Kenntnis der mittleren *Fehlerkomponente* in einer bestimmten Richtung, d. h. des mittleren Wertes der Quadrate aller *Projektionen der Fehler* auf diese Richtung. Bezeichnet man die Fehler (senkrechten Abstände) eines beliebigen Punktes in bezug auf beide Geraden mit $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$, so erhält man als Projektion $\varepsilon$ dieses fehlerhaften Punktes auf die Richtung, welche mit der ersten Geraden den Winkel $\psi$ bildet (Fig. 4):

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \cos(\psi - \omega) + \varepsilon_2 \cos\psi}{\sin\omega}.$$

1) In meiner Dissertation habe ich auf S. 8/9 eine ausführlichere direkte Ableitung gegeben; ich habe dort auch gezeigt, wie man mittels der von Bravais gegebenen Formeln zum Ziele gelangen kann.

Durch Bildung des Mittelwertes der Quadrate dieser Projektionen erhält man dann die wichtige Formel:

$$K_\psi^2 = \frac{m_1^2 \cos^2(\psi - \omega) + m_2^2 \cos^2 \psi}{\sin^2 \omega},$$

wobei $K_\psi$ die Fehlerkomponente in der Richtung $\psi$ gegen die erste Gerade bedeutet.

Die Anschauung über Lage und Größe der Fehlerellipsen und Fehlerkomponenten wird am einfachsten durch die beiden folgenden Sätze gegeben:

Die *mittlere Fehlerellipse* ($\varkappa^2 = \frac{1}{2}$) ist dem Parallelogramm einbeschrieben, welches von den Parallelen zu den sich schneidenden Geraden im Abstande $\pm m_1$ bezw. $\pm m_2$ gebildet wird.

Die Fehlerkomponente in irgend einer Richtung ist gleich der Länge des in dieser Richtung gezogenen Radiusvektors der *Fußpunktkurve* zu der mittleren Fehlerellipse.

In dem Spezialfalle $m_1 = m_2 = m$ sind die Längen der halben Hauptachsen:

$$a = \frac{\varkappa m}{\sin \frac{\omega}{2}}, \quad b = \frac{\varkappa m}{\cos \frac{\omega}{2}}.$$

Der Ausdruck für die große Hauptachse $a$ (wenn $\omega < 90^0$) ist die Präzisierung der gewöhnlichen Anschauung, wonach der Fehler des Einstechens gerade in der Richtung der Halbierungslinie von $\omega$ um so größer ist, je kleiner der Schnittwinkel $\omega$ ist.

Für $m_1 = m_2 = m$ und $\omega = 90^0$ gehen die Fehlerellipsen in *Fehlerkreise* über. Im Sinne unserer Theorie sind also Schnittpunkte von Geraden unter rechtem Winkel und isoliert markierte Punkte gleichwertig. Es erweist sich daher in vieler Hinsicht als vorteilhaft, beide mit demselben Namen zu bezeichnen, also auch *rechtwinklige Schnittpunkte „Punktkreise“* zu nennen. Allgemein könnte man überhaupt die verschiedenen Arten von Schnittpunkten nach der Form der zu ihnen gehörigen Fehlerflächen unterscheiden, also beliebige Schnittpunkte von Geraden als *„Punktellipsen“*, Schnittpunkte von Kreisen, wie wir gleich sehen werden, als *„Punktovale“* bezeichnen. Die Benennung nach der durch die Realgebilde gegebenen Figur (Punktquadrate, -rhomben, -parallelogramme) wäre hier wenigstens unangebracht; bei den Schnittpunkten von Kreisen würde es anscheinend sogar an einer passenden Bezeichnung fehlen.

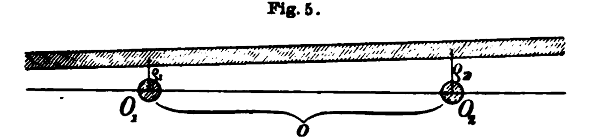
Handelt es sich nun ferner um das Einsetzen der Zirkelspitze in den Schnittpunkt einer *Geraden* und eines *Kreises* oder *zweier Kreise*, so wird man sich ja meistens damit behelfen können, die Kreise durch

ihre Tangenten in den Schnittpunkten zu ersetzen. Ich möchte hier aber wenigstens kurz darauf hinweisen[1]), daß es möglich ist, diese Fehlerflächen genauer (unter Berücksichtigung der Krümmung) zu bestimmen. Man erhält für die Schnittpunkte von Gerade und Kreis an Stelle der Ellipsen *ovalförmige Kurven 4. Ordnung*, für die Schnittpunkte zweier Kreise *Ovale 8. Ordnung*. Es ist auch nicht schwer, die Breite und Höhe dieser *Fehlerovale* angenähert zu bestimmen, besonders in den Fällen von Berührung, die hierbei ja am meisten interessieren. Jedoch bedarf diese Theorie der Fehlerovale noch einer eingehenderen Untersuchung und soll hier daher ganz bei Seite gelassen werden.

## § 4. Die Fehlerhyperbeln.[1])

Beim *Anlegen des Lineals* an zwei gegebene Punkte $O_1$ und $O_2$, die wir vorläufig als Punktkreise voraussetzen, sind die Fehler als senkrechte Abstände der gezogenen Geraden von den beiden Punkten zu rechnen (Fig. 5). Bezeichnen wir sie mit $\varrho_1$ und $\varrho_2$ (bipolare Linienkoordinaten), ferner die mittleren Fehler des Linealanlegens in $O_1$ und $O_2$ mit $\mu_1$ resp. $\mu_2$, so ergibt eine ähnliche Berechnung, wie bei den Fehlerellipsen, daß alle Geraden gleicher Wahrscheinlichkeit der Gleichung

Fig. 5.




$$\frac{\varrho_1^2}{\mu_1^2} + \frac{\varrho_2^2}{\mu_2^2} = 2\varkappa^2$$

genügen. Durch Übergang zu rechtwinkligen Cartesischen Punktkoordinaten findet man zunächst, daß die umhüllten Kurven Kegelschnitte sind, deren Mittelpunkt auf der Strecke $O_1 O_2$ im Abstande $\frac{o \cdot \mu_1^2}{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ von $O_1$ liegt (die Entfernung $O_1 O_2$ werde mit $o$ bezeichnet), und deren eine Hauptachse in die Richtung $O_1 O_2$ fällt. Auf den Mittelpunkt und die Hauptachsen bezogen lautet dann die Gleichung:

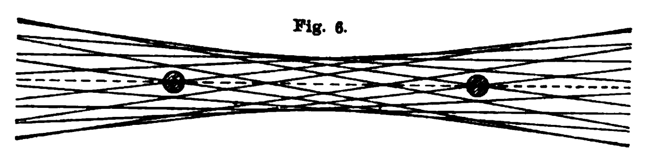
$$\frac{y^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)}{2\mu_1^2\mu_2^2\varkappa} - \frac{x^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2}{\mu_1^2\mu_2^2[o^2 - 2\varkappa^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)]} = 1.$$

Die *Kegelschnitte* sind also *konfokal*, es treten Hyperbeln und Ellipsen auf. Jedoch ist es klar, daß unter gewöhnlichen Verhältnissen nur die Hyperbeln in Betracht kommen, deren beide Züge sich von

1) Einige weitere Ausführungen über die Fehlerovale und Fehlerhyperbeln findet man in den §§ 4—8 meiner Dissertation.

der idealen Verbindungsgeraden nicht weit entfernen (letztere ist die imaginäre Achse aller Hyperbeln). Wir erhalten also den Satz:

Die Genauigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punktkreise ist in der Art durch eine *Schar konfokaler Hyperbeln* gekennzeichnet, daß alle Geraden gleicher Wahrscheinlichkeit eine dieser Hyperbeln umhüllen (Fig. 6).


Fig. 6.

Wenn die zu verbindenden Punkte, wie es ja meistens der Fall ist, als Punktellipsen (oder Punktovale) gegeben sind, so muß man sich, weil eine genaue Theorie hier große Schwierigkeiten machen würde, damit begnügen, $\mu_1$ und $\mu_2$ als Fehlerkomponenten des Linealanlegens allein in der Richtung *senkrecht* zur idealen Verbindungsgeraden anzusehen. Dann sind alle Betrachtungen sofort auch auf diesen allgemeineren Fall ausdehnbar.

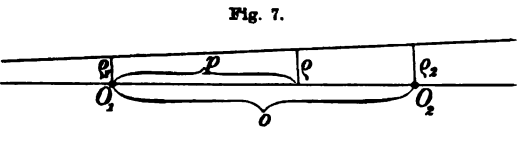
Von besonderer Wichtigkeit für die Anwendungen sind die *mittleren Fehler der Geradenbestimmung*, welche in folgender Weise zu definieren sind:

Aus dem Winkelfehler irgend einer Geraden mit den Koordinaten $\varrho_1$ und $\varrho_2$: $\sin\vartheta = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{o}$ erhält man durch Bildung der Mittelwerte den *„mittleren Richtungsfehler der Geraden“*

$$\sin^2\Theta = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{o^2}.$$

Aus dem senkrechten Abstande $\varrho$ eines auf $O_1 O_2$ im Abstande $p$ von $O_1$ gelegenen Punktes von der Geraden $(\varrho_1 \varrho_2)$ (Fig. 7):

$$\varrho = \varrho_1\left(1 - \frac{p}{o}\right) + \varrho_2 \cdot \frac{p}{o}$$


Fig. 7.


findet man durch Berechnung des Mittelwertes den *„mittleren Abstandsfehler in dem betreffenden Punkte“*

$$M_p^2 = \mu_1^2\left(1 - \frac{p}{o}\right)^2 + \mu_2^2 \cdot \left(\frac{p}{o}\right)^2.$$

Die *geometrische Bedeutung* dieser Formeln liegt in den folgenden beiden Sätzen:

Der mittlere Richtungs-(Winkel-)fehler einer durch zwei Punkte gelegten Geraden ist gleich dem Komplementwinkel des *Asymptotenwinkels* der *mittleren Fehlerhyperbel* ($x^2 = \frac{1}{2}$).

Schlägt man um jeden Punkt der wahren Verbindungsgeraden einen Kreis mit dem mittleren Abstandsfehler für diesen Punkt, so ist die *Hüllkurve* aller dieser Kreise die mittlere Fehlerhyperbel selbst.

Bei dem letzten der in § 3 aufgezählten Grundfehler handelt es sich ebenfalls um Hüll-Fehlerflächen; er möge deshalb hier anhangsweise kurz erledigt werden. Man erkennt sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Alle mit gegebenem (oder einfacher: beliebigem) Radius um einen gegebenen Mittelpunkt gezogenen Kreise gleicher Wahrscheinlichkeit umhüllen eine sog. *Parallelkurve* zu einer *Fehlerellipse* (oder einem Fehleroval) des Mittelpunkts.

Da gewöhnlich nur kleine Teile von Kreislinien zur Bestimmung von Schnittpunkten gebraucht werden, so ist die Charakterisierung der Genauigkeit durch vollständige „*Fehlertoroiden*" nur selten nötig, bietet übrigens auch keine besonderen Schwierigkeiten. Im folgenden bleiben die Fehlertoroiden gänzlich außer Betracht.

## § 5. Numerische Angaben.

### A. Breite von Strichen und Durchmesser von Punkten.

Die einzigen Angaben hierüber habe ich bei Böhmer (S. 7) vorgefunden; die kleinste für das Zeichnen zulässige Strichbreite soll demnach 0,08 mm, der kleinste zulässige Punktdurchmesser 0,10 mm betragen.

Ich stellte an Strichen verschiedener Dicke, mit Bleistift oder Reißfeder auf verschiedenem Papier gezogen, *mikroskopische Messungen* an und fand folgende Werte:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Dicke | Striche | sind | etwa | 0,25—0,40 mm | breit |
| Mittlere | „ | „ | „ | 0,15—0,25 mm | „ |
| Feinere | „ | „ | „ | 0,05—0,15 mm | „ |
| Ganz feine | „ | „ | „ | 0,03—0,05 mm | „ |

Als am häufigsten vorkommende Strichbreite beim Zeichnen kann wohl 0,10—0,15 mm angenommen werden.

Zum Vergleich führe ich noch an, daß die Teilstriche auf gewöhnlichen Millimetermaßstäben aus Holz 0,08—0,13 mm breit sind, und daß feine Teilungen auf Metall eine Strichbreite von etwa 0,025 mm haben.

Bleistiftpunkte sind fast immer so unregelmäßig, daß sie bei feineren Zeichnungen nicht verwendet werden dürfen. Dagegen geben Zirkelspitzen und Nadeln meistens ganz *genaue Punktkreise*. Bei

gröberen Spitzen beträgt der Durchmesser 0,15—0,25 mm, bei feineren zylindrischen Nadelspitzen 0,10—0,13 mm. Bei ganz feinen Stichen von 0,05—0,10 mm Durchmesser, welche ich durch die Spitze eines Nullfallenzirkels erhielt, hörte oft schon die Sichtbarkeit für das bloße Auge auf.

### B. Größe der subjektiven Fehler.

Die Fehler von Op. $C_2$ und $R_1$ sind an kleinen Zeichnungen einfachster Art mikroskopisch leicht auszumessen. Op. $C_1$ macht selbst bei rechtwinkligen Schnittpunkten schon mehr Schwierigkeiten; eine größere Reihe von Versuchen darüber ist so wenig befriedigend ausgefallen, daß mir die Angabe der Resultate nicht angebracht erscheint, bevor ich weitere Bestätigungen derselben erhalten haben werde.

Ich beschränke mich also auf die beiden für unsre Theorie wichtigsten Fälle: Fehler beim Einsetzen der Zirkelspitze in einen beliebigen Punkt einer Geraden, und beim Anlegen des Lineals an gegebene Punktkreise; als solche nahm ich nicht nur Zirkelstichpunkte, sondern auch rechtwinklige Schnittpunkte von Geraden, wobei ich das Lineal etwa in der Halbierungslinie anlegte.

Als besondere Aufgabe bei diesen Messungen stellte ich mir die Untersuchung des *Einflusses der Strichbreiten* (die Durchmesser der Stichpunkte konnte ich nur schlecht variieren) *auf die Größe der subjektiven Fehler.* Ich führte also an Geraden verschiedener Breite die Grundoperationen zu je 10 an der Zahl aus und maß die Größe der Fehler und die Strichbreiten bezw. Punktdurchmesser; aus den Werten jeder Gruppe berechnete ich dann die mittleren zu fürchtenden Fehler. Zur Probe gebe ich ein paar Werte für Op. $C_2$ an, wobei $2\beta$ die Breite der Geraden und $m$ *den mittleren Fehler von Op.* $C_2$ inbezug auf dieselbe bedeutet (die letzten Stellen sind um einige Einheiten unsicher.[1])

| $\beta$ | $m$ |
|---|---|
| 0,048 mm | 0,043 mm |
| 0,053 „ | 0,053 „ |
| 0,074 „ | 0,054 „ |
| 0,101 „ | 0,064 „ |

Es zeigte sich deutlich eine, wenn auch nur langsame *Zunahme der Fehler mit wachsender Strichbreite.* Ich setzte dieselbe zunächst

1) Ich möchte zu diesen Zahlenangaben noch bemerken, daß ich kein guter Zeichner bin, und daß andre vielleicht erheblich geringere Werte finden werden.

als lineare Relation an und fand nach der Methode der kleinsten Quadrate ungefähr folgende Werte:

$$\text{Op. } C_2 \ldots m = 0{,}042 \text{ mm} + 0{,}12 \cdot \beta \text{ mm}$$
$$\text{Op. } R_1 \ldots \mu = 0{,}025 \;\;\text{„}\;\; + 0{,}20 \cdot \beta \;\;\text{„}\;.$$

Die auffällige Verschiedenheit in dem konstanten und variabeln Fehleranteil bei $m$ und $\mu$ kann bei mir nicht zufällig gewesen sein; solange jedoch keine anderen bestätigenden Beobachtungen vorliegen, möchte ich von dem Versuch einer Erklärung dieser Tatsache absehen.

Für die üblichen Strichbreiten folgt hieraus:

$$m = 0{,}045 \text{ bis } 0{,}050 \text{ mm}$$
$$\mu = 0{,}035 \text{ bis } 0{,}045 \text{ mm}.$$

Der Fehler von Op. $R_1$ für ein gegebenes Punktloch fiel merklich größer aus, nämlich $\mu =$ ca. 0,060 mm.

Die nähere Überlegung zeigte nun aber, daß die Annahme einer linearen Beziehung zwischen $m$ bezw. $\mu$ und $\beta$ theoretisch nicht haltbar ist (für praktische Zwecke würde sie nicht nur zulässig, sondern sogar vorzuziehen sein). Da nämlich jeder einzelne Fehler $\varepsilon$ aus einem konstanten Anteil $V$ (der Volkmannschen *Konstanten*[1])) und einem proportional[2]) der Strichbreite wachsenden Anteil $W \cdot \beta$ ($W$: die Webersche *Variable*[1])) zusammengesetzt ist:

$$\varepsilon = V + W \cdot \beta,$$

so muß der berechnete mittlere Fehler in folgendem Zusammenhang mit $\beta$ stehen:

$$m^2 = V^2 + W^2\beta^2.$$

Die genaue Berechnung von $V$ und $W$ nach der Methode der kleinsten Quadrate wäre sehr mühsam; es genügte für vorliegenden

1) Nach G. Th. Fechner, Elemente der Psychophysik (1860) S. 220 ff.

2) Die Annahme der Proportionalität ist freilich auch nur ein Ansatz, der jedoch sehr plausibel ist und in dem Weberschen psychophysischen Gesetz seinen allgemeinen Ausdruck findet. Die angenäherte Richtigkeit bei Halbierung von Strecken ist durch Fechner und A. W. Volkmann experimentell nachgewiesen worden. Wenn die neuesten Versuche von Pearson über *Bisektionsfehler* (Phil. Trans. (A) 198 (1902) S. 235—299) ein anscheinend widersprechendes Resultat ergaben (der Halbierungsfehler war nahezu konstant), so ist das wohl dadurch zu erklären, daß sich die Versuche auf ein ziemlich kleines Intervall (Strecken von 4—10 cm Länge) beschränkten, und daß in diesem Bereich zufällig keine Proportionalität stattfand. Es ist ja ohnehin wahrscheinlich, daß die Halbierungsfehlerkurve nicht genau eine gerade Linie ist, wie das Webersche Gesetz es verlangt, sondern daß sie bald mehr, bald weniger von derselben abweicht.

Zweck, die Ausgleichung für $V^2$ und $W^2$ als lineare Größen vorzunehmen.[1]) Ich erhielt so für Op. $C_2$ (Op. $R_1$ lohnte die Berechnung nicht) die abgerundeten Werte:

$$V = 0{,}040 \text{ mm} \qquad W = 0{,}20.$$

Wenngleich meine Versuche manche Berührungspunkte mit den unten angeführten von Fechner hatten, so war eine wirkliche Vergleichung der Zahlenwerte doch nicht möglich; es bleibt daher abzuwarten, wieweit meine Messungsergebnisse durch solche von andrer Seite Bestätigung finden werden.

## C. Sichtbarkeitsgrenzen.

### Kleinste erkennbare Größen.

Unter guten Beleuchtungsverhältnissen können mit bloßem Auge noch Linien von 0,002 mm Breite wahrgenommen werden. Demnach dürfte die Strichbreite beim Zeichnen ruhig bis auf ca. 0,005 mm sinken, was freilich mit gewöhnlichen Hilfsmitteln nicht erreichbar zu sein scheint.

Wenn aber die Länge der Striche weniger als etwa 0,04 mm beträgt, so sind sie um so schlechter zu sehen, je kürzer sie sind. Ich fand als Verhältnis der Sichtbarkeitsgrenzen für Punktkreise und längere Geradenstreifen gleicher Dimension 1 : 15, was auch mit anderen Angaben über die Gesichtswinkelgrenze (20″ bis 60″) zur Genüge übereinstimmt. Da die Stichpunkte auf Papier sich verhältnismäßig schlecht abheben, so darf demnach ihr Durchmesser keinesfalls unter 0,06 mm sinken (vgl. Seite 16/17).

### Kleinste erkennbare Distanzen.

Die Ungenauigkeiten von Op. $C_2$ und Op. $R_1$ rühren in erster Linie davon her, daß das Unterscheidungsvermögen des menschlichen Auges nur bis zu einer bestimmten, relativ hohen unteren Grenze reicht; Böhmer spricht in diesem Sinne von *„physiologischer Inzidenz“* von Punkt und Strich. Obwohl die Sichtbarkeitsbedingungen bei den Zeichenoperationen noch wieder besonderer Natur sind, so werden die Koinzidenzgrenzen doch ungefähr mit denen für gleichartige Elemente übereinstimmen, also z. B. für schwarze Punkte und Striche auf weißem Grunde. Diese kleinsten erkennbaren Distanzen sind annähernd dieselben für zwei Punkte (Auflösung von Doppelsternen), zwei parallele Geraden und Gerade und Punkt; sie betragen sicher nicht unter 0,06 mm

---

1) Zur näheren Rechtfertigung verweise ich auf Fechner, l. c., S. 226—227.

(in der kleinsten normalen Sehweite von etwa 20 cm); als Durchschnitt wird angegeben 0,08—0,10 mm, häufig sogar 0,12 mm.

Hiernach könnte also bei Ausführung von Op. $C_2$ für eine feine Linie ein Fehler von etwa 0,10 mm erst grade bemerkt werden. Rechnet man aber noch die Unsicherheit der Hand und kleine Nachlässigkeiten dazu, so kann man wohl *0,12—0,15 mm* als *oberste Fehlergrenze* annehmen. Schließen wir uns nun der vielfach üblichen Annahme an, daß bei Beobachtungsreihen gewöhnlichen Umfangs als Maximalfehler etwa das Dreifache des mittleren Fehlers zu erwarten ist, so können wir umgekehrt aus einem Maximalfehler von 0,12—0,15 mm auf einen *mittleren Fehler von 0,04—0,05 mm* schließen, was ganz gut mit den Angaben unter $B$ übereinstimmt.

## D. Die Versuchsreihe von Lambert.

Die schönste Bestätigung meiner Werte für den mittleren Fehler von Op. $C_2$ erhielt ich aus der schon in § 1 erwähnten Versuchsreihe von Lambert über den *Fehler beim Abgreifen einer gegebenen Strecke mit dem Handzirkel.* Lambert vergrößerte den beim Abgreifen von $AB$ (s. Fig. 8 in halber natürlicher Größe) gemachten Fehler dadurch, daß er die Zirkelöffnung auf der Strecke $AD$ 20mal weitertrug; zwischen $C$ und $E$ stellte er sich eine Teilung her, auf der er die bei verschiedenen Versuchen erhaltenen Endpunkte ablas. Er wiederholte das Abgreifen 80mal; die Resultate mit Berechnung des arithmetischen Mittels sind von ihm l. c. angegeben. Ich benutzte sie zur Berechnung des mittleren Fehlers des Einsetzens der Zirkelspitze in einen der Punkte $A$ oder $B$ (die Rechnung ist ganz leicht, da es sich nur um lineare Fehler handelt) und erhielt:

Fig. 8.

A B C D E

$$m = 0{,}047 \text{ mm}.$$

Wegen einiger zweifelhafter Beobachtungen und wegen der Maßreduktionen ist die letzte Stelle (7) um 1—2 Einheiten unsicher; doch ändert das nichts an der auffallend guten Übereinstimmung mit den von mir gefundenen Werten ($m = 0{,}045$—$0{,}050$ mm).

Lambert bezweckte mit diesem Versuch eine Bestimmung der *Grenze des Sehwinkels.* Er fand, daß (nach Streichung einer sehr stark abweichenden Beobachtung) die größte Abweichung der Zirkelöffnung $AB$ vom arithmetischen Mittel auf einen Gesichtswinkel von 2′ (in Sexagesimalteilung) schließen ließ. Daraus folgerte er weiter, daß in

jedem der Punkte $A$ und $B$ ein Fehler von höchstens $1'$ begangen sei, so daß „der scheinbare Diameter eines Punktes zwo Minuten seyn mag.“ Auf diesen *Fehlschluß* habe ich auf S. 7 hinweisen wollen. Da es sich nämlich nur höchst selten ereignet, daß große Abweichungen in den Punkten $A$ und $B$ zugleich auftreten, so erhält man durch diesen Schluß *zu kleine Werte für die Fehlergrenzen* in $A$ und $B$. Der richtige Wert für die Sehwinkelgrenze würde etwa $1{,}4'$ sein (2 ist durch $\sqrt{2}$, nicht durch 2 zu dividieren). Übrigens möchte ich hier noch bemerken daß die ganze Methode keine zuverlässige Bestimmung erlaubt, weil eben der gesuchte Maximalfehler, auf den alles ankommt, im allgemeinen eine *Funktion der Anzahl der Beobachtungen* ist. Bei nur 20 Beobachtungen hätte Lambert voraussichtlich statt $2'$ den Wert $1{,}6'$ erhalten, bei 500 Beobachtungen dagegen rund $2{,}4'$, bei 5000 $2{,}9'$ usw.[1])

### E. Das Zeichenexperiment von Chr. Wiener.

In der auf S. 4 angeführten Arbeit Wieners handelt es sich um die Ermittelung eines *technischen Zeichenfehlers*, nämlich des zufälligen Fehlers beim *Weitertragen einer beliebigen Zirkelöffnung* (Handzirkel) auf einer vorgezogenen Geraden. Die hierbei wirkenden Fehlerquellen sind: Einstechen unter wechselnder Neigung, Rauhigkeit des Papiers usw. Durch hinreichende Wiederholung werden die Fehler mit bloßem Auge meßbar gemacht; es ergibt sich als mittlerer zu fürchtender Fehler bei einmaligem Weitertragen (Umschlagen) einer beliebigen Zirkelöffnung von etwa 1—7 mm der Wert: $\pm$ *0,018 mm*. Aus zwei Versuchsreihen, die ich zur Kontrolle ausführte, erhielt ich in guter Übereinstimmung $\pm$ 0,020 mm.

Diese technische Fehlerquelle beeinflußt etwas die Lambertsche Versuchsreihe, wie er selbst schon vermutet hat; ich überzeugte mich aber durch direkte Ausrechnung, daß der hierdurch entstehende Fehler ruhig vernachlässigt werden kann. Übrigens habe ich auch durch eine eingehendere Untersuchung gefunden, daß durch das *Einstechen seitlich der Linie*, welches Wiener auch als Fehlerquelle angibt, ein für gewöhnlich so geringfügiger Fehler im Endresultat entsteht, daß er überhaupt nicht gemessen werden kann (die mittlere zu fürchtende Verkürzung beträgt bei der Zirkelöffnung $a$: $\frac{m^2}{a}\sqrt{3}$; es käme aber erst auf die Schwankungen dieser Verkürzung an).

Es ist nicht schwer, nach dem *Prinzip der Wiederholung gleicher Operationen* weitere Versuchsanordnungen zu ersinnen, durch welche

1) Nach der Tabelle in Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, S. 207.

die Fehler von Op. $C_2$ und Op. $R_1$ mit den einfachsten Hilfsmitteln gemessen werden können. Ich möchte hier aber nur anführen, daß ich durch einen einfachen Versuch dieser Art bei Geraden gewöhnlicher Breite für Op. $C_2$ den Wert $m = 0{,}048$ mm erhalten habe, wiederum in sehr guter Übereinstimmung mit den früheren Werten.

## § 6. Anwendung der Theorie auf Elementarkonstruktionen.

*Vorbemerkungen.*

Die *Zusammensetzung von Fehlern in der Ebene* läßt sich in den hier vorkommenden Fällen immer leicht auf die Zusammensetzung linearer Fehler zurückführen, wie die weiter unten ausgeführten Beispiele des näheren zeigen werden. Somit steht der Fehleruntersuchung ganz beliebiger Konstruktionen mit Zirkel und Lineal nichts mehr im Wege.

Was die Rechnung im einzelnen betrifft, so muß sie Schritt für Schritt dem Gange der Konstruktion nachfolgen und die Bestimmungselemente der mittleren Fehlerellipse für jeden Schnittpunkt, sowie der mittleren Fehlerhyperbel für jede Verbindungsgerade ableiten. Es müssen also für jeden Punkt zunächst die drei Größen $m_1$, $m_2$ und $\omega$ angegeben werden, und zwar, wenn die Konstruktion weiter fortschreitet, gleich in solcher Form, daß die Unsicherheit des Schnittpunkts (Parallelverschiebungen der Schnittgeraden) mit dem Fehler von Op. $C_1$ oder Op. $R_1$ für denselben zusammengesetzt wird. Die Orientierung über die Bezeichnungen (1. und 2. Gerade, Winkel $\omega$ und $\psi$) erfolgt am besten durch eine beigefügte kleine Figur in den Lageverhältnissen der Hauptfigur.[1]) Dann ist die Richtung für die Fehlerkomponente, welche bei der weiteren Konstruktion in Betracht kommt, durch den Winkel $\psi$ gegen die 1. Gerade anzugeben und die Fehlerkomponente selbst nach der Formel (vgl. S. 13)

$$K_\psi^2 = \frac{m_1^2 \cos^2(\psi - \omega) + m_2^2 \cos^2 \psi}{\sin^2 \omega}$$

zu berechnen.[2]) Für jede Verbindungsgerade sind die Fehlerkomponenten von Op. $R_1$ (senkrecht zur idealen Verbindungsgeraden) in den beiden gegebenen Punkten zu ermitteln; sie mögen mit $\mu_1$ und $\mu_2$ bezeichnet werden (wobei alsdann eine Nebenfigur nötig ist), oder, wo das genügt, durch $\mu$ mit der als Index angehängten Bezeichnung des

1) Häufig erlaubt der Zusammenhang eine leichte Rekonstruktion der Bezeichnungen und macht die Nebenfigur unnötig.

2) Die Fehlerzusammensetzung könnte auch erst nach Berechnung der Fehlerkomponenten erfolgen, was sich jedoch weniger empfiehlt.

Punktes, z. B. $\mu_A$, $\mu_B$. Außerdem ist immer die Kenntnis der Entfernung $o$ der zu verbindenden Punkte nötig. Dann handelt es sich entweder um den mittleren Richtungsfehler, der nach der Formel (vgl. S. 15)

$$\sin^2 \Theta = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{o^2}$$

zu berechnen ist[1]), oder um den mittleren Abstandsfehler in einem Punkte, der von dem ersten der gegebenen Punkte um $p$ entfernt ist (vgl. S. 15):

$$M_p^2 = \mu_1^2 \left(1 - \frac{p}{o}\right)^2 + \mu_2^2 \left(\frac{p}{o}\right)^2.$$

*Auf diesen drei Formeln beruhen alle Anwendungen der Theorie.*

Es kommt manchmal vor, daß mehrere Linien durch einen Punkt gezogen werden müssen. Dieser Fall (Überbestimmung) läßt sich nach unserer Theorie nicht behandeln; er kann aber meistens leicht dadurch vermieden werden, daß die Geraden nicht vollständig ausgezogen werden, wie es ja besonders beim technischen Zeichnen vielfach üblich ist.

Es mußte vorläufig darauf verzichtet werden, für die Fehler von Op. $C_2$ und von Op. $R_1$ zwei verschiedene Konstanten zu gebrauchen, weil dadurch alle Formeln gleich erheblich verwickelter wurden. Es ist also, wie es ja auch in Wirklichkeit annähernd der Fall zu sein scheint, $m = \mu$ gesetzt worden, und diese *einzige Konstante* ist *mit $\delta$ bezeichnet.*

In den *Zahlenbeispielen* ist für $\delta$ ein ziemlich kleiner Wert genommen, nämlich $\delta = 0{,}040$ mm, einerseits weil gute Zeichner solche Genauigkeit noch bequem erreichen dürften, andrerseits weil bei dieser Wahl die Abweichungen der Theorie von der Wirklichkeit (bei kleinen Schnittwinkeln usw.) numerisch weniger bedeutend werden, was für Vergleichungen mit den Leistungen andrer Zeichenapparate wichtig ist. Bei einigen Konstruktionsaufgaben habe ich z. B. die Frage zu lösen gesucht, ob sie genauer durch geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal, oder durch Rechnung und Verwendung von Maßstab und Transporteur ausführbar sind. Als mittleren Fehler für Ablesungen an einem in Millimeter geteilten Maßstab habe ich dabei ebenfalls $\delta = 0{,}040$ mm angenommen. Mit großen Transporteuren kann man noch Winkeldifferenzen von 1′ feststellen; jedoch ist im allgemeinen ein mittlerer Fehler von 1′ — 2′ auch bei guten Instrumenten (mit Alhidade und Nonius) zu befürchten.

---

1) Bei der Kleinheit dieser Winkel genügt es meistens, den Bogen $\Theta$ statt des sinus zu nehmen.

Schließlich führe ich hier noch an, daß ich als größte zu verwirklichende Zirkelöffnungen die folgenden ermittelte:

bei einfachen (Schul-)Zirkeln rund 16 cm,

bei größeren Zirkeln mit Schenkelgelenken 20 cm,

mit Verlängerungsstange 30 cm.

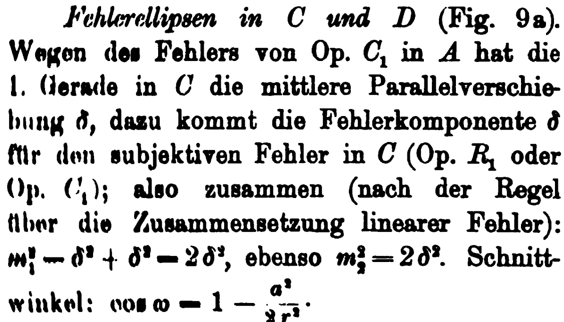
Auf die Begrenztheit der Zeichenebene und des Lineals habe ich keine Rücksicht genommen.

## A. Konstruktion der Mittelsenkrechten.

*Lösung.* (Fig. 9.) Gegeben $AB = a$. Kreise $A(r)$ und $B(r)$. Verbindungsgerade $CD$; Mittelpunkt $E$.

*Fehleruntersuchung.*

Die Strecke $AB$ sei der Einfachheit halber durch senkrechte Endstriche gegeben (was in solchen Fällen immer angenommen werden soll); dann haben wir für Op. $C_1$ in $A$ und $B$ mittlere Fehlerkreise mit dem Radius $\delta$.



*Fehlerellipsen in $C$ und $D$* (Fig. 9a). Wegen des Fehlers von Op. $C_1$ in $A$ hat die 1. Gerade in $C$ die mittlere Parallelverschiebung $\delta$, dazu kommt die Fehlerkomponente $\delta$ für den subjektiven Fehler in $C$ (Op. $R_1$ oder Op. $C_1$); also zusammen (nach der Regel über die Zusammensetzung linearer Fehler): $m_1^2 = \delta^2 + \delta^2 = 2\delta^2$, ebenso $m_2^2 = 2\delta^2$. Schnittwinkel: $\cos\omega = 1 - \frac{a^2}{2r^2}$.

*Fehlerhyperbel für $CD$.* $\mu_C$ und $\mu_D$ sind die Halbachsen der mittleren Fehlerellipsen in $C$ bzw. $D$, also $\left(\text{da } \varphi = \frac{\omega}{2} \text{ ist}\right)$:

$$\mu_C^2 = \mu_D^2 = \frac{m_1^2}{2\sin^2\frac{\omega}{2}} = \frac{\delta^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

Wegen $\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2r}$ wird also:

$$\mu_C = \mu_D = \frac{2r}{a}\cdot\delta; \quad CD = s = \sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Wir haben nun zu untersuchen:

1. den Fehler des Mittelpunktes $E$ in der Richtung $AB$, d. h. den

mittleren Abstandsfehler der Geraden $CD$ in ihrem Mittelpunkte $E$; derselbe ist, wie man leicht findet $\left(\text{für } p = \frac{o}{2}\right)$:

$$M = \pm \frac{\mu_C}{\sqrt{2}} = \pm \delta \cdot \frac{r}{a} \sqrt{2},$$

2) den *mittleren Winkelfehler der Senkrechten* $CD$:

$$\sin \Theta = \pm \delta \cdot \frac{r}{a} \sqrt{\frac{8}{4r^2 - a^2}}.$$

*Diskussion.*

1) Aus dem Ausdruck für $M$ folgt:

Der Halbierungspunkt wird am genauesten erhalten, wenn der Radius des Hilfskreises möglichst klein, also nur wenig größer als die halbe Strecke ist.[1])

Das Anwachsen des Fehlers bei größer werdendem $r$ zeigen folgende Werte für $\delta = 0{,}040$ mm

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r = \frac{a}{2}$, | $M = 0{,}028$ mm | $r = \sqrt{2} \cdot a$, | $M = 0{,}080$ mm |
| $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, | $M = 0{,}040$ „ | $r = 2 \cdot a$, | $M = 0{,}113$ „ |
| $r = a$, | $M = 0{,}057$ „ | $r = 3 \cdot a$, | $M = 0{,}170$ „ |

2) Die Formel für $\sin \Theta$ ergibt folgende Regel:

Der rechte Winkel wird um so genauer erhalten, je größer $r$ ist; es gibt aber eine *untere Grenze des Fehlers* (für $r = \infty$), die umgekehrt proportional der Strecke $a$ ist; die erreichbare Genauigkeit ist also nicht beliebig groß.

Die Grenze ist: $\sin \Theta = \pm \frac{\delta}{a} \sqrt{2}$; dies gibt für $\delta = 0{,}040$ mm und

$$a = 1 \text{ mm}, \ 10 \text{ mm}, \ 50 \text{ mm}, \ 100 \text{ mm},$$
$$\Theta^{2)} = 3{,}24^0, \ 0{,}324^0, \ 0{,}065^0, \ 0{,}032^0.$$

Die Fehler sind also bei kleinem $a$ recht erheblich (der Unterschied zwischen Fehlerellipsen und Fehlerovalen macht hierbei nur wenig aus). Da in vielen Fällen ein mittlerer Fehler von $0{,}1^0$ und darüber als unzulässig zu bezeichnen ist, so muß bei kleinen Strecken (etwa unter 30 mm) unbedingt eine Hilfskonstruktion zur Erhöhung der Genauigkeit angewendet werden (vgl. § 7).

1) Dieses wichtige Resultat ist zuerst von Wiener (Darst. Geom. 1, S. 191) gefunden; vgl. G. Müller, S. 29 und Geuer, S. 36.

2) Die Winkel sind nach der 5-stell. Logarithmentafel von Bremiker in *Dezimalteilung des alten Grades* berechnet. — Zu bemerken ist noch, daß $a > \delta\sqrt{2}$, also $> 0{,}07$ mm sein muß.

Von der Abnahme des Winkelfehlers bei wachsendem $r$ gibt folgende Tabelle für $a = 50$ mm eine Vorstellung.

$$r = 30 \text{ mm}, \quad 50 \text{ mm}, \quad 100 \text{ mm}, \quad 200 \text{ mm}, \quad \infty$$
$$\Theta = 0{,}117^0, \quad 0{,}075^0, \quad 0{,}067^0, \quad 0{,}066^0, \quad 0{,}065^0.$$

Das auffälligste Resultat dieser Untersuchung ist, daß man bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten die Wahl hat, *entweder* den Mittelpunkt *oder* den rechten Winkel möglichst genau herzustellen, daß aber beides zugleich nicht möglich ist, weil eine Änderung von $r$ entgegengesetzte Wirkung auf $M$ und $\Theta$ ausübt. Will man trotzdem beides zu vereinigen suchen, so ist zu beachten, daß der Winkelfehler bei Vergrößerung von $r$ nur langsam abnimmt, während der Fehler des Mittelpunkts bald sehr schnell wächst. Es ist daher noch am vorteilhaftesten, einen nicht zu großen Radius zu nehmen. Unter gewöhnlichen Verhältnissen fand ich $r = a$ am geeignetsten.[1])

Übrigens dürfte es in den Anwendungen nur sehr selten vorkommen, daß von einer Mittelsenkrechten zugleich der Mittelpunkt und der rechte Winkel gebraucht werden; denn meistens handelt es sich nur um eine kleine Anzahl von Punkten auf der Mittelsenkrechten; für diese lassen sich die Bedingungen der größten Genauigkeit immer eindeutig feststellen. Außerdem gibt es noch den, wie ich glaube, sehr empfehlenswerten *Ausweg*, zwei Paare von Kreisen um $A$ und $B$ zu schlagen, eines mit kleinem, eines mit möglichst großem Radius, und die Gerade durch vier Schnittpunkte zu legen.

## B. Errichten der Senkrechten in einem gegebenen Punkt einer Geraden.

*1. Lösung.* (Fig. 10.) Kreis mit $r$ um den gegebenen Punkt $C$; Kreise um $A$ und $B$ mit $r'$; Verbindungsgerade $CD$.

Fig. 10.

*Fehleruntersuchung.*

In $C$ Fehlerkreis mit Radius $\delta$. In $A$ und $B$ Fehlerellipsen mit den Bestimmungsstücken (Unsicherheit des Schnittpunkts + subjektiver Fehler von Op. $C_1$):

$$m_1^2 = \delta^2, \quad m_2^2 = 2\delta^2, \quad \omega = 90^0$$

$\sphericalangle DAC$ wird als Hilfswinkel $\varphi$ eingeführt: $\cos\varphi = \frac{r}{r'}$. Für die Fehlerkomponenten in $A$ und $B$ nach $D$ hin ist $\psi = \varphi$, also

$$K^2_{(A,D)} = K^2_{(B,D)} = m_1^2 \sin^2\varphi + m_2^2 \cos^2\varphi = \delta^2(1 + \cos^2\varphi).$$

1) Übereinstimmend mit G. Müller, S. 29, jedoch aus andern Gründen.

Fehlerellipse in $D$: $m_1^2 = m_2^2 = \delta^2(2 + \cos^2\varphi)$; $\omega = 180 - 2\varphi$.

Fehlerhyperbel für $CD$: $\mu_C = \delta$[1]; $\mu_D$ ist die Halbachse der mittleren Fehlerellipse in $D\left(\psi = \frac{\omega}{2}\right)$, also

$$\mu_D^2 = \frac{m_1^2}{2\sin^2\frac{\omega}{2}} = \frac{\delta^2(2+\cos^2\varphi)}{2\cos^2\varphi}.$$

Da $o = CD = r'\sin\varphi$, so ist der gesuchte mittlere Richtungsfehler von $CD$:

$$\sin^2\Theta = \frac{\mu_C^2 + \mu_D^2}{o^2} = \frac{\delta^2(2+3\cos^2\varphi)}{2r'^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi},$$

$$\sin\Theta = \frac{2\delta}{r'\sin 2\varphi}\sqrt{1+1{,}5\cos^2\varphi},$$

oder, in $r$ und $r'$ ausgedrückt

$$\sin\Theta = \frac{\delta}{r}\sqrt{\frac{1+1{,}5\frac{r^2}{r'^2}}{1-\frac{r^2}{r'^2}}},$$

woraus die Abnahme von $\Theta$ bei wachsendem $r'$ und $r$ zu erkennen ist.

Wegen der *Begrenztheit der Konstruktionsparameter $r$ und $r'$* gilt es, dasjenige Verhältnis $r : r'$ oder denjenigen Winkel $\varphi$ zu ermitteln, für den $\Theta$ ein Minimum wird. Man findet durch Differentiation des Ausdrucks $\frac{2+3\cos^2\varphi}{\sin^2 2\varphi}$ die quadratische Gleichung für $\varphi$:

$$\cos^2 2\varphi + \tfrac{14}{3}\cos 2\varphi + 1 = 0,$$

und als deren Lösung $\varphi$ = rund $51{,}5^0$, folglich $r = 0{,}63 \cdot r'$.[2] Nehmen wir der Einfachheit halber $45^0$ als günstigsten Winkel an (Dreieck $ABD$ rechtwinklig-gleichschenklig), so erhalten wir als kleinsten erreichbaren Fehler

$$\sin\Theta = \frac{\delta}{r'}\sqrt{7} = \frac{\delta}{r'}\cdot 2{,}65,$$

also z. B. für $\delta = 0{,}040$ mm und $r' = 200$ mm:

$$\Theta = 0{,}030^0.$$

*2. Lösung.* (Fig. 11.) Kreis um den beliebigen Punkt $O$ mit $OC = r$; die Verbindungsgerade $AO$ gibt den Punkt $B$, der senkrecht über $C$ liegt.

---

1) Wenn der den Punkt $C$ markierende Strich genau senkrecht auf $AB$ steht und einigermaßen lang ist, so wird der Fehler von Op. $R_1$ in $C$ in Wirklichkeit verschwindend klein (die umhüllten Fehlerkreise haben hier eine Diskontinuitätsstelle); wir schließen das natürlich aus.

2) Wiener und G. Müller (S. 82) geben $r = 0{,}5\,r'$ an.

*Fehleruntersuchung.*

Der Radius $OC$ hat den mittleren Fehler $\pm\delta$. Daher ist für Punkt $A$:

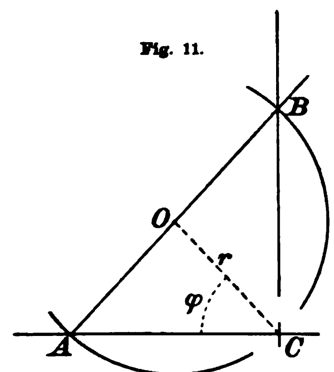


Fig. 11.

$$m_1^2 = 2\delta^2,\quad m_2^2 = \delta^2,\quad \omega = 90 - \varphi,$$

wenn $\sphericalangle\, OCA$ mit $\varphi$ bezeichnet wird. Für Op. $R_1$ in $A$ ist $\psi = 0$, also:

$$K_\psi^2 = \mu_A^2 = \frac{m_1^2 \cos^2\omega + m_2^2}{\sin^2\omega} = \frac{\delta^2(1 + 2\sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi}.$$

Es ist $\mu_O^2 = \delta^2$, folglich ist der Abstandsfehler der Verbindungsgeraden $AO$ in $B$:

$$M_b^2 = \mu_A^2 + 4\mu_O^2 = \delta^2 \frac{3 + 2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Fehlerellipse in $B$ (Fig. 11a):

$$m_1^2 = 2\delta^2,\quad m_2^2 = M_b^2 + \delta^2 = 3\delta^2\frac{1+\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \omega = 90^0.$$

Für Op. $R_1$ in $B$ ist $\psi = 90 - \varphi$, also

$$K_\psi^2 = \mu_b^2 = m_1^2\cos^2\varphi + m_2^2\sin^2\varphi = \delta^2\frac{2 + \sin^2\varphi\,(1 + \cos^2\varphi)}{\cos^2\varphi}.$$

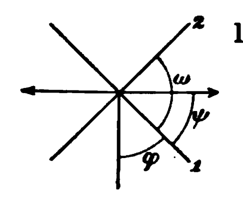


Fig. 11a.

Wegen $\mu_C^2 = \delta^2$ und $BC = 2r\sin\varphi$ wird schließlich der mittlere Winkelfehler von $BC$:

$$\sin^2\Theta = \delta^2\frac{3 + \sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\cdot 4r^2\sin^2\varphi}$$

$$\sin^2\Theta = \frac{\delta}{r\sin 2\varphi}\sqrt{3 + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\varphi}.$$

Das relative Minimum von $\Theta$ inbezug auf $\varphi$ tritt, wie ohne weiteres ersichtlich, für $\varphi = 45^0$ ein, d. h. der Punkt $O$ muß in der Halbierungslinie von $\sphericalangle\, ACB$ gewählt werden, und zwar möglichst entfernt von $C$, weil $\sin\Theta$ umgekehrt proportional zu $r$ ist. Da für $\varphi = 45^0$ $\sin\Theta = 1{,}80\cdot\frac{\delta}{r}$ wird, so ist diese Konstruktion unter sonst gleichen Umständen um etwa 30% genauer als die vorige, und daher immer vorzuziehen. Man erhält für $\delta = 0{,}040$ mm und

$$r = 100\text{ mm},\quad 200\text{ mm},\quad 300\text{ mm}$$
$$\Theta = 0{,}041^0,\quad 0{,}022^0,\quad 0{,}013^0$$

Es ließe sich also mit einem sehr guten Transporteur oder rechten Winkel kaum ein besseres Resultat erzielen; freilich ist hier die Unvollkommenheit der Lineale unberücksichtigt geblieben.

## C. Weitere Konstruktionen von rechten Winkeln.

Zur Entscheidung der Frage, auf welche Weise überhaupt zwei sich rechtwinklig schneidende Geraden am genauesten konstruiert werden können, untersuchte ich noch folgende einfache Konstruktionen.[1])

Fig. 12.

1) Beliebige Gerade $AC$; beliebiger Kreis $O(r)$; Verbindungsgeraden $AO$ und $BC$. (Fig. 12.)

Die Fehlerberechnung ist ganz ähnlich, wie bei der vorigen Konstruktion; man erhält für den Fehler des rechten Winkels

$$\sin\Theta = \frac{\delta}{r\sin 2\varphi}\sqrt{3 - \cos 2\varphi + \tfrac{3}{4}\sin^2 2\varphi},$$

worin $\varphi$ wieder den Winkel $OCA$ bedeutet. Sein günstigster Wert ergibt sich aus der Gleichung

$$\cos^2\varphi - 6\cos 2\varphi + 1 = 0$$

zu rund $40^0$, wofür wir wieder $\frac{1}{2}R$ annehmen können. Dann wird $\sin\Theta = 1{,}94\frac{\delta}{r}$.

1a) Modifikation von 1), indem erst ein beliebiger Kreis $O(r)$ und in ihm ein beliebiger Durchmesser $AB$ gezogen wird. Die Genauigkeitsformel (deren Ableitung an einer Stelle eine besondere Überlegung erfordert) ist die gleiche, wenn die Voraussetzung: $m = \mu$ zutrifft; ist aber etwa $m < \mu$, so ist Konstruktion 1) die genauere, und umgekehrt.

Fig. 13.

2) Kreise $O(r)$ und $O'(r)$ um beliebige Punkte einer Geraden; Verbindungsgerade $AA'$. (Fig. 13.)

Der Unterschied gegen die Konstruktion der Mittelsenkrechten besteht nur in den Fehlerkomponenten von Op. $C_1$ in $O$ und $O'$, die hier nicht $= \delta$, sondern nur $= \delta\sin\varphi$ sind, wenn $\sphericalangle AOO' = \varphi$ gesetzt wird. Man findet als Winkelfehler von $AA'$:

$$\sin\Theta = \frac{\delta}{r\sin 2\varphi}\sqrt{1 + \sin^2\varphi},$$

1) Z. T. nach Lemoine, Géométrographie (Scientia, Nr. 20), S. 19.

oder unter Einführung der Strecke $OO' = a$

$$\sin\Theta = \frac{\delta}{a}\sqrt{\frac{2-\frac{a^2}{4r^2}}{1-\frac{a^2}{4r^2}}}.$$

Der Grenzwert für $r = \infty$ bei festem $a$: $\sin\Theta = \frac{\delta}{a}\sqrt{2}$ ist also genau derselbe wie bei der Mittelsenkrechten. Bei beschränktem $r$ ist der günstigste Wert von $\varphi$ wieder angenähert $45^0$; dafür ist $\sin\Theta = 1{,}22\,\frac{\delta}{r}$.

2a) Noch einfacher für die Fehleruntersuchung ist es, zuerst zwei beliebige Kreise $O(r)$ und $O'(r)$, dann die Verbindungsgeraden $OO'$ und $AA'$ zu ziehen. In denselben Bezeichnungen wie oben ist der mittlere Richtungsfehler von $OO'$: $\sqrt{2}\,\frac{\delta}{a}$, von $AA'$: $\frac{\delta}{r\sin 2\varphi}$, also ist der Fehler des rechten Winkels:

$$\sin\Theta = \delta\sqrt{\frac{1}{r^2\sin^2 2\varphi} + \frac{2}{a^2}}.$$

Für den günstigsten Winkel $\varphi = 45^0$ folgt daraus

$$\sin\Theta = \sqrt{2}\,\frac{\delta}{r} = 1{,}41\cdot\frac{\delta}{r}.$$

Die folgende *Zusammenstellung* der Winkelfehler bei bester Wahl der Konstruktionsparameter (überall $\varphi$ = rund $45^0$)

A. $1{,}41\cdot\frac{\delta}{r}$

B. 1) $2{,}65\cdot\frac{\delta}{r}$, 2) $1{,}80\cdot\frac{\delta}{r}$,

C. 1) und 1a) $1{,}94\,\frac{\delta}{r}$, 2) $1{,}22\,\frac{\delta}{r}$, 2a) $1{,}41\cdot\frac{\delta}{r}$

zeigt nun, daß die *Konstruktion C 2)* im allgemeinen die *genaueste* sein dürfte; ihr mittlerer Fehler beträgt für $\delta = 0{,}040$ mm und $r = 200$ mm nur $\pm\,0{,}014^0$. Ein solcher rechter Winkel könnte also schon zur Kontrolle von Transporteuren und Winkelscheiten benutzt werden.

Das *Fällen einer Senkrechten* von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade möge hier übergangen werden, weil die Fehlerformel dafür ziemlich verwickelt ist.

## D. Antragen eines Winkels.

Wird der gegebene Winkel mit $\alpha$ und der Radius des Hilfskreises mit $r$ bezeichnet, so ist der mittlere Richtungsfehler des angetragenen Schenkels

$$\sin\Theta = \frac{\delta}{r\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{0{,}5 + 5\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Das Versagen dieser Formel für $\alpha = 180^0$ ist eine Folge des Setzens der Kreistangenten für die Bogen. Trotzdem aber werden die Fehler auch schon bei mäßig stumpfen Winkeln so bedeutend, daß man immer besser tut, sich auf das Antragen spitzer Winkel (unter Umständen also der Nebenwinkel) zu beschränken. Folgende Tabelle zeigt dies an einigen Zahlenwerten für $r = 200$ mm.

| $\alpha =$ | $0^0$ | $20^0$ | $40^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $120^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Theta =$ | $0{,}027^0$ | $0{,}027^0$ | $0{,}029^0$ | $0{,}031^0$ | $0{,}040^0$ | $0{,}061^0$. |

Ob sich mit einem *Transporteur* beim Übertragen von Winkeln eine solche Genauigkeit erzielen läßt, ist wohl zweifelhaft. Wenn es sich dagegen um die Ermittlung der numerischen Größe eines Winkels handelt, wozu ja die Ausmessung einer Sehne in einem Kreise mit ebenfalls ausgemessenem Radius dienen kann, so ist, wie eine der obigen ähnliche Rechnung zeigt, der Transporteur etwas im Vorteil (bei $r = 200$ mm).

### E. Halbierung eines Winkels.

Da die Untersuchung dieser Konstruktion etwas schwieriger ist und zu einem bemerkenswerten Resultate führt, so soll die Rechnung einigermaßen ausführlich wiedergegeben werden.

Fig. 14.

Bezeichnungen (Fig. 14): $\sphericalangle CAB = \alpha$; $AB = AC = r$; $BD = CD = r'$; Hilfswinkel $DBE = \varphi$.

Für die Fehlerkomponente in $A$ nach $B$ resp. $C$ ist $\psi = 0$ resp. $= \alpha$; folglich ist

$$K^2_{(A,B)} = K^2_{(A,C)} = \delta^2 \frac{1 + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

In Punkt $B$ ist also

$$m_1^2 = \delta^2, \quad m_2^2 = \delta^2 \cdot \frac{2}{\sin^2\alpha}, \quad \omega = 90^0.$$

Für die Komponente in $B$ nach $D$ (wobei wir natürlich den von $A$ entfernteren Schnittpunkt nehmen) ist $\psi = \varphi$, demnach

$$K^2_{(B,D)} = K^2_{(C,D)} = m_1^2 \sin^2\varphi + m_2^2 \cos^2\varphi$$
$$= \delta^2\left(\sin^2\varphi + \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\right).$$

Ellipse in $D$:

$$m_1^2 = m_2^2 = \delta^2\left(1 - \sin^2\varphi - \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\right)$$

$\omega = 180 - (2\varphi - \alpha)$. Für Op. $B_1$ in $D$ (Verbindungsgerade $AD$) ist

$$\mu_D^2 = \frac{m_2^2}{2\cos^2\frac{\omega}{2}} = \frac{\delta^2\left(1 - \sin^2\varphi - \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\right)}{2\sin^2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ferner: $\mu_A^2 = \dfrac{\delta^2}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\delta^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}$; $\quad \varrho = AD = \dfrac{r\sin\varphi}{\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

Daraus ergibt sich der mittlere Winkelfehler von $AD$:

$$\sin\Theta = \frac{\delta\sqrt{\sin^2\alpha\,(1 - \sin^2\varphi) - 2\cos^2\varphi - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}}{r\sqrt{2}\,\sin\alpha\,\sin\varphi}.$$

Die Bestimmung des *Minimums* durch Differentiation von $\varphi$ führt auf folgende Gleichungen:

$$2\sin^2\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin(2\varphi - \alpha) - \cos\varphi\sin^2\alpha + 2\cos^3\varphi$$
$$- 2\cos\varphi\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi} = \frac{3 - \cos\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

schließlich:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Zahlenwerte:

| $\alpha =$ | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi =$ | 90° | 88,3° | 81,8° | 78,0° | 75,4° | 80,8° | 90°. |

Das Minimum von $\varphi$ liegt bei $\alpha = 116,7°$ und beträgt 75,2°.

Geuer (S. 38) und G. Müller (S. 27) geben, wenigstens für spitze Winkel, als Regel zur möglichst genauen Halbierung an, daß der Radius $r'$ des zweiten Hilfskreises $BD = CD$ nur wenig länger als die Hälfte der Kreissehne $BC$ sein soll. Dementgegen sagt obige Formel und Zahlenreihe aus, daß $r'$ um so größer gegen die Sehne $BC$ zu wählen ist, je größer der zu halbierende Winkel ist; bezeichnen wir $BC$ mit $s$, so können wir folgende, für wirkliche Verwendung vielleicht noch besser geeignete Tabelle aufstellen

$$\alpha = 0^0 \quad r' = 0.50 \cdot s \qquad \alpha = 90^0 \quad r' = 1{,}40 \cdot s$$
$$\alpha = 30^0 \quad r' = 0{,}52 \cdot s \qquad \alpha = 120^0 \quad r' = 1{,}89 \cdot s$$
$$\alpha = 60^0 \quad r' = 0{,}64 \cdot s \qquad \alpha = 150^0 \quad r' = 4{,}95 \cdot s$$
$$\alpha = 180^0 \quad r' = \infty.$$

Wenn wir für $\varphi$ den konstanten Wert $90^0$ annehmen, so erhalten wir noch das merkwürdige Resultat, daß die Genauigkeit der Winkelhalbierenden unabhängig von $\alpha$ wird, nämlich $\sin\Theta = \sqrt{1{,}5}\cdot\frac{\delta}{r} = 1{,}22\cdot\frac{\delta}{r}$; der Fehler ist also verhältnismäßig recht klein.

## F. Konstruktion von Parallelen.

Es gibt in der Hauptsache 4 Lösungen (vgl. Lemoine, Scientia, S. 25). Die in Deutschland üblichste Konstruktion (Fig. 15) beruht auf der *Gleichheit der Wechselwinkel* (oder Gegenwinkel) bei Parallelen; sie gehört zu den verwickeltsten und lohnt schon aus diesem Grunde kaum eine Fehleruntersuchung; ich gebe nur an, daß die beliebige Gerade durch $A$ unter möglichst spitzem Winkel gegen $BC$ gezogen werden muß.

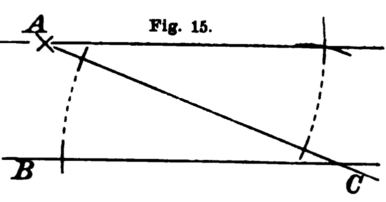


Fig. 15.

Die klassische französische Konstruktion (nach L.), auf der Herstellung eines *Parallelogramms* beruhend, ist etwas einfacher, führt aber zu einer verwickelten Fehlerformel.

*1. geometrographische Konstruktion: Rhombusprinzip.* (Fig. 16.) Ausführung: Kreise $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$; Verbindungsgerade $AD$. Wird der Abstand des Punktes $A$ von der Geraden $BC$ mit $d$ bezeichnet, so ergibt sich für den mittleren Richtungsfehler der Parallelen die höchst einfache Formel (wenn $A$ als Punktkreis gegeben ist):

$$\sin\Theta = \sqrt{6}\cdot\frac{\delta}{d} = 2{,}45\cdot\frac{\delta}{d}.$$

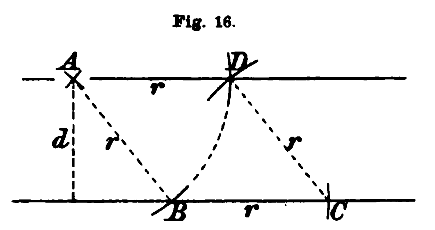


Fig. 16.

Daß der Fehler sich als unabhängig von $r$, außerdem als umgekehrt proportional zu $d$ herausstellt, ist zuerst vielleicht befremdend. Eine aufmerksame Betrachtung der Änderungen der verschiedenen Schnittpunkte usw. zeigt aber auch anschaulich die Richtigkeit dieses Resultats.

*2. geometrographische Konstruktion: Paralleltrapezprinzip.* (Fig. 17.) Ausführung: Kreis um beliebigen Punkt $O$ mit $OA = r$; Kreis um $C$ mit $BA$; Verbindungsgerade $AD$.

Die Behandlung für ganz beliebige Lage von $O$ macht unnötige Schwierigkeiten; man erkennt nämlich leicht, daß bei gleichem $r$ die günstigste Lage von $O$ die sein muß, bei der das Paralleltrapez $ABCD$ ein *Rechteck* wird, was bei der Ausführung durch das Augenmaß genügend verwirklicht werden kann. In diesem Falle (*Rechtecksprinzip*) ist der Winkelfehler von $AD$:

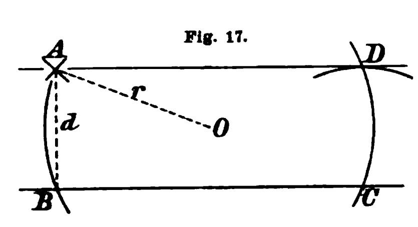


Fig. 17.

$$\sin \Theta = \delta \sqrt{\frac{5}{4r^2 - d^2}}\,.$$

Er nimmt also bei konstantem $d$ unbegrenzt ab mit wachsendem $r$. Eigentümlich ist aber, daß $\Theta$ hier um so größer ist, je größer $d$.

Zahlenwerte für $\delta = 0{,}040$ mm und $r = 200$ mm.

1. geometr. Konstruktion:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $d =$ | 10 mm | 50 mm | 100 mm |
| $\Theta =$ | 0,562° | 0,112° | 0,056° |

2. geometr. Konstruktion

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Theta =$ | 0,013° | 0,013° | 0,014°. |

Die im allgemeinen bedeutend größere Genauigkeit der 2. Konstruktion hat ihren Grund darin, daß bei derselben die Zirkelöffnung nach Möglichkeit ausgenutzt wird. In Anbetracht der Wichtigkeit der Parallelenkonstruktionen und der anscheinend wenig verbreiteten Kenntnis der Lösung 2) hebe ich hiernach als besonders bemerkenswertes Resultat hervor, daß die *Konstruktion nach dem Rechtecksprinzip wegen ihrer Einfachheit und Genauigkeit gewöhnlich allen andern Parallelenkonstruktionen vorzuziehen ist.*

### § 7. Untersuchung einiger anderer Konstruktionen.

#### A. Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seiten.

Böhmer hat auf S. 13—15 seiner Dissertation die Differentialformeln hierfür aufgestellt (es ist dies die einzige Anwendung bei ihm und somit wohl überhaupt *das erste und einzige Beispiel* einer derartigen Untersuchung) und folgendes interessante Resultat gefunden:

Wenn es darauf ankommt, daß der *Spielraum des letzten Punktes möglichst klein* wird, so muß man die Konstruktion mit der *größten Seite beginnen* und die kleinste daran anschließen.

An Stelle des „Spielraums“ nahm ich zur Beurteilung der Genauig-

keit den „*mittleren Fehler*“ nach der Definition von Jordan: $M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2 \omega}$. Ich erhielt so bei der Konstruktionsreihenfolge $c, b, a$ für den mittleren Fehler des Punktes $C$ den Ausdruck:

$$M(c, b, a) = \frac{\delta}{\sin \gamma} \sqrt{5 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta}.$$

Durch Nachrechnung an einem Zahlenbeispiel ($a = 6$, $b = 5$, $c = 4$) fand ich das von Böhmer erhaltene Resultat *bestätigt* und konnte auch noch feststellen, daß sich die Differenz zwischen der besten und schlechtesten Konstruktionsreihenfolge (in obigem Beispiele etwa $1{,}4\delta$) auch in Wirklichkeit sehr wohl *bemerkbar* machen kann.

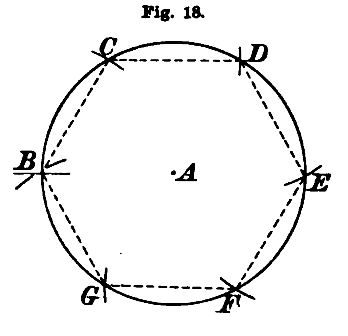
### B. Konstruktion eines regulären Sechsecks.

Wird der Ausgangspunkt $B$ auf der Kreisperipherie durch den Radius $BA$ markiert gedacht (Fig. 18), so sind die Fehlerkomponenten von Op. $C_1$ in den einzelnen Punkten der Reihe nach folgende:

| $\overrightarrow{BC}$ | $\overrightarrow{CD}$ | $\overrightarrow{DE}$ | $\overrightarrow{EF}$ | $\overrightarrow{FG}$ | $\overrightarrow{GB}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pm \delta$ | $\delta\sqrt{3}$ | $\delta\sqrt{5}$ | $\delta\sqrt{7}$ | $\delta\sqrt{9}$ | $\delta\sqrt{11}$. |

Die numerische Größe des *Schließungsfehlers in B* sollte demnach etwa 0,13 mm betragen. Bei einigen Versuchen, die ich anstellte, ergab sich ein so hoher Wert nicht; wahrscheinlich machten sich schon hier, bei Schnittwinkeln von 60°, die Abweichungen der Theorie von der Wirklicheit bemerkbar.

Fig. 18.




Natürlich erhält man die Eckpunkte des Sechsecks viel genauer, wenn man zuerst von $B$ aus die Punkte $C$ und $G$, dann $D$ und $F$, schließlich $E$ konstruiert. Aber auch dann läßt die *gesamte Genauigkeit der Sechseckfigur*, wie ich durch ausführlichere Rechnungen feststellte, noch soviel zu wünschen übrig, daß es durchaus nicht angebracht erscheint, sie zur Grundlage einer *Kreisteilung* zu machen, wie Mascheroni es getan hat. So interessant es daher auch wäre, die Kreisteilung nach den Angaben Mascheronis vollständig auf ihre Fehler bei der wirklichen Ausführung zu untersuchen[1]), so dürfte es doch nicht der Mühe

1) Über die Vierteilung des Kreises nach Mascheroni habe ich noch ermittelt, daß sie, falls dem Zirkel nicht ganz besondere Vorzüge gegenüber dem Lineal einzuräumen sind, bedeutend ungenauer ausfällt, als eine der gewöhnlichen Konstruktionen von rechten Winkeln.

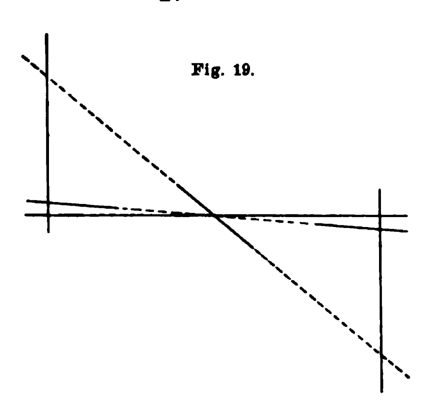
lohnen, weil diese Konstruktionsmethode meines Wissens nur noch ein historisches Interesse besitzt.

Die Fehleruntersuchung *verwickelterer Konstruktionen* beansprucht zu ihrer Darstellung zu viel Raum, als daß ich in dieser Arbeit noch darauf eingehen könnte.[1]) Ich möchte daher zum Schluß nur ein paar Worte über die

### C. Hilfskonstruktionen zur Erhöhung der Genauigkeit

hinzufügen. Der Gedanke an solche Konstruktionen findet sich, wie schon in § 1 erwähnt, wohl zuerst bei Mascheroni. G. Müller weist an verschiedenen Stellen darauf hin; Witting hat sich l. c. S. VII etwas eingehender mit ihnen beschäftigt.[2])

Bei der Behandlung der *Mittelsenkrechten* wurde schon darauf aufmerksam gemacht, daß man die Strecke $AB$ zur Vermeidung zu großer Winkelfehler künstlich vergrößern kann, in welcher Weise, braucht wohl nicht weiter auseinandergesetzt zu werden. Auch das *Halbieren sehr stumpfer Winkel* läßt sich dadurch umgehen, daß man von dem zu großen Kreisbogen auf beiden Seiten gleiche Stücke abschneidet. Daß in diesen beiden Fällen der gewünschte Erfolg wirklich erzielt wird, ist unzweifelhaft, wenn auch die Untersuchung über die Größe der Verbesserung und die beste Wahl der Hilfsgrößen etwas schwierig ist.


Fig. 19.

Strittiger dagegen ist der Erfolg der bekannten *Konstruktion zur Verbesserung eines sehr spitzwinkligen Schnittpunktes* (Fig. 19): man schneidet die beiden Geraden durch zwei Parallelen in geeigneter Lage, trägt die ausgeschnittenen Strecken $n$mal weiter und verbindet die Endpunkte durch eine Gerade. Nach Witting sollte es *unmöglich* sein, auf diese Weise eine *Verbesserung des Schnittpunktes* zu erreichen. Durch eine ausführliche Untersuchung der Fehler bei dieser Konstruktion habe ich aber gefunden, daß dies doch immer *möglich* ist, meistens sogar

1) Ich habe die nötigen Rechnungen bereits für verschiedene Beispiele durchgeführt, z. B. für *2 Konstruktionen des goldenen Schnittes* und für *2 Näherungskonstruktionen für $\pi$*.

2) Dabei möchte ich erwähnen, daß mir die von Witting angegebene *Konstruktion zur Halbierung sehr kleiner Winkel* beachtenswert scheint, und daß die von ihm selbst dagegen erhobenen Einwände größtenteils nichtig sind.

schon durch eine ganz *kleine Wiederholungszahl n* des Weitertragens der Strecke. Ich will aber hierauf nicht näher eingehen, weil die Untersuchung ziemlich umständlich ist; außerdem ist auch noch zu bedenken, daß gerade bei dieser Frage (sehr spitze Schnittwinkel) die *mutmaßlichen Abweichungen unserer Theorie* von der Erfahrung stark ins Gewicht fallen werden, sodaß eine *endgültige Entscheidung* hierüber doch noch nicht möglich ist.

Königsberg, im März 1905.

---

# Über die Kurzschlußstromkurve eines Gleichstromankers.

Von Gustav Mie in Greifswald.

In seiner kürzlich erschienenen Kieler Dissertation[1]) macht Herr P. Riebesell eine vor einigen Jahren von E. Arnold und mir veröffentlichte Untersuchung[2]) zum Gegenstande seiner Kritik. Obwohl es jedesmal höchst erfreulich ist, wenn ein durchgebildeter Mathematiker sich mit den oft so interessanten technischen Problemen befaßt, so glaube ich doch, daß jeder, der diese Arbeit mit Aufmerksamkeit liest, nicht viel von dieser Freude empfinden wird. Leider ist Herr Riebesell über die Elemente der Funktionenlehre noch so im Unklaren, daß man nicht viel von seiner Arbeit erhoffen kann. Nun ist aber seine Schrift als Doktordissertation angenommen, und dies nötigt uns, seine Trugschlüsse mit einigen Worten aufzudecken, damit nicht diese scheinbare Billigung seiner Irrtümer von berufener Seite Zweifel an der Richtigkeit unserer Resultate erwecken möge. Ich erlaube mir deswegen, zugleich auch im Namen von Herrn Professor E. Arnold, zu zeigen, auf welchen falschen Voraussetzungen Herr Riebesell seine Schlüsse aufbaut. Zugleich möchte ich diese Gelegenheit benützen, um einige Überlegungen und Rechnungen hinzuzufügen, die unsere eben zitierte Arbeit vielleicht noch etwas ergänzen.

1. Es handelt sich um die Integration der Differentialgleichung, welche für den Fall gilt, daß die Bürstenbreite gleich oder kleiner ist als eine Lamellenbreite:

$$\begin{aligned}(1)\qquad & \frac{di}{dx} + i \cdot \tau' + i \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) + I \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \\ & + E \cdot \frac{T}{L} + H \cdot \frac{T^2}{L} \cdot x = 0\end{aligned}$$

1) P. Riebesell, Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. Kiel, 1905.

2) Elektrotechnische Zeitschrift, 1899, S. 97.

Hier bedeutet $i$ die Stromstärke in der kurzgeschlossenen Spule, $x = \frac{t}{T}$ die Zeit vom Beginn des Kurzschlusses an, wobei die Dauer des Kurzschlusses $T$ als Zeiteinheit genommen ist. Alle andern Größen sind Konstanten: $I$ die Stromstärke eines Armaturzweiges, $L$ die Selbstinduktion der Spule, $\tau' = R \cdot T/L$ und $\tau = R_1 \cdot T/L$, wo $R$, $R_1$ die Widerstände der Spule und der Übergangsschicht Bürste-Kommutator[1]) bedeuten. Endlich soll $e = E + H \cdot t$ die bei der Drehung des Ankers durch das Magnetfeld in der Spule induzierte Spannung sein, die wir in erster Näherung als lineare Funktion der Zeit ansehen.

Es ist klar, daß das Integral der Gleichung (1) nur in drei Punkten der $x$-Ebene singuläre Stellen haben kann: in $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. Nun läßt sich zeigen, daß die Anfangsbedingung des Problems $x = 0$, $i = I$ nur für eine Lösung bestehen kann, die um $x = 0$ herum in eine Potenzreihe entwickelbar ist, die also hier keine Singularität hat. Das erkennt auch Herr Riebesell an. Es bleiben demnach nur noch $x = 0$, $x = \infty$. Wir behaupten nun, daß (abgesehen von einem Spezialfall) der Punkt $x = 1$ ein singulärer Punkt sei. In seiner Umgebung läßt sich dann das Verhalten der Funktion $i$ nur durch einen Ausdruck von der Form:

$$i = \mathfrak{P}(y) + C \cdot \frac{y^\tau}{(1-y)^\tau} \cdot e^{\tau' y} \tag{2}$$

wiedergeben, wo $y = (1 - x)$, $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe, $C$ eine, im allgemeinen von Null verschiedene, Konstante bedeuten. Wenn $\tau$ eine ganze Zahl ist ($\tau = m$), so ist der Ausdruck (2) etwas zu modifizieren; es tritt dann an die Stelle der durch $y^\tau$ charakterisierten Singularität eine logarithmische: $y^m \cdot \ln y$.

**2.** Da ist nun Herr Riebesell anderer Meinung. Er behauptet: $C$ müsse unter allen Umständen gleich Null sein; mit anderen Worten: $i$ müsse auch um $x = 1$ in eine Potenzreihe zu entwickeln sein. Nach Herrn Riebesell wäre demnach die einzige Singularität der Funktion $x = \infty$, sie hätte dann den Charakter einer ganzen Funktion. Die einzige Stelle, wo Herr Riebesell diese Behauptung, mit der er alle unsere weiteren Schlüsse umstoßen will, begründet, habe ich nach langem Suchen auf Seite 34 gefunden. Die Begründung ist ungefähr diese: „*In der Nähe des Punktes $x = 0$ gilt das holomorphe Integral. Also muß auch in der Umgebung des Punktes $x = 1$ das holomorphe*

1) Dieser Widerstand $R_1$ wird in unserer Theorie zunächst als konstant betrachtet. Über das Unzutreffende dieser Annahme siehe: E. Arnold. Die Gleichstrommaschine Bd. I. S. 364.

*Integral genommen werden, d. h. $C = 0$*".[1]) Herr Riebesell nimmt hier offenbar einen Satz an, der allerdings die ganze Mathematik wunderbar vereinfachen würde, und der wohl ungefähr so lauten müßte: „Wenn eine Funktion um irgend *einen* Punkt der Ebene als Potenzreihe zu entwickeln ist, so ist sie es auch um jeden anderen." Darum stört es ihn denn auch nicht weiter, daß die Potenzreihe $\mathfrak{P}(y)$, die ja eine *ganze* transzendente Funktion darstellen müßte, im Punkte $y = 1$ (d. h. $x = 0$) divergiert. Er bemerkt dazu auf S. 19 ganz kurz: „*Es erscheint für diese Entwickelung $y = 1$, d. h. $x = 0$, $i = I$ als singulärer Punkt*". Ich glaube, daß nach diesen Proben niemand mein im Anfang ausgesprochenes Urteil über die Riebesellsche Arbeit zu scharf finden wird.

**3.** Man kann das Integral der Gleichung (1), das der Bedingung $x = 0$, $i = I$ genügt, auch durch eine Quadratur ausdrücken. Es ist nämlich:

$$(3) \qquad i = e^{-\tau' x} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\tau} \cdot \int_0^x e^{\tau' x} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\tau} \cdot \left\{ I\tau \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) - E \cdot \frac{T}{L} - H \cdot \frac{T^2}{L} \cdot x \right\} \cdot dx.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen läßt sich in einen Faktor $x^{\tau-1}$ und in einen nach positiven, ganzen Potenzen entwickelbaren Faktor zerlegen. Die Ausführung der Quadratur liefert also eine Potenzreihe, multipliziert mit $x^{\tau}$, es ergibt sich somit für $i$ eine Potenzreihe. Wenn man in (3) statt $x$ die Variable $y = 1 - x$ einführt, so bekommt der Ausdruck die Form:

$$(4) \qquad i = e^{\tau' y} \cdot \left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau} \cdot \int_y^1 e^{-\tau' y} \cdot \left(\frac{1-y}{y}\right)^{\tau} \cdot \left\{ I \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y}\right) - E \cdot \frac{T}{L} - H \cdot \frac{T^2}{L} \cdot (1-y) \right\} dy.$$

Herr Riebesell behauptet ohne Beweis, daß die Ausführung der Quadratur auch in diesem Falle ganz analog, wie in (3) zu einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(y)$ führe. Sicher beruht diese Behauptung auf irgend einem Trugschluß, denn sie ist zweifellos falsch.

---

1) Wortwörtlich heißt es auf S. 34 so: „Ist $a$ negativ, so existiert nur das holomorphe Integral. Dies trifft für die Gleichung (28) zu. Also muß auch im Falle 1) das holomorphe Integral genommen werden, d. h. $C''$ bezw. $C^* = 0$." Gl. (28) ist unsere Differentialgleichung (1), aus dem Zusammenhang geht klar hervor, daß unter dem holomorphen Integral die Potenzreihe um $x = 0$ herum zu verstehen ist. Der „Fall 1)" ist die Entwickelung der Funktion um den Punkt $x = 0$ herum. Unsere Konstante $C$ bezeichnet Herr Riebesell mit $C^*$.

4. Einen einfachen Beweis dafür, daß in der Tat $i$ durch den Ausdruck (3) wiedergegeben werden müsse, gibt Professor Arnold in seinem Werk „Die Gleichstrommaschine“. Er geht ungefähr so: Das allgemeine Integral der Gleichung (1) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$i = e^{-\tau' x} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\tau}$$

$$\cdot \left[\int_0^x e^{\tau' x} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\tau} \cdot \left\{ I\tau \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) - E \cdot \frac{T}{L} - H \cdot \frac{T^2}{L} \cdot x \right\} dx + c \right],$$

wo $c$ eine willkürliche Konstante sein soll. Durch Herübermultiplizieren bekommt man:

$$i \cdot e^{\tau' x} \cdot \frac{x^{\tau}}{(1-x)^{\tau}} = \int_0^x \cdots \quad + c.$$

Läßt man nun $x$ gegen Null konvergieren, so wird die linke Seite Null, ebenso das bestimmte Integral. Daraus folgt $c = 0$. Dieser einfache Schluß ist Herrn Riebesell so unverständlich, daß er ihn meint mit der kurzen Bemerkung abtun zu können: „Das Unzulässige dieser Bestimmung ist ersichtlich.“ Er vermutet, einen „ähnlichen Fehler“ hätten wir auch bei der Berechnung der in Formel (2) vorkommenden Konstanten $C$ gemacht. Soweit ich seine, an dieser Stelle sehr verworrenen, Auseinandersetzungen verstehen kann, traut er uns aber allerdings einen wirklich erstaunlichen Fehler zu. Wir sollen nämlich eine Größe:

$$\lim_{y=0} \left[ \mathfrak{P}(y) \cdot e^{-\tau' y} \cdot \left(\frac{1-y}{y}\right)^{\tau} \right]$$

(wo $\mathfrak{P}(y)$ die in (2) angeführte Potenzreihe ist), als Null gerechnet haben, während sie in Wirklichkeit unendlich wird ($\mathfrak{P}(0)$ ist von Null verschieden). Daß Herr Riebesell so etwas für möglich hält, kann ich mir nur dadurch erklären, daß er selber in mathematischen Schlüssen äußerst unsicher ist, und daher offenbar ein solches Versehen für nichts Ungewöhnliches hält. Zum Beispiel sagt er gerade an der Stelle, wo er unseren vermeintlichen Fehler bespricht (Seite 25), in *einem* Atemzuge, daß das Integral:

$$\int_x^1 e^{\tau' x} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\tau} \cdot \left\{ I\tau \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) - E \cdot \frac{T}{L} - H \cdot \frac{T^2}{L} \cdot x \right\} dx$$

„natürlich“ divergent sei, *und*, daß dasselbe Integral mit den Grenzen 0 bis 1 einen bestimmten endlichen Wert $C^*$ habe, den er ausrechnet, und der dann mit unserer Konstanten $C$ übereinstimmt.

**5.** Die Potenzreihe für $i$ um den Punkt $x = 0$ herum konvergiert (was übrigens auch Herr Riebesell weiß) im allgemeinen nur bis $x = 1$. Daraus folgt ohne weiteres, daß auf dem Einheitskreise ein singulärer Punkt liegt. Dieser Punkt muß, wie aus der Form der Differentialgleichung (1) zu ersehen ist, $x = 1$ sein. Es ist also eigentlich selbstverständlich, daß in der Formel (2) die Konstante $C$ im allgemeinen nicht Null ist, wie Herr Riebesell im Gegensatz zu uns festzustellen wähnt.[1])

Das einzige, was etwas umständlicher ist, ist: den Wert von $C$ zahlenmäßig festzustellen. Indem ich nun dazu übergehe, die Reihenentwickelungen für $i$ und für $C$ zu berechnen, bringe ich zunächst die Gleichung (1) auf eine bequemere Form.

Setzt man nämlich:

$$(5)\qquad i = I\cdot(1-2x) + i_1,$$

so bedeutet $i_1$ die Abweichung der Kurschlußstromkurve von dem geradlinigen Verlauf (Fig. 1) und genügt der Differentialgleichung:

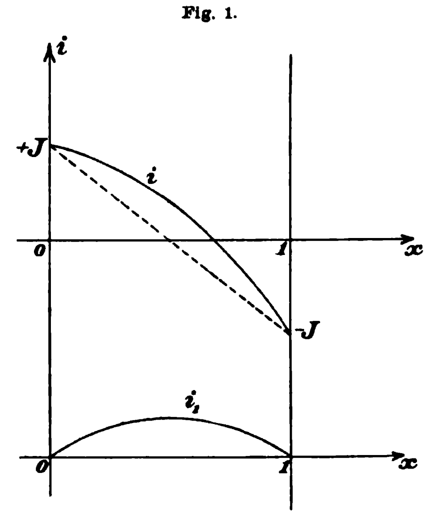
$$\frac{di_1}{dx} + i_1\cdot\left(\tau' + \frac{\tau}{x\cdot(1-x)}\right) + E' + H'\cdot x = 0$$

wo:

$$E' = E\cdot\frac{T}{L} - I\cdot(2-\tau')$$

$$H' = H\cdot\frac{T^2}{L} - 2I\cdot\tau'.$$

Fig. 1.




Wir können diese Gleichung noch etwas symmetrischer folgendermaßen schreiben:

$$(6)\qquad \frac{di_1}{dx} + i_1\cdot\left(\tau' + \frac{\tau}{x\cdot(1-x)}\right) - a\cdot x - b\cdot(1-x) = 0.$$

$$(7)\qquad \begin{cases} a = I\cdot(2+\tau') - \frac{T}{L}\cdot(E + HT) \\ b = I\cdot(2-\tau') - \frac{T}{L}\cdot E. \end{cases}$$

Diese beiden Koeffizienten $a$ und $b$ haben eine sehr einfache Bedeutung, *wenn* $\frac{di_1}{dx}$ *sowohl für* $x = 0$, *wie für* $x = 1$ *endlich bleibt.* Als-

1) Vgl. E. Arnold, Die Gleichstrommaschine. S. 284.

dann ist nämlich, wie aus (6) durch Grenzübergang folgt, wenn man beachtet, daß $(i_1)_{x=0} = 0$ und $(i_1)_{x=1} = 0$:

$$(8) \qquad \left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{b}{1+\tau}, \quad \left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=1} = \frac{a}{1-\tau}.$$

Wir wollen nun die folgenden drei Differentialgleichungen betrachten:

$$(9) \qquad \begin{cases} \frac{dz}{dx} + z\cdot\left(\tau' + \frac{\tau}{x\cdot(1-x)}\right) - 1 = 0 \\ \frac{dz}{dx} + z\cdot\left(\tau' + \frac{\tau}{x\cdot(1-x)}\right) - x = 0 \\ \frac{dz}{dx} + z\cdot\left(\tau' + \frac{\tau}{x\cdot(1-x)}\right) - (1-x) = 0. \end{cases}$$

Die 3 Integrale dieser Gleichungen, die um den Punkt $x = 0$ herum in eine Potenzreihe entwickelbar sind, wollen wir bezeichnen mit:

$$\varphi_{00}(\tau, \tau', x), \quad \varphi_{10}(\tau, \tau', x), \quad \varphi_{01}(\tau, \tau', x).$$

Es ist alsdann:

$$(10) \qquad i_1 = a\cdot\varphi_{10}(\tau, \tau', x) + b\cdot\varphi_{01}(\tau, \tau', x).$$

Aus (8) folgt, daß $a = 0$, $b = 0$ gleichbedeutend ist mit:

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{di}{dx}\right)_{x=1} = -2I.$$

*Demnach ist die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die Kurzschlußstromkurve nirgends von einer Geraden abweicht, die: daß sowohl im Anfang als auch am Ende der Stromkurve der Differentialquotient* $\frac{di}{dx}$ *den Wert* $-2I$ *hat.*

Für das Magnetfeld, in dem dies gerade eintritt, ergeben sich aus (7) die beiden Bedingungen:

$$(11) \qquad E\cdot\frac{T}{L} = I\cdot(2-\tau'), \quad (E + H\cdot T)\cdot\frac{T}{L} = I\cdot(2+\tau').$$

Für die Lösungen der Gleichungen (9) haben wir ferner die folgende Beziehung:

$$(12) \qquad \varphi_{00}(\tau, \tau', x) = \varphi_{10}(\tau, \tau', x) + \varphi_{01}(\tau, \tau', x).$$

Setzt man in der dritten Gleichung:

$$z = z'\cdot\frac{1-x}{x}$$

so ergibt eine einfache Rechnung für $z'$ die Gleichung:

$$\frac{dz'}{dx} + z'\cdot\left(\tau' + \frac{\tau - 1}{x\cdot(1-x)}\right) - x = 0.$$

Daraus folgt die Beziehung:

$$\varphi_{01}(\tau, \tau', x) = \frac{1-x}{x} \cdot \varphi_{10}(\tau - 1, \tau', x). \tag{13}$$

Damit ist das ganze Problem auf die Berechnung der Funktion $\varphi_{10}$ reduziert.

Wenn wir in den Differentialgleichungen (9) statt $x$ die Variable $y = (1 - x)$ einführen, so bekommen wir:

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{dz}{dy} - z \cdot \left(\tau' + \frac{\tau}{y \cdot (1-y)}\right) + 1 = 0 \\ \frac{dz}{dy} - z \cdot \left(\tau' + \frac{\tau}{y \cdot (1-y)}\right) + (1 - y) - 0. \\ \frac{dz}{dy} - z \cdot \left(\tau' + \frac{\tau}{y \cdot (1-y)}\right) + y = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi_{00}(\tau, \tau', x) = K_{00}(\tau, \tau') \cdot \frac{y^\tau}{(1-y)^\tau} \cdot e^{\tau' y} - \varphi_{00}(-\tau, -\tau', y) \\ \varphi_{10}(\tau, \tau', x) = K_{10}(\tau, \tau') \cdot \frac{y^\tau}{(1-y)^\tau} \cdot e^{\tau' y} - \varphi_{01}(-\tau, -\tau', y) \\ \varphi_{01}(\tau, \tau', x) = K_{01}(\tau, \tau') \cdot \frac{y^\tau}{(1-y)^\tau} \cdot e^{\tau' y} - \varphi_{10}(-\tau, -\tau', y), \end{cases}$$

wo die $K$ Konstanten sind, die wir noch bestimmen müssen. Die Ausdrücke (15) rechts stellen die Entwickelungen der Funktionen um den Punkt $x = 1$ dar. Wir können gleich eine Reihe von Beziehungen für die $K$ aufstellen. Zunächst folgt aus (12) und (13) ohne weiteres:

$$K_{00}(\tau, \tau') = K_{10}(\tau, \tau') + K_{01}(\tau, \tau') \tag{16}$$

$$K_{01}(\tau, \tau') = K_{10}(\tau - 1, \tau'). \tag{17}$$

Wenn wir ferner nach (15) für die $\varphi(y)$ die Entwickelungen um $y = 1$ berechnen und diese in (15) einsetzen, so hebt sich auf beiden Seiten die Potenzreihe $\varphi(x)$ weg und wir bekommen:

$$(18)\quad \begin{cases} K_{00}(-\tau, -\tau') = e^{\tau'} \cdot K_{00}(\tau, \tau') \\ K_{01}(-\tau, -\tau') = e^{\tau'} \cdot K_{10}(\tau, \tau') \\ K_{10}(-\tau, -\tau') = e^{\tau'} \cdot K_{01}(\tau, \tau'). \end{cases}$$

**6.** Wir wollen uns zunächst einmal mit der Reihenentwickelung in der Umgebung von $x = 0$ beschäftigen. In der oben zitierten Arbeit sind sehr bequeme Rekursionsformeln zur Berechnung der Koeffizienten gegeben (Formel (18)). Wir können aber auch explizite Aus-

drücke gewinnen, wenn wir die Darstellung durch das bestimmte Integral zugrunde legen. Es ist nämlich:

$$(19) \qquad \varphi_{10}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot \frac{(1-x)^\tau}{x^\tau} \cdot \int_0^x e^{\tau' x} \cdot \frac{x^{\tau+1}}{(1-x)^\tau} \cdot dx.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen läßt sich leicht in eine Reihe entwickeln:

$$e^{\tau' x} \cdot \frac{x^{\tau+1}}{(1-x)^\tau} = x^{\tau+1} \cdot \sum_0^\infty {}_\nu\, x^\nu \cdot \sum_0^\nu {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + \nu - n - 1)_{\nu - n}$$

$$(20) \quad \varphi_{10}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot (1-x)^\tau \sum_2^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{\tau + \nu} \cdot \sum_0^{\nu-2} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + \nu - n - 3)_{\nu - n - 2}$$

Ebenso ist:

$$\varphi_{01}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot (1-x)^\tau \cdot \sum_1^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{(\tau+\nu)} \cdot \sum_0^{\nu-1} {}_n (\tau + \nu - n - 3)_{\nu - n - 1}$$

$$\varphi_{00}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot (1-x)^\tau \cdot \sum_1^\tau {}_\nu \frac{x^\nu}{(\tau+\nu)} \cdot \sum_0^{\nu-1} {}_n (\tau + \nu - n - 2)_{\nu - n - 1}.$$

Wir können auch noch $(1-x)^\tau$ in eine Reihe entwickeln und ausmultiplizieren. So ergibt sich:

$$\varphi_{10}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot \sum_2^\infty {}_\nu\, x^\nu \sum_0^{\nu-2} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \sum_0^{\nu-n-2} {}_\mu (-1)^\mu \cdot \frac{(\tau)_\mu \cdot (\tau + \nu - n - 3 - \mu)_{\nu - n - 2 - \mu}}{\tau + \nu - \mu}.$$

Nun läßt sich der Faktor von $\frac{x^\nu \cdot \tau'^n}{n!}$ mit Hilfe der bekannten Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten noch etwas einfacher ausdrücken. Man bekommt nämlich, wenn $m > 0$:

$$\sum_0^m {}_\mu (-1)^\mu \cdot \frac{(\tau)_\mu \cdot (\tau + m - \mu - 1)_{m-\mu}}{\tau + \nu - \mu} = - \frac{(\tau + \nu - m - 1)_{\nu - m}}{\nu \cdot (\tau + \nu)_\nu}$$

$$= - \frac{\tau}{(\tau + \nu)(\tau + \nu - 1)} \cdot \frac{(\nu)_{m-1}}{(\tau + \nu - 2)_{m-1}}.$$

Ist aber $m = 0$, so ist die entsprechende Größe, wie man ohne weiteres sieht:

$$+ \frac{1}{\tau + \nu} = + \frac{(\tau + \nu - 1)_{\nu - 1}}{\nu \cdot (\tau + \nu)_\nu}.$$

Setzen wir nun für $m$ den Wert $\nu - n - 2$ ein, so bekommen wir für die gesuchte Reihe:

$$
(21)\quad \begin{cases} \varphi_{10}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot \sum\limits_2^\infty \frac{x^\nu}{\nu \cdot (\tau + \nu)_\nu} \\ \cdot \left\{ \frac{\tau'^{\nu-2}}{(\nu-2)!} (\tau + \nu - 1)_{\nu-1} - \sum\limits_0^{\nu-3} \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + n + 1)_{n+2} \right\}. \end{cases}
$$

Ebenso ergibt sich:

$$
(22)\quad \begin{aligned} \varphi_{01}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot \sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu \cdot (\tau + \nu)_\nu} \cdot \Bigg\{ \frac{\tau'^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \cdot (\tau + \nu - 1)_{\nu-1} \\ - \frac{\tau'^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \cdot ((\tau+\nu-1)_{\nu-1} + (\tau+\nu-2)_{\nu-1}) + \sum_0^{\nu-3} \frac{\tau'^n}{n!} (\tau+n)_{n+2} \Bigg\} \end{aligned}
$$

$$
(23)\quad \begin{aligned} \varphi_{00}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \cdot \sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu \cdot (\tau + \nu)_\nu} \\ \cdot \left\{ \frac{\tau'^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \cdot (\tau + \nu - 1)_{\nu-1} - \sum_0^{\nu-2} \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + n)_{n+1} \right\}. \end{aligned}
$$

7. Um die Entwicklung unserer Funktionen um den Punkt $x = 1$ zu haben, müßten wir in den Formeln (15) nur noch die Größen $K_{00}$, $K_{10}$, $K_{01}$, als Funktionen von $\tau$ und $\tau'$ kennen.

Wir wollen sie zunächst in dem Bereich $0 < \tau < 1$ suchen. Da $\varphi_{00}$, $\varphi_{10}$, $\varphi_{01}$ Potenzreihen sind, die mit der ersten oder zweiten Potenz beginnen, so ist in allen drei Fällen:

$$
\lim_{y=0} \left\{ \frac{\varphi(-\tau, -\tau', y)}{y^\tau} \right\} = 0, \quad \text{solange } \tau < 1.
$$

Daraus folgt:

$$
K(\tau, \tau') = \lim_{x=1} \left\{ \frac{\varphi(\tau, \tau', x)}{(1-x)^\tau} \right\}.
$$

Wir bekommen also aus (20):

$$
K_{10}(\tau, \tau') = e^{-\tau'} \cdot \left\{ \sum_2^\infty \frac{x^\nu}{\tau + \nu} \cdot \sum_0^{\nu-2} \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + \nu - n - 3)_{\nu-n-2} \right\}_{x=1}.
$$

Wir wollen den Ausdruck in der geschweiften Klammer, der eine Summe von lauter positiven Gliedern ist, nach Potenzen von $\tau'$ umordnen. Wir bekommen so:

$$
\begin{aligned} \sum_0^\infty \frac{\tau'^n}{n!} \cdot x^{n+2} \cdot \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\tau + n + \nu + 2} \cdot (\tau + \nu - 1)_\nu \\ - \sum_0^\infty \frac{\tau'^n}{n!} \cdot \frac{x^{n+2}}{\tau + n + 2} \cdot F(\tau, \tau + n + 2, \tau + n + 3, x), \end{aligned}
$$

wo $F$ eine hypergeometrische Funktion bedeutet. Da nun für alle diese hypergeometrischen Funktionen:

$$a + b - c = \tau - 1 < 0,$$

so haben alle für $x = 1$ einen endlichen Wert, und zwar ist er für das $n^{\text{te}}$ Glied:

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \cdot \Gamma(c - b)}$$

$$= \frac{\Gamma(\tau + n + 3) \cdot \Gamma(1 - \tau)}{\Gamma(n + 3) \cdot \Gamma(1)} = \frac{(\tau + n + 2)(\tau + n + 1) \ldots \tau}{1 \cdot 2 \ldots (n + 2)} \cdot \Gamma(\tau) \cdot \Gamma(1 - \tau)$$

$$= (\tau + n + 2) \cdot (\tau + n + 1)_{n+2} \cdot \frac{\pi}{\sin \tau \pi} \cdot$$

Setzen wir dies ein, so bekommen wir:

$$K_{10}(\tau, \tau') = \frac{\pi}{\sin \pi \tau} \cdot e^{-\tau'} \cdot \sum_{0}^{\infty} n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + n + 1)_{n+2}. \tag{24}$$

Diese Formel ist zunächst nur für die Werte $0 < \tau < 1$ als richtig erwiesen. Wir müssen nun die analytische Fortsetzung außerhalb dieses Bereiches suchen. Diese ist aber ohne weiteres ebenfalls schon durch (24) gegeben. Denn die rechte Seite von (24) stellt den Quotienten einer ganzen transzendenten Funktion von $\tau$ und $\tau'$ durch $\sin \pi \tau$ dar. Die einzigen Singularitäten von $K_{10}(\tau, \tau')$ im Endlichen sind also da, wo $\tau$ eine positive oder negative ganze Zahl (einschließlich der Null) ist.

Nach (16) und (17) ergibt sich nun sofort:

$$K_{01}(\tau, \tau') = -\frac{\pi}{\sin \pi \tau} \cdot e^{-\tau'} \cdot \sum_{0}^{\infty} n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + n)_{n+2}. \tag{25}$$

$$K_{00}(\tau, \tau') = \frac{\pi}{\sin \tau \pi} \cdot e^{-\tau'} \cdot \sum_{0}^{\infty} n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + n)_{n+1}. \tag{26}$$

Vergleicht man diese Werte von $K_{00}$ und $K_{10}$ mit den in der zitierten Arbeit $k_1$ und $k_2$ benannten Zahlen, die mit ihnen identisch sein müssen, so findet man in der Tat völlige Übereinstimmung.

Wenn man die Beziehungen (18) benutzt, so bekommt man aus (24), (25), (26) die folgenden, manchmal etwas bequemeren Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} K_{00}(\tau, \tau') &= \frac{\pi}{\sin \pi \tau} \cdot \sum_{0}^{\infty} n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau)_{n+1} \\ K_{10}(\tau, \tau') &= \frac{\pi}{\sin \pi \tau} \cdot \sum_{0}^{\infty} n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + 1)_{n+2} \\ K_{01}(\tau, \tau') &= -\frac{\pi}{\sin \pi \tau} \cdot \sum_{0}^{\infty} n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau)_{n+2}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

8. Wir haben nun die Entwicklung unserer drei Funktionen $\varphi$ um den Punkt $x = 1$ herum nach Formel (15) vollständig gefunden, wenn $\tau$ keine ganze Zahl ist. Ist aber $\tau = m$ eine ganze Zahl, so werden sowohl die Größen $K$ unendlich groß, als auch gewisse Koeffizienten in den in Formel (15) vorkommenden Potenzreihen. Man erkennt dies letztere am leichtesten an Formel (20). Setzt man hier für $\tau$ den Wert $-m$ ein, so sieht man sofort, daß der Nenner des Gliedes mit $x^m$ Null wird. Alle andern Glieder bleiben endlich. Wollen wir die Entwicklung um $x = 1$ für ein ganzzahliges $\tau$ finden, so müssen wir zunächst $\tau = m + \varepsilon$ setzen, wo $\varepsilon$ eine sehr kleine Größe bedeutet, und nun die Summe der Glieder, die für $\varepsilon = 0$ unendlich werden, untersuchen. Wir bekommen so in dem Falle:

$$\varphi_{10}(\tau, \tau', x) = K_{10}(\tau, \tau') \cdot \frac{y^\tau}{(1-y)^\tau} \cdot e^{\tau' y} - \varphi_{01}(-\tau, -\tau', y)$$

die beiden Glieder:

$$\frac{\pi \cdot (-1)^m}{\sin \pi \varepsilon} \cdot e^{\tau' y} \cdot (1-y)^{-\tau} \cdot y^{m+\varepsilon} \cdot \sum_0^\infty {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m + \varepsilon + 1)_{n+2}$$

$$- e^{\tau' y} \cdot (1-y)^{-\tau} (-1)^m \frac{y^m}{\varepsilon} \cdot \sum_0^{m-1} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m + \varepsilon + 1)_{m-n-1}.$$

Wenn wir diese beiden Summanden nach Potenzen von $\varepsilon$ entwickeln und gleich nur die beiden ersten Glieder stehen lassen, gegen die alle Glieder höherer Ordnung später doch wegfallen werden, so bekommen wir:

$$(-1)^m \cdot e^{\tau' y} \cdot (1-y)^{-\tau} \cdot y^m \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left\{ (1 + \varepsilon \cdot \ln y) \cdot \sum_0^{m-1} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} (m+1)_{n+2} (1 + \varepsilon \cdot \sigma_{m+1} - \varepsilon \sigma_{n+2}) \right.$$

$$+ \varepsilon \cdot \sum_m^\infty {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (-1)^{n+m} \cdot \frac{(m+1)!\,(n-m)!}{(n+2)!}$$

$$\left. - \sum_0^{m-1} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m+1)_{n+2} (1 + \varepsilon \cdot \sigma_{m+1} - \varepsilon \cdot \sigma_{m-n-1}) \right\},$$

wo gesetzt ist:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} = \sigma_\nu, \quad \sigma_0 = 0.$$

Der Grenzwert der Summe der beiden Glieder für $\varepsilon = 0$ ist also:

$$(-1)^m \cdot e^{\tau' y} \cdot \frac{y^m}{(1-y)^m} \cdot \ln y \cdot \sum_0^{m-1} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m+1)_{n+2}$$

$$+ e^{\tau' y} \cdot (1-y)^{-m} \cdot y^m \cdot \left( (-1)^m \cdot \sum_0^{m-1} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m+1)_{n+2} \cdot (\sigma_{m-n-1} - \sigma_{n+2}) \right.$$

$$\left. + \sum_m^\infty {}_n (-1)^n \cdot \frac{\tau'^n}{n!} \cdot \frac{(m+1)!\,(n-m)!}{(n+2)!} \right).$$

Dieselbe Rechnung läßt sich auch für $\varphi_{01}$ und $\varphi_{00}$ leicht durchführen, und man bekommt so die folgenden Entwicklungen für die drei Funktionen um den Punkt $x = 1$:

$$(28)\quad \begin{cases} \varphi_{10}(m, \tau', x) = k'_{10}(m, \tau') \cdot e^{\tau' y} \cdot \dfrac{y^m}{(1-y)^m} \cdot \ln y - \chi_{01}(-m, -\tau', y) \\ \varphi_{01}(m, \tau', x) = k'_{01}(m, \tau') \cdot e^{\tau' y} \cdot \dfrac{y^m}{(1-y)^m} \cdot \ln y - \chi_{10}(-m, -\tau', y) \\ \varphi_{00}(m, \tau', x) = k'_{00}(m, \tau') \cdot e^{\tau' y} \cdot \dfrac{y^m}{(1-y)^m} \cdot \ln y - \chi_{00}(-m, -\tau', y), \end{cases}$$

wo zu setzen ist:

$$(29)\quad \begin{cases} k'_{10}(m, \tau') = (-1)^m \cdot \sum\limits_{0}^{m-1} {}_n \dfrac{\tau'^n}{n!} \cdot (m+1)_{n+2} \\ k'_{01}(m, \tau') = -(-1)^m \cdot \sum\limits_{0}^{m-2} {}_n \dfrac{\tau'^n}{n!} \cdot (m)_{n+2} \\ k'_{00}(m, \tau') = (-1)^m \cdot \sum\limits_{0}^{m-1} {}_n \dfrac{\tau'^n}{n!} \cdot (m)_{n+1} \end{cases}$$

und die Funktionen $\chi$ mit den Reihen (20) zu berechnen sind, nachdem man für das $m^{\text{te}}$ Glied, dessen Nenner Null werden würde, das folgende substituiert hat:

in $\chi_{01}$:

$$y^m \cdot \left((-1)^m \cdot \sum_{0}^{m-1} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m+1)_{n+2}(\sigma_{n+2} - \sigma_{m-n-1}) - \sum_{m}^{\infty} {}_n (-1)^n \cdot \frac{\tau^n}{n!} \cdot \frac{(m+1)!\,(n-m)!}{(n+2)!}\right)$$

in $\chi_{10}$:

$$(30)\quad y^m \cdot \left((-1)^{m+1} \cdot \sum_{0}^{m-2} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m)_{n+2} \cdot (\sigma_{n+2} - \sigma_{m-n-2}) - \sum_{m-1}^{\infty} {}_n (-1)^n \cdot \frac{\tau'^n}{n!} \cdot \frac{m!\,(n-m+1)!}{(n+2)!}\right)$$

in $\chi_{00}$:

$$y^m \cdot \left((-1)^m \cdot \sum_{0}^{m-1} {}_n \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (m)_{n+1} - (\sigma_{n+1} - \sigma_{m-n-1}) - \sum_{m}^{\infty} {}_n (-1)^n \cdot \frac{\tau'^n}{n!} \cdot \frac{m!\,(n-m)!}{(n+1)!}\right)$$

$$\sigma_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu}, \quad \sigma_0 = 0$$

Es ist zu bemerken, daß die Werte $k'$ in dem besonderen Fall $\tau = 0$ alle drei Null werden. Das heißt nichts anderes, als daß in diesem Fall alle drei Funktionen $\varphi$ in $x = 1$ keine Singularität haben, sie sind dann ganze Transzendente. Daß dies so sein muß, erkennt man auch sofort aus den Differentialgleichungen (9), wenn man in ihnen $\tau = 0$ setzt.

Interessanter ist es, daß auch in dem Falle $\tau = 1$ das eine der

$k'$ Null wird, nämlich $k'_{01}$. Es ist also auch die Funktion: $\varphi_{01}(1, \tau', x)$ eine ganze Transzendente. In der Tat: Die Lösung der Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} + z \cdot \left(\tau' + \frac{1}{x(1-x)}\right) - (1 - x) = 0,$$

die um $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, lautet:

$$\varphi_{01}(1, \tau', x) = \frac{1-x}{\tau'} \cdot \left(1 + \frac{e^{-\tau' x} - 1}{\tau' x}\right).$$

In allen andern Fällen haben die Funktionen $\varphi$ in $x = 1$ eine Singularität, gleichgültig ob $\tau$ eine ganze oder eine gebrochene Zahl ist.

9. Wir haben gesehen, daß sich die Abweichung $i_1$ von einem gleichmäßig kommutierten Strom nach (10) und (7) berechnet als:

$$i_1 = a \cdot \varphi_{10}(\tau, \tau', x) + b \cdot \varphi_{01}(\tau, \tau', x)$$

$$a = I \cdot (2 + \tau') - \frac{T}{L} \cdot (E + HT)$$

$$b = I \cdot (2 + \tau') - \frac{T}{L} \cdot E.$$

Die Bedingung dafür, daß $i_1$ im Punkte $x = 1$ keine Singularität hat, ist also:

$$(31) \qquad a \cdot K_{10}(\tau, \tau') + b \cdot K_{01}(\tau, \tau') = 0 \ldots$$

In diesem speziellen Falle muß $i_1$ eine ganze Transzendente sein, und man kann es in der Tat auch durch einen Ausdruck

$$i_1 = a \cdot \Phi_{10}(\tau, \tau', x) + b \cdot \Phi_{01}(\tau, \tau', x)$$

wiedergeben, wo die $\Phi$ ganze transzendente Funktionen von $x$ sind. Wir wollen nämlich einmal der Kürze wegen einführen:

$$(32) \quad \begin{cases} k_{10}(\tau, \tau') = \sum_0^\infty \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + n + 1)_{n+2} = e^{\tau'} \cdot \sum_0^\infty \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + 1)_{n+2} \\ k_{01}(\tau, \tau') = -\sum_0^\infty \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau + n)_{n+2} = -e^{\tau'} \cdot \sum_0^\infty \frac{\tau'^n}{n!} \cdot (\tau)_{n+2}. \end{cases}$$

Dann können wir die Bedingung (31) auch schreiben:

$$(33) \qquad a \cdot k_{10}(\tau, \tau') + b \cdot k_{01}(\tau, \tau') = 0,$$

und zwar gilt sie in dieser Form nicht nur für gebrochene Werte $\tau$, sondern, wie aus (28) und (29) zu sehen ist, auch für ganze Zahlen $\tau$.

Wir definieren nun:

$$(34)\begin{cases} \Phi_{10}(\tau, \tau', x) = \varphi_{10}(\tau, \tau', x) + k_{10}(\tau, \tau') \cdot e^{-\tau' x} \cdot \sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\nu} \dfrac{x^{\nu}}{\nu \cdot (\tau+\nu)_{\nu}} \\ \Phi_{01}(\tau, \tau', x) = \varphi_{01}(\tau, \tau', x) + k_{01}(\tau, \tau') \cdot e^{-\tau' x} \cdot \sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\nu} \dfrac{x^{\nu}}{\nu \cdot (\tau+\nu)_{\nu}}. \end{cases}$$

Dann ist offenbar, wenn (33) gilt:

$$i_1 = a \cdot \varphi_{10} + b \cdot \varphi_{01} = a \cdot \Phi_{10} + b \cdot \Phi_{01}.$$

Andererseits folgen aus (21) und (22) die Reihenentwicklungen:

$$(35)\begin{cases} \Phi_{10}(\tau, \tau', x) = e^{-\tau' x} \\ \cdot \sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\nu} \dfrac{x^{\nu}}{\nu \cdot (\tau+\nu)_{\nu}} \cdot \left\{ \dfrac{\tau'^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \cdot (\tau+\nu)_{\nu} + \sum\limits_{\nu-1}^{\infty}{}_{n} \dfrac{\tau'^{n}}{n!} \cdot (\tau+n+1)_{n+2} \right\} \\ \Phi_{01}(\tau, \tau', x) = -e^{-\tau' x} \cdot \sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\nu} \dfrac{x^{\nu}}{\nu \cdot (\tau+\nu)_{\nu}} \\ \left\{ \dfrac{\tau'^{\nu-2}}{(\nu-2)!}(\tau+\nu)_{\nu} + \dfrac{\tau'^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \cdot ((\tau+\nu+1)_{\nu+1} - (\tau+\nu-1)_{\nu-1}) + \sum\limits_{\nu}^{\infty}{}_{n} \dfrac{\tau'^{n}}{n!} \cdot (\tau+n)_{n+1} \right\} \end{cases}$$

Aus diesen Entwickelungen sieht man ohne weiteres, daß $\Phi_{10}$ und $\Phi_{01}$ ganze transzendente Funktionen von $x$ sind.

Sehr einfach wird die Bedingung (33), wenn der Widerstand der Spule, also auch $\tau'$, unendlich klein ist. Dann ist nämlich:

$$k_{10}(\tau, 0) = (\tau+1)_2 \qquad k_{01}(\tau, 0) = -(\tau)_2.$$

Die Bedingung (33) wird in diesem Fall:

$$\frac{a}{\tau-1} = \frac{b}{\tau+1},$$

oder, wenn wir die Bedeutung von $a$ und $b$ nach Formel (8) beachten

$$\left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=0} = -\left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=1}.$$

Die beiden Funktionen $\Phi_{10}$ und $\Phi_{01}$ sind in diesem Falle nicht mehr transzendent, sondern ganze Funktionen zweiten Grades. Setzt man $\frac{a}{(\tau-1)} = \frac{b}{(\tau+1)} = \alpha$, so ergibt sich:

$$i_1 = \alpha \cdot x \cdot (1-x);$$

$i_1$ hat überall dasselbe Vorzeichen wie $\alpha$, erreicht bei $x = \frac{1}{2}$ seinen (absolut genommen) größten Wert $\frac{\alpha}{4}$ und verläuft zu beiden Seiten dieses Maximums ganz symmetrisch.

Es sei noch ein anderer Spezialfall erwähnt, nämlich $\tau = 1$. Da alsdann $k_{01} = 0$, so wird die Bedingung (33) in diesem Fall:

$$a = 0.$$

Der Wert $\left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=1}$ berechnet sich nun, indem man setzt:

$$i_1 = b \cdot \varphi_{01}(1, \tau', x) = b \cdot \frac{1-x}{\tau'} \cdot \left(1 + \frac{e^{-\tau' x} - 1}{\tau' x}\right)$$

$$\left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=1} = -\frac{b}{\tau'^2} \cdot (e^{-\tau'} - 1 + \tau') = -b \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau'}{3!} + \frac{\tau'^2}{4!} - + \cdots\right).$$

Im allgemeinen kann man aus (32) nur so viel sehen, daß $k_{10}$ stets positiv ist, während $k_{01}$ positiv ist, wenn $\tau < 1$, dagegen negativ

Fig. 2a ($a > 0$).

Fig. 2b ($a < 0$).

wenn $\tau > 1$. Setzen wir nun für $a$ und $b$ die in (8) angegebenen Werte ein, so können wir die Bedingung (33) auch schreiben:

$$(1 + \tau) \cdot k_{01} \cdot \left(\frac{di_1}{dx}\right)_0 + (1 - \tau) \cdot k_{10} \cdot \left(\frac{di_1}{dx}\right)_1 = 0.$$

Daraus folgt, daß, wenn $i_1$ in $x = 1$ keine Singularität haben soll, die beiden Differentialquotienten $\left(\frac{di_1}{dx}\right)_0$ und $\left(\frac{di_1}{dx}\right)_1$ stets entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die $i_1$-Kurve verläuft also wie die Kurve Fig. 2a oder Fig. 2b, ohne an einer Zwischenstelle die $x$-Achse zu schneiden, nur daß sie, wenn $\tau' \neq 0$, nicht mehr symmetrisch zu $x = \frac{1}{2}$ ist.

Um eine Vorstellung von der möglichen Unsymmetrie der Kurve zu bekommen, nehme ich das in unserer oben zitierten Arbeit gewählte Zahlenbeispiel:

$$T = 0{,}001 \text{ sec}; \; L = 10^{-6} \text{ Henry}; \; R = 0{,}001\,\Omega; \; R_1 = 0{,}002\,\Omega.$$

Es ist dann:

$$\tau = 2, \quad \tau' = 1.$$

Aus (32) ergibt sich:

$$k_{10} = 4 \cdot e^{-1}, \quad k_{01} = -e^{-1}.$$

Aus (33) folgt dann:

$$\left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=1} = -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{di_1}{dx}\right)_0.$$

10. In der oben zitierten Arbeit haben wir darauf hingewiesen, daß der Wert:

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=1} = -2I + \left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=1}$$

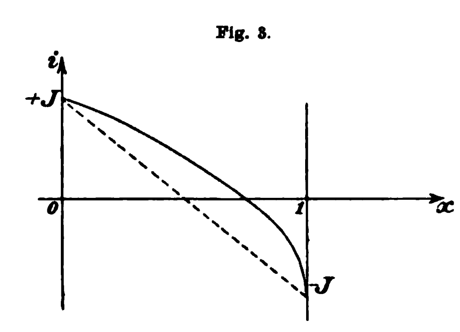
besonders charakteristisch für die Natur der Kurzschlußkurve ist. Ist nämlich $\beta$ die Größe der Berührungsfläche Bürste-Kollektor, so ist:

$$\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=1}$$

die Stromdichte an einem Kommutatorsegment in dem Moment, wo die Bürste das Segment verläßt.

Ist dieser Differentialquotient unendlich, so wird demnach die Stromdichte in diesem Moment unendlich groß, die Maschine muß also funken. Das tritt, wie aus (15) sofort zu erkennen ist, im allgemeinen dann ein, wenn:

Fig. 3.




$$\tau = \frac{R_1 \cdot T}{L} \leqq 1.$$

Und zwar sieht man leicht:

1) Wenn:

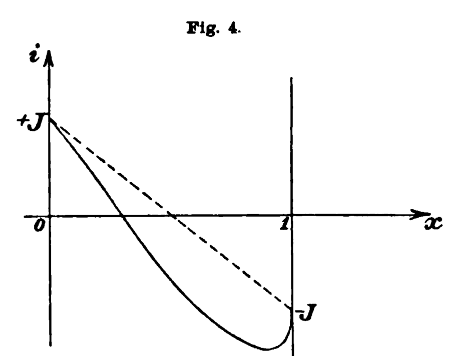
$$a \cdot k_{10} + b \cdot k_{01} > 0,$$

ist:

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=1} = -\infty.$$

In diesem Falle wird der Strom, wie wir sagen können, während der Kurzschlußperiode nicht ganz fertig kommutiert, und es muß deswegen im letzten Moment noch ein sehr rascher Abfall der Stromkurve erfolgen.

Fig. 4.




2) Wenn:

$$a \cdot k_{10} + b \cdot k_{01} < 0,$$

so ist:

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=1} = +\infty.$$

Dann wird der Strom während der Kurzschlußperiode überkommutiert, und deswegen muß im letzten Moment die Stromkurve noch einmal sehr rasch ansteigen.

Nur bei einer einzigen von der Stromstärke $I$ abhängigen Bürstenstellung kann in dem Falle $\tau \leqq 1$ die Kommutation einigermaßen

gleichmäßig erfolgen und die Maschine funkenfrei laufen, nämlich wenn das Magnetfeld gerade die Bedingung erfüllt:

$$a \cdot k_{10} + b \cdot k_{01} = 0$$

(Die Bedeutung von $a$ und $b$ ist aus Formel (7), die von $k_{10}$, $k_{01}$ aus (32) zu ersehen.).

**11.** Wirklich günstige Verhältnisse für den funkenfreien Gang der Maschine können wir aber nur dann erwarten, wenn

$$\tau = \frac{R_1 \cdot L}{T} > 1. \tag{36}$$

Es ist dies also *die erste Bedingung für den funkenfreien Gang der Maschine.* Immerhin können aber auch dann noch, wenn $i_1$ sich weit von Null entfernt, beträchtliche Hitzegrade unter der Bürste entstehen. Die Stromstärken $i'$ und $i''$ von den beiden Kollektorsegmenten zur Bürste sind (vgl. Fig. 5):

$$i' = I + i = 2 \cdot I(1 - x) + i_1$$
$$i'' = I - i = 2I \cdot x - i_1,$$

ferner sind die beiden Übergangswiderstände:

$$\frac{R_1}{1 - x} \quad \text{und} \quad \frac{R_1}{x}.$$

Fig. 5.

Die in dem Moment $dt$ entwickelte Stromwärme ist also:

$$R_1 \cdot \left\{ \frac{(2I \cdot (1 - x) + i_1)^2}{1 - x} + \frac{(2I \cdot x - i_1)^2}{x} \right\} \cdot dt.$$

Man sieht hieraus zunächst, daß auf dem einen der beiden Segmente sicher höhere Temperaturen entstehen müssen, wenn $i_1$ (positiv oder negativ) von Null verschieden ist, als wenn es stets Null ist. Da nun hohe Temperaturen am Kollektor vermieden werden müssen, so ist der Fall $i_1 = 0$ in dieser Hinsicht jedenfalls der günstigste. Die Summe der Stromwärmen auf beiden Kollektorsegmenten ergibt:

$$R_1 \cdot \left( 4 I^2 + \frac{i_1^2}{x \cdot (1 - x)} \right) dt. \tag{37}$$

Man sieht, daß dieser Betrag am kleinsten ist, wenn $i_1 = 0$.

*Die geringste Wärmeentwicklung am Kollektor und zugleich die kleinsten Temperatursteigerungen an ihm bekommt man in dem Fall der gleichmäßigen Kommutation* $i_1 = 0$.

In diesem Falle erfährt die Stromdichte unter der Bürste überhaupt gar keine Änderung, der Strom ist auf die beiden Kommutatorsegmente immer im Verhältnis der aufliegenden Bürstenfläche verteilt.

Die Bedingung für die gleichmäßige Kommutation ist: $a = b = 0$.

Setzt man hier für $a$ und $b$ die Werte nach (7) ein, so berechnet sich *das Magnetfeld, das gerade gleichmäßige Kommutation bewirkt*, so:

$$E = I \cdot \left(2\frac{L}{T} - R\right), \quad H = I \cdot \frac{2R}{T}. \tag{38}$$

Die Erfüllung der Bedingungen (38) ist aber nicht im allgemeinen durch bloße Bürstenverstellung zu erreichen, weil es *zwei* Gleichungen sind, beim Verstellen der Bürste aber nur *ein* Parameter geändert wird, von dem $E$ und $H$ abhängen.

Wir können nun noch allgemein die Frage aufwerfen, bei welcher Bürstenstellung am Kollektor die kleinste Wärme entwickelt wird, wenn das Magnetfeld eine gleichmäßige Kommutation nicht zuläßt. Die ganze Wärmeentwicklung während einer Kurzschlußperiode ist:

$$R_1 \cdot T \cdot \int_0^1 \left(4I^2 + \frac{i_1^2}{x \cdot (1-x)} \cdot \right) dx.$$

Da wir die Stromstärke $I$ als gegeben ansehen, und $R_1$ und $T$ Konstanten sind, so haben wir einfach das Integral:

$$\int_0^1 \frac{i_1^2}{x \cdot (1-x)} \cdot dx$$

darauf hin zu untersuchen, wo es seinen kleinsten Wert annimmt. Wir denken uns, daß, wenn die Bürste in der Nähe des Maximums hin und her verstellt wird, die in der kurzgeschlossenen Spule induzierte Spannung als lineare Funktion der Bürstenverschiebung variiere, oder, was auf dasselbe hinauskommt: daß in dem Ausdruck $E + Ht$ für die induzierte Spannung $H$ in erster Näherung als konstant anzusehen ist, während $E$ variiert.

Die gesuchte Bedingung ist dann:

$$\frac{d}{dE} \int_0^1 \frac{i_1^2}{x \cdot (1-x)} \cdot dx = 0. \tag{39}$$

Setzen wir nun (vgl. oben vor Formel (6)):

$$b - a = H \cdot \frac{T^2}{L} - 2I \cdot \tau' = H'$$

$$-b = E \cdot \frac{T}{L} - I \cdot (2 - \tau') = E'$$

so ist:

$$i_1 = a \cdot \varphi_{10} + b \cdot \varphi_{01} = -E' \cdot \varphi_{00} - H' \cdot \varphi_{10}$$

$$\frac{di_1}{dE} = -\frac{T}{L} \cdot \varphi_{00},$$

und die Bedingung (39) wird nun:

$$E' \cdot \int_0^1 \frac{\varphi_{00}^2 \cdot dx}{x \cdot (1-x)} + H' \cdot \int_0^1 \frac{\varphi_{00} \cdot \varphi_{10} \cdot dx}{x \cdot (1-x)} = 0. \tag{40}$$

Wir können diesem Ausdruck noch eine etwas übersichtlichere Form geben. Wenn wir die Differentialgleichung für $\varphi_{00}$ mit $\varphi_{00}$ multiplizieren, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\varphi_{00})^2}{dx} + \varphi_{00}^2 \cdot \left(\tau' + \frac{\tau}{x \cdot (1-x)}\right) - \varphi_{00} = 0.$$

Also da: $\varphi_{00}(\tau, \tau', 0) = \varphi_{00}(\tau, \tau', 1) = 0$:

$$\int_0^1 \frac{\varphi_{00}^2}{x \cdot (1-x)} \cdot dx = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^1 \varphi_{00} \cdot dx - \frac{\tau'}{\tau} \cdot \int_0^1 \varphi_{00}^2 \cdot dx. \tag{41}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man die Gleichung für $\varphi_{00}$ mit $\varphi_{10}$, die für $\varphi_{10}$ mit $\varphi_{00}$ multipliziert und beide addiert:

$$\frac{d}{dx}(\varphi_{00} \cdot \varphi_{10}) + 2 \cdot \varphi_{00} \cdot \varphi_{10} \cdot \left(\tau' + \frac{\tau}{x \cdot (1-x)}\right) - (\varphi_{10} + x \cdot \varphi_{00}) = 0.$$

Also:

$$\int_0^1 \frac{\varphi_{00} \cdot \varphi_{10}}{x \cdot (1-x)} \cdot dx = \frac{1}{2\tau} \cdot \int_0^1 (\varphi_{10} + x \cdot \varphi_{00}) \cdot dx - \frac{\tau'}{\tau} \cdot \int_0^1 \varphi_{00} \cdot \varphi_{10} \cdot dx. \tag{42}$$

Weiter wollen wir nun beachten, daß diese bestimmten Integrale, insbesondere:

$$\int_0^1 \varphi_{00} \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 (\varphi_{10} + x \cdot \varphi_{00}) \cdot dx$$

analytische Funktionen von $\tau$ darstellen. Man kann durch Integration der Reihen (21) und (23) konvergente Ausdrücke für sie gewinnen, die längs der ganzen positiven $\tau$-Achse ($0 < \tau < +\infty$) eindeutig und endlich bleiben. Wir wollen diese Ausdrücke zunächst einmal in dem Bereich $0 < \tau < 1$ ins Auge fassen.

Wir haben die beiden Gleichungen:

$$\frac{d}{dx}\varphi_{10}(\tau, \tau', x) + \varphi_{10}(\tau, \tau', x) \cdot \left(\tau' + \frac{\tau}{x \cdot (1-x)}\right) - x = 0$$

$$\frac{d}{dx}\varphi_{00}(-\tau, -\tau', x) - \varphi_{00}(-\tau, -\tau', x) \cdot \left(\tau' + \frac{\tau}{x \cdot (1-x)}\right) - 1 = 0.$$

Multiplizieren wir die erste mit $\varphi_{00}(-\tau, -\tau', x)$, die zweite mit $\varphi_{10}(\tau, \tau', x)$ und addieren, so bekommen wir:

$$\frac{d}{dx}[\varphi_{10}(\tau, \tau', x) \cdot \varphi_{00}(-\tau, -\tau', x)] = \varphi_{10}(\tau, \tau', x) + x \cdot \varphi_{00}(-\tau, -\tau', x)$$

$$= \varphi_{10}(\tau, \tau', x) - (1-y) \cdot \varphi_{00}(\tau, \tau', y) + K_{00}(-\tau, -\tau') \cdot \frac{(1-y)^{\tau+1}}{y^{\tau}} \cdot e^{-\tau' y},$$

wobei Formel (15) benutzt worden ist. Nun ist nach (19):

$$\varphi_{10}(\tau, \tau', x) \cdot \varphi_{00}(-\tau, -\tau', x) = \int_0^x e^{\tau'\xi} \cdot \frac{\xi^{\tau+1}}{(1-\xi)^{\tau}} \cdot d\xi \cdot \int_0^x e^{-\tau'\xi} \cdot \frac{(1-\xi)^{\tau}}{\xi^{\tau}} \cdot d\xi.$$

Da wir voraussetzen, daß $\tau < 1$, so ist auch das zweite von diesen Integralen konvergent. Andererseits ist:

$$\varphi_{10}(\tau, \tau', x) \cdot \varphi_{00}(-\tau, -\tau', x) = \int_0^x \varphi_{10}(\tau, \tau', x) \cdot dx - \int_y^1 (1-y) \cdot \varphi_{00}(\tau, \tau', y) dy$$

$$+ K_{00}(-\tau, -\tau') \cdot \int_y^1 \frac{(1-y)^{\tau+1}}{y^{\tau}} \cdot e^{-\tau' y} \cdot dy.$$

Wir wollen hier nun einsetzen: $x = 1$, also: $y = 0$. Wenn wir nun beachten, daß, wie in 7 gezeigt worden ist, für $\tau < 1$:

$$K_{10}(\tau, \tau') = \lim_{x=1} \left\{ \frac{\varphi_{00}(\tau, \tau', x)}{(1-x)^{\tau}} \right\} = e^{-\tau'} \cdot \int_0^1 e^{\tau' x} \cdot \frac{x^{\tau+1}}{(1-x)^{\tau}} \cdot dx$$

$$= \int_0^1 e^{-\tau' y} \frac{(1-y)^{\tau+1}}{y^{\tau}} \cdot dy$$

und ferner:

$$\int_0^1 e^{-\tau' x} \cdot \frac{(1-x)^{\tau}}{x^{\tau}} \cdot dx = e^{-\tau'} \cdot \int_0^1 e^{\tau' y} \cdot \frac{y^{\tau}}{(1-y)^{\tau}} \cdot dy = K_{00}(\tau, \tau'),$$

endlich nach (18): $K_{00}(-\tau, -\tau') = e^{\tau'} \cdot K_{00}(\tau, \tau')$, so bekommen wir:

$$K_{00}(\tau, \tau') \cdot K_{10}(\tau, \tau') \cdot e^{\tau'} = \int_0^1 \varphi_{10}(\tau, \tau', x) \cdot dx + \int_0^1 y \cdot \varphi_{00}(\tau, \tau', y) \cdot dy$$

$$- \int_0^1 \varphi_{00}(\tau, \tau', y) \cdot dy + K_{00}(\tau, \tau') \cdot K_{10}(\tau, \tau) \cdot e^{\tau}$$

oder:

$$\int^1 (\varphi_{10} + x \cdot \varphi_{00}) \cdot dx = \int_0^1 \varphi_{00} \cdot dx. \tag{43}$$

Diese Beziehung ist zunächst nur für den Bereich $0 < \tau < 1$ bewiesen. Aber, wenn zwei eindeutige Funktionen längs einer, noch so kleinen, Linie mit einander übereinstimmen, so sind sie überhaupt identisch. Also gilt (43) auch für $\tau > 1$.

Mit Rücksicht auf (41), (42), (43) bekommt (40) die Form:

$$(2E' + H') \cdot \int_0^1 \varphi_{00} dx - 2\tau' \cdot \left\{ E' \cdot \int_0^1 \varphi_{00}^2 \cdot dx + H' \cdot \int_0^1 \varphi_{00} \cdot \varphi_{10} \cdot dx \right\} = 0.$$

Wenn wir endlich noch beachten, daß: $E' = -b$, $H' = b - a$, so können wir auch schreiben:

$$(44) \quad a \cdot \left( \int_0^1 \varphi_{00} \cdot dx - 2\tau' \cdot \int_0^1 \varphi_{00} \cdot \varphi_{10} \cdot dx \right) + b \cdot \left( \int_0^1 \varphi_{00} \cdot dx - 2\tau' \cdot \int_0^1 \varphi_{00} \cdot \varphi_{01} \cdot dx \right) = 0.$$

Man sieht, daß diese Bedingung, wenn $\tau'$ zu vernachlässigen wäre, einfach lautete:

$$a + b = 0.$$

Aber auch dann, wenn $\tau'$ wenigstens kleiner ist als $\tau$, wird sie nicht viel anders. Da nämlich $\varphi_{00}$ in dem ganzen Bereich von 0 bis 1 positiv ist, so ist:

$$\int_0^1 \varphi_{00} \cdot \varphi_{10} \cdot dx = m \cdot \int_0^1 \varphi_{00} \cdot dx,$$

wo $m$ einen Mittelwert von $\varphi_{10}$ bedeutet. Nun ist der kleinste Wert von $\varphi_{10}$ Null, für den größten ist $d\varphi_{10}/dx = 0$, also:

$$(\varphi_{10})_{Max} \left( \tau' + \frac{\tau}{x \cdot (1 - x)} \right) = x.$$

Nun ist der kleinste Wert, den $1/x(1 - x)$ annehmen kann: 4, der größte von $x$: 1, also ist sicher:

$$(\varphi_{10})_{Max} < \frac{1}{\tau' + 4\tau}.$$

Folglich:

$$0 < m < \frac{1}{\tau' + 4\tau}.$$

Ganz dasselbe gilt für das Integral: $\int_0^1 \varphi_{00} \cdot \varphi_{01} \cdot dx$.

Folglich wird Formel (44):

$$(45) \quad a \cdot (1 - \delta) + b(1 - \varepsilon) = 0$$

$$\delta < \frac{2\tau'}{\tau' + 4\tau}, \quad \varepsilon < \frac{2\tau'}{\tau' + 4\tau}$$

oder, wenn wir an die Bedeutung von $\tau$ und $\tau'$ denken:

$$\delta < \frac{2 \cdot R}{R + 4R_1}, \quad \varepsilon < \frac{2R}{R + 4R_1},$$

wo $R$, $R_1$ die Widerstände der Spule und der Übergangsschicht Bürste-Kollektor sind. Wird der Widerstand $R$ der Spule sehr klein, so kann man $\delta$ und $\varepsilon$ weg lassen.

In dem Zahlenbeispiel in der zitierten Arbeit ist $R = 0{,}001\ \Omega$, $R_1 = 0{,}002\ \Omega$ angenommen, also sind $\delta$ und $\varepsilon$ kleiner als 0,22.

Außerdem sind $\delta$ und $\varepsilon$ jedenfalls nur wenig von einander verschieden.

*Um diejenige Bürstenstellung zu finden, bei der die am Kollektor entwickelte Wärme am kleinsten ist, genügt es praktisch, wenn man setzt:*

(45a) $$a + b = 0.$$

Wir können diese Formel folgendermaßen anschaulich machen.

Wenn das kommutierende Feld die Gleichung erfüllt:

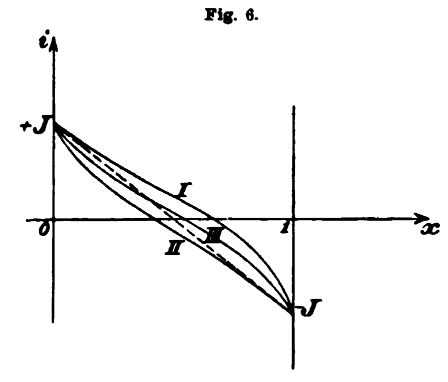
$$a = 0$$

oder:

$$E = \frac{L}{T} \cdot I \cdot (2 - \tau'),$$

so berührt die Kurzschlußstromkurve im Beginn des Kurzschlusses die gerade Linie $i = I \cdot (1 - 2x)$. (Fig. 6I). Wenn man nun die Bürste um ein gewisses Stück verschiebt, so kommt man (wenn $H$ von Null verschieden ist) an eine Stelle, wo das kommutierende Feld die Bedingung:

Fig. 6.




$$b = 0$$

oder:

$$E + H \cdot T = \frac{L}{T} \cdot I \cdot (2 + \tau')$$

erfüllt. Hier berührt die Kurzschlußstromkurve am Ende der Kurzschlußperiode die Gerade $i = I \cdot (1 - 2x)$. (Fig. 6II).

Genau mitten zwischen diesen beiden Bürstenstellungen liegt die, bei der das Magnetfeld unsere Bedingung:

$$a + b = 0$$

oder:

(45b) $$E + H \cdot \frac{T}{2} = \frac{L}{T} \cdot 2I$$

erfüllt. Die genaue Bedingung (44) oder (45) führt zu einer Bürstenstellung, die von dieser nur um wenige Prozent der ganzen Verschiebung I bis II abweicht. Man kann das an unserm Zahlenbeispiel leicht nachrechnen. Die Kurzschlußstromkurve, die zu dieser mittleren Stellung gehört (Fig. 6 III) verläuft zum Teil über, zum Teil unter der Geraden $i = I \cdot (1 - 2x)$. Es folgt das daraus, daß die Differentialquotienten von $i_1$ am Anfang und am Ende des Kurzschlusses:

$$\left(\frac{di_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{b}{\tau + 1}, \quad \left(\frac{di_1}{xd}\right)_{x=1} = -\frac{a}{\tau - 1} = \frac{b}{\tau - 1}$$

beide dasselbe Vorzeichen haben.

In der zitierten Abhandlung ist unter anderem eine Kurzschlußstromkurve ($i_I$) gezeichnet, die offenbar recht ungünstig ist. Der Strom wird überkommutiert, d. h. die Stromkurve geht weit unter die Linie $i = -I$ herunter und der Differentialquotient $(di/dx)_{x=1}$ ist recht beträchtlich. Die zugehörigen Zahlen sind:

$$T = 0{,}001 \text{ sec}, \; R = 0{,}001\,\Omega, \; R_1 = 0{,}002\,\Omega, \; L = 10^{-6} \text{ Henry}, \; I = 100 \text{ A.},$$
$$E = 0{,}2 \text{ V}, \; H = 1000.$$

Ich frage, wie man in diesem Falle die Bürste verschieben muß, um möglichst geringe Erwärmung am Kollektor zu haben. Setzen wir in 45b die Zahlen, außer für $E$ ein und rechnen wir $E$ aus, so bekommen wir: $E = -0{,}3$. Der Unterschied zwischen diesem $E$ und dem in der Abhandlung angenommenen ist:

$$-0{,}5 = -H \cdot \frac{T}{2} \cdot$$

Wir müssen die Bürsten also nur um die halbe Breite einer Kollektorlamelle verschieben, um die gewünschte Stromkurve zu bekommen, und zwar in derselben Richtung, in der der Kollektor sich bewegt. Die Bedingungen $a = 0$ und $b = 0$ würden ergeben: $E_I = 0{,}1$; $E_{II} = -0{,}7$. Der Unterschied zwischen beiden entspricht einer Verschiebung der Bürsten um 0,8 der Lamellenbreite.

Wenn wir nun die Stromkurve zeichnen, die in diesem Falle die geringste Erhitzung am Kollektor gibt, so finden wir, daß sie doch nach beiden Seiten sehr stark von der Geraden $i = I(1 - 2x)$ abgeht. Die Differentialquotienten des Kurzschlußstromes am Anfang und am Ende der Periode sind:

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_0 = -2I + \frac{b}{\tau + 1} = -200 + 133$$

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_1 = -2I + \frac{b}{\tau - 1} = -200 + 400.$$

Sie weichen also sehr stark von dem normalen Wert — 200 ab, ja es wird, wie das positive Vorzeichen des Wertes $(di/dx)_1 = +200$ beweist, der Strom sogar in diesem günstigen Fall noch überkommutiert.

*Als zweite Bedingung für das Zustandekommen einer möglichst gleichmäßigen Kommutierung, die gleichbedeutend ist mit einer möglichst geringen Erhitzung des Kollektors, ist zu nennen: Es muß das Magnetfeld der Maschine gerade an der Stelle, wo:*

$$a + b = 0 \quad \textit{oder:} \quad E + H \cdot \frac{T}{2} = \frac{L}{T} \cdot 2I \ \textit{ist,}$$

*so beschaffen sein, daß a und b verschwindend klein gegen I sind.*

Man kann die Bedingung auch so aussprechen: Es muß an der genannten Stelle $a - b$ klein gegen $2I$ sein, d. h.:

$$2I \cdot \frac{R \cdot T}{L} - H \cdot \frac{T^2}{L}$$

klein gegen $2I$.

Diese Bedingung ist offenbar in dem so eben besprochenen Zahlenbeispiel nicht erfüllt, und deswegen konnten wir keine gute Kurzschlußstromkurve bekommen. Das Magnetfeld wäre in dem Zahlenbeispiel dagegen außerordentlich günstig für die Kommutation, wenn unter sonst gleichen Verhältnissen $H$ nahe an 200 läge.

---

# Zur Addition und Subtraktion mit Hilfe des logarithmischen Rechenschiebers.

Von Paul Ernst, stud. phil. et mech. in Wien.

## I.

Subtrahiert man die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b = c \\ \lg\left(\frac{a'}{b'}\right) = \lg a' - \lg b' = c \end{cases}$$

von einander, so ergibt sich:

$$\lg a - \lg a' = \lg b - \lg b'$$

oder:

$$(2) \qquad a : a' = b : b'$$

was in Worten heißt:

Verschiebt man zwei kongruente logarithmische Skalen aneinander, so sind in jeder Lage der Skalen die übereinanderstehenden Zahlen proportional, wie bekannt.

Setzt man in (2) eine der Größen, z. B. $a'$, gleich 1, so ergibt sich die gewöhnliche Multiplikations- bezw. Divisionsregel für den logarithmischen Rechenschieber:

$$(2^*) \qquad a : 1 = b : b'$$

Durch Umformung von (2*) erhält man $a : b = 1 : b'$ und weiter

$$(3) \qquad \begin{cases} (a + b) : a = (1 + b') : 1 \\ (a - b) : a = (1 - b') : 1 \end{cases}$$

Die Gleichungen (3) geben in der Form

$$(3^*) \qquad \begin{cases} a : 1 = (a + b) : (1 + b') \\ a : 1 = (a - b) : (1 - b'), \end{cases}$$

W. Ritters[1]) Methode der Addition und Subtraktion mit Hilfe des logarithmischen Rechenschiebers:

„Man stellt die Zahl 1 des Schiebers unter die Zahl $a$ der oberen Skala, liest unter der Zahl $b$ ab, vergrößert die Ablesung $b'$ um eine Einheit und findet über der neuen Ablesung das Ergebnis $a + b$.“ (Analog für $a - b$.)

Mittels dieser Methode erhält Ritter durch eine Verschiebung und zwei Ablesungen den Wert von Ausdrücken der Form: $a \pm b$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm b}$, $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$, $\left(\frac{\sqrt{a}}{b} \pm \sqrt{c}\right)^2$, $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \pm c\right)^2$, $\sqrt{\frac{a^2}{b} \pm c^2}$.

Ich möchte nun zeigen, wie sich durch Anbringung einer Kubikskala[2]) analoge und noch verwickeltere Ausdrücke, in denen Kuben und Kubikwurzeln vorkommen, rasch und bequem, wiederum durch bloß eine Verschiebung und zwei Ablesungen, berechnen lassen; außerdem will ich unter Benützung einer bekannten Regel das Rittersche Additionsverfahren auch auf Ausdrücke von der Form $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ anwenden, wobei $x = a$, $a^2$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $y = b$, $b^2$, $\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{b}$.

## II.

Um mit Hilfe der Kubikteilung Ausdrücke, wie $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ auszurechnen, verfährt man in folgender Weise:

1) Schweizerische Bauzeitung 1894, Bd. 23, S. 39.

2) Wie an den Rechenschiebern „System Rietz“, D. R. G. M. 164885 u. 181110.

1. Man stellt $a$ auf der einfach-logarithmischen Teilung der Zunge unter 1 der Kubikteilung, liest auf dieser die über $b$ der benützten Zungenteilung stehende Zahl ab, vermehrt sie um 1 und findet unter der neuen Zahl der Kubikskala auf der benützten Zungenteilung das Ergebnis.
2. Die entsprechende Zahl auf der oberen Zungenteilung gibt $(a^3+b^3)^{2/3}$.
3. Durch eine weitere Ablesung erhält man $a^3 + b^3$, wenn man nämlich das zuerst gefundene Resultat $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ kubiert.
4. Verwendet man in (1) statt der unteren die obere Zungenteilung, so erhält man die Ausdrücke:

$$\sqrt[3]{a^{3/2}+b^{3/2}}, \quad (a^{3/2}+b^{3/2})^{2/3}, \quad a^{3/2}+b^{3/2}.$$

Ganz analog verfährt man bei Subtraktion.

Durch eine weitere Verschiebung und Ablesung lassen sich Ausdrücke wie: $\sqrt[5]{a^3+b^3}$, $\sqrt[6]{a^3+b^3}$, $\sqrt[5]{a^{3/2}+b^{3/2}}$, $\sqrt[6]{a^{3/2}+b^{3/2}}$, $(a^{3/2}+b^{3/2})^2$ usw. berechnen.

Ein ähnliches Verfahren ergibt $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.

5. Man stellt 1 der unteren Zungenteilung unter $a$ der Kubikskala, liest auf der zuerst benützten Skala die Zahl unter $b$ der Kubikteilung ab, vermehrt um eine Einheit und findet unter der neuen Zahl der verwendeten unteren Zungenteilung auf der kongruenten Teilung des Stabes das Ergebnis $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.
6. Auf der oberen Skala des Stabes steht als entsprechende Zahl $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2$.
7. Auf der Kubikskala steht als entsprechende Zahl $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3$.
8. Benützt man in (5) die obere Zungenteilung, so erhält man die Ausdrücke $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$, bezw. $(a^{2/3}+b^{2/3})^{1/2}$ und $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$. Auch hier gilt das ganz analoge Verfahren für die Subtraktion und durch eine weitere Ablesung ergeben sich noch viel verwickeltere Ausdrücke: $\sqrt{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ usw.

## III.

Die Erweiterung des Ritterschen Verfahrens auf Ausdrücke der Form $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ beruht auf der bekannten Regel, bei Berechnung von reziproken Werten $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2}$ die Zunge verkehrt einzuschieben. Skalenfolge: $A$, $C$, $B$, $D$.)

Es ist nahezu selbstverständlich, wie sich Ausdrücke $\frac{1}{x^3}$ und $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ finden lassen:

a. Man schiebe die Zunge verkehrt ein, stelle $x$ auf $C$ ein, so erhält man auf der Kubikteilung $\frac{1}{x^3}$.

b. Man schiebe die Zunge verkehrt ein, stelle auf der Kubikteilung $x$ ein, so erhält man auf $C$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Es ist:

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{b \pm a}{ab}. \tag{4}$$

Aus (2*), nämlich:

$$a : 1 = b : b' \quad \text{folgt} \quad b = ab'.$$

Dividieren wir (3) in der Form $a : 1 = (a \pm b) : (1 \pm b')$ durch (2*), so ergibt sich:

$$1 : 1 = \frac{a \pm b}{ab} : \frac{1 \pm b'}{ab'},$$

woraus wegen (4)

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \left(1 \pm \frac{1}{b'}\right) \cdot \frac{1}{a} \tag{5}$$

1. Es ergibt sich somit für $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ folgende Regel:

   **Man stellt $a$ auf $A$ ein, schiebt die Zunge verkehrt ein und $B1$ unter $a$, liest unter $b$ auf $A$ $\frac{1}{b'}$ auf $B$, bildet $\beta = 1 + \frac{1}{b'}$, stellt $\beta$ auf $A$ ein, schiebt $B1$ darunter und findet auf $B$ unter $a$ der Skala $A$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. (Auch auf $A$ über $a$ der Skala $B$.)**

2. Nimmt man die letzte Ablesung auf $C$ vor, so erhält man $\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (bezw. auf $D$).

3. Auf der Kubikskala findet sich bei der 2. Art der Ablesung $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{3/2}$.

4. Führt man 1. statt mit $A$ und $B$, mit $C$ und $D$ aus und liest nach der 2. Art ab, so findet sich $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ in $D$, darüber in $A$ $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$ und in der Kubikskala $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3$.

5. Man stellt auf $D$ unter $a$ der Skala $A$ ein, schiebt $C1$ darüber liest unter $b$ der Skala $A$ auf $C$ ab, addiert 1, stellt auf $D$ die gefundene Zahl ein, schiebt 1 darüber und liest unter $a$ der Skala $B$ auf $D$ schon $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ ab.

6. Nimmt man die letzte Ablesung auf $A$ vor, so findet man $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$.
7. Liest man auf der Kubikskala ab, ergibt sich $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3$.
8. Um $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ zu finden, stellt man auf $D$ $a$ ein, schiebt $B_1$ darüber, liest in $B$ über $b$ von $D$ ab, vermehrt um 1, stellt die neue Zahl auf $A$ ein, darunter 1 von $B$ und findet über $a$ von $C$ das Resultat $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ auf $A$.
9. Nimmt man die Ablesung auf $D$ vor, so erhält man $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$.
10. Auf der Kubikteilung entspricht dem die Ablesung $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{3/2}$.
11. Man stelle $C1$ unter $a$ der Kubikteilung, lese die Zahl unter $b$ der Kubikteilung auf $C$ ab, vermehre um 1, stelle auf $D$ die neue Zahl ein, schiebe $C1$ darüber. Auf $C$ steht unter $a$ der Kubikteilung das gesuchte $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)$.
12. Nimmt man die letzte Ablesung auf $B$ vor, so ergibt sich $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^2$.

Ganz analog hätte man zu verfahren, um die entsprechenden Differenzen zu berechnen.

Durch eine weitere Verschiebung und Ablesung ließen sich Ausdrücke von weit verwickelterem Baue auswerten.

---

Wenn auch in der Praxis Ausdrücke von der oben behandelten oder einer ähnlichen Form verhältnismäßig selten vorkommen werden, so scheint es mir doch theoretisch von Interesse zu sein, daß mittels des Rechenschiebers auf so kurze Art so verwickelt gebaute Ausdrücke sich auswerten lassen.

---

# Kleinere Mitteilungen.

## Preisaufgaben der Académie des Sciences de Paris aus der angewandten Mathematik und Physik.

### Für 1907.[1]

*Prix Vaillant* (4000 fr.): Perfectionner en un point important le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction $u$ et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire. — Les Mémoires devront être envoyés au Secrétariat avant le 1er janvier 1907.

### Für 1908.

*Prix Fourneyron* (1000 fr.)[2]: Recherches théoriques ou expérimentales sur les turbines à vapeur.

*Prix Damoiseau* (2000 fr.): Théorie de la planète basée sur toutes les observations connues. — Schluß der Bewerbungen am 31. Dezember 1907.

### Für 1909.

*Prix Vaillant* (4000 fr.): Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice. — Schluß der Bewerbungen am 31. Dezember 1908.

# Bücherschau.

**P. Stephan, Die Technische Mechanik.** Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Verlag von B. G. Teubner 1904.

Da ein kurzgefaßtes, die besonderen Bedürfnisse des angehenden Maschinenbauers berücksichtigendes Lehrbuch bisher vermißt wurde, so darf wohl bei einem Unternehmen, die Lücke auszufüllen, die Frage ungestellt bleiben, ob die Anlehnung an die bekannten Werke nicht teilweise etwas

1) Vgl. diese Zeitschrift Bd. 51 (1905), S. 435.
2) Vgl. diese Zeitschrift Bd. 50 (1904), S. 157.

weit geht. Auch daß die Differentialrechnung nur „verkappt" auftritt, was ja freilich die Kürze nicht fördert, könnte m. E. das Interesse für die Erscheinung nicht wesentlich beeinträchtigen. An Stoff enthält das Buch tatsächlich „etwa das Minimum dessen, was ein Student im Vorexamen wissen muß." Daß es sich nur an den Maschinenbauer wendet, hätte noch augenfälliger und eindringlicher im Titel zum Ausdruck kommen sollen, etwa mit den Worten: „Die Technische Mechanik des Maschinenbauers" oder „Die Maschinenmechanik." Die Schreibweise ist im ganzen klar und einfach; die zahlreichen Beispiele sind gut gewählt und sogar teilweise neu.

Man könnte sich also über das Erscheinen des Werkchens nur freuen, wenn es nicht durch eine Menge von schlimmen Fehlern aller Art so entstellt wäre, daß die aus dem Buch zu schöpfende Belehrung denn doch recht fragwürdiger Art ist. Davon einige Proben.

S. 18 ist als Beispiel für räumliche Kräftezerlegung die Aufhängung einer Last $Q$ an einem Bock gewählt, der aus drei gegen den Horizont gleich geneigten Streben gebildet wird. „Da alle Streben mit $Q$ denselben Winkel bilden, sind die Druckkräfte in ihnen gleich." (!) Dabei kann nicht etwa angenommen werden, daß vielleicht nur vergessen sei, die selbstverständliche Voraussetzung voranzuschicken: die Horizontalprojektionen schließen miteinander Winkel von je $120^0$ ein. Nein, diese Orientierung wird schließlich gerade als Folgerung aus der Gleichheit der Strebendrucke abgeleitet! Zum Überfluß enthält die Skizze noch eine Querverbindung zwischen zwei Streben, die der angestellten Betrachtung über die Kraftverteilung jegliche Berechtigung nimmt.

S. 34 „Ein Kräftepaar hat das Bestreben, eine Drehbewegung des Körpers hervorzurufen, während Einzelkräfte eine fortschreitende Bewegung herbeizuführen bezw. zu ändern suchen." Und mit derselben Leichtigkeit S. 46 (nach Reduktion eines Kräftesystems auf Kraft $R$ und Kräftepaar $G_1$ senkrecht dazu): „Ist der Körper frei beweglich, so wird er sich unter dem Einfluß der Kraft $R$ in ihrer Richtung, die auch die der Zentralachse ist, geradlinig fortbewegen und gleichzeitig infolge des Kräftepaares $G_1$ eine Drehung um diese Zentralachse ausführen." Dann wieder auf S. 321, nachdem die Gleichung

$$A = \tfrac{1}{2}Mc^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2$$

für das Arbeitsvermögen des starren Körpers abgeleitet ist: „Als Voraussetzung gilt dabei(!), daß die durch den Schwerpunkt gehende, einzige(?) Drehachse ihre Richtung im Raum nicht ändert, daß also eine wirbelnde Bewegung des Körpers nicht eintritt. Wirkt auf den Schwerpunkt eines Körpers von der Masse $M$ die konstante Kraft $P$ und besteht außerdem ein nach Größe und Drehebene konstantes Drehmoment $\mathfrak{M}$, so erzeugt erstere die fortschreitende Beschleunigung $p = \frac{P}{M}$ und letzteres die Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J}$". Alle diese Sätze sind so verkehrt, daß man vielleicht in kürzerer Zeit einen Abriß des ganzen Gebietes liefern, als aus Herrn Stephans Aufstellungen die einzelnen Irrtümer herausschälen und widerlegen könnte.

S. 95 ist ein Körper in zwei Punkten $A$ und $B$ gestützt, und unter dem Einfluß einer Kraft $G$ betrachtet, welche die Reaktionen $N_1$ und $N_2$

in $A$ und $B$ hervorruft. „Damit Gleichgewicht besteht, müssen diese drei Kräfte in einer Ebene liegen und sich in einem Punkt schneiden. Diese beiden Bedingungen sind notwendig und hinreichend(!). Die Figur zeigt nun, daß die zweite auf unendlich viele verschiedene Weisen erfüllt werden kann, denn wenn die Größe und Richtung von $N_1$ beliebig angenommen ist(!), kann stets eine Kraft $N_2$ gefunden werden, die mit $N_1$ und $G$ im Gleichgewicht steht usw." Die Bedingungen sind nicht hinreichend, sondern es muß auch noch das Kräftedreieck geschlossen sein; von $N_1$ darf nur die Richtung oder (in gewissen Grenzen) die Größe angenommen werden, sonst kann keine durch $B$ gehende Kraft $N_2$ gefunden werden.

Die Abbildungen zum Kapitel „Keil" S. 125 sind mehr als bedenklich. Von den früheren Darstellungen „ländlicher Vorrichtungen zum Spalten roher Stämme", wie sie Reuleaux vorfand, ist man wohl ziemlich allgemein zur „Prismenkette" übergegangen. Bleibt man indessen dabei, das zu Trennende als einen einzigen, zusammenhängenden Körper zu zeichnen, so darf man ihn doch nicht von dem Keil völlig ausfüllen lassen, wobei die Natur der widerstehenden Kräfte ganz rätselhaft bleibt. Herr Stephan stellt aber an Hand dieses Bildes sogar Betrachtungen über den Rückwärtsgang des Keiles an.

Verfehlt ist auch die Behandlung der Differentialbandbremse auf S. 175. Sind $P_1$ und $P_2 > P_1$ die Spannkräfte in den beiden Trümern, $b_1$ und $b_2$ ihre Hebelarme in bezug auf den festen Punkt des Hebels und ist $U$ die Umfangskraft an der Bremsscheibe, so ist — solange Gleitung stattfindet — das Moment von $P_1$ und $P_2$ inbezug auf diesen Punkt:

$$M = U \frac{b_2 e^{\mu \alpha} - b_1}{e^{\mu \alpha} - 1}$$

oder mit $c = b_1 : b_2$

$$M = U b_2 \frac{e^{\mu \alpha} - c}{e^{\mu \alpha} - 1}.$$

Da über das Verhältnis $b_1 : b_2$ keinerlei Voraussetzung gemacht wurde, so gibt die Gleichung auch ganz allgemein die Größe eines am Bremshebel auszuübenden Momentes $Da$ an, welches am Umfang der noch gleitenden Scheibe einer Kraft $U$ das Gleichgewicht halten soll. Praktische Bedeutung hat sie aber nur, sofern der Gleichgewichtszustand ein stabiler ist.

Unterscheidet man 3 Gebiete, jenachdem

$$\text{I. } c < 1 \quad \text{II. } e^{\mu \alpha} > c > 1 \quad \text{III. } c > e^{\mu \alpha},$$

so ist Stabilität nur in I. und III. vorhanden. In II. führt eine Bewegung des Hebels im Sinne von $Da$ ein Abheben des Bremsbandes, dagegen jedes Sinken von $Da$ unter einen bisher Gleichgewicht haltenden Wert ein „Festbremsen" herbei.

Die festgebremste Scheibe übt eine ganz bestimmte Umfangskraft $U_{max}$ aus, und da jetzt $P_2 = P_1 e^{\varepsilon \mu \alpha}$, wo $\varepsilon$ ein positiver echter Bruch oder Eins ist, so lautet die neue Gleichgewichtsbedingung:

$$Da = U_{max} b_2 \frac{e^{\varepsilon \mu \alpha} - c}{e^{\varepsilon \mu \alpha} - 1}.$$

Der Tatbestand, daß bei einem und demselben $Da$ sowohl Festbremsung mit $U_{max}$, als Gleitung bei kleinerem $U$ eintreten kann, ist also an die Bedingung

$$\frac{e^{\mu\alpha}-c}{e^{\mu\alpha}-1} > \frac{e^{s\mu\alpha}-c}{e^{s\mu\alpha}-1},$$

gebunden, die ihrerseits nur mit $e^{\mu\alpha} > c > 1$ erfüllbar ist. Der Tatbestand ist danach nur dem Gebiet II eigentümlich; im I. und III. tritt bei kleinem $Da$ Gleiten, bei großem aber Festbremsen auf, und zwar liegt die Grenze bei

$$Da = U_{max} b_2 \frac{e^{\mu\alpha}-c}{e^{\mu\alpha}-1}.$$

Die Werte für die Trumkräfte $P_2$ und $P_1$ bei festgebremster Scheibe sind natürlich mit $P_2 - P_1 = U_{max}$ aus der Momentengleichung am Hebel leicht abzuleiten.

Es erscheint nun zwar nicht unmöglich auf Grund dieser Verhältnisse im Gebiet II eine Art „selbstsperrender Lüftungsbremse“ anzuordnen, sofern nur zunächst durch eine geringe Kraft für Anliegen des Bremsbandes gesorgt wird. Da aber Gleiten des Bandes hierbei nur außerordentlich kurze Zeit auftreten kann, so müßte ein heftiger Stoß erfolgen, der nur etwa durch Einschaltung besonders nachgiebiger Verbindungen unschädlich gemacht werden könnte. Eine Ausführung dieser Art dürfte also kaum existieren.

Gebiet I und III unterscheiden sich zunächst durch das entgegengesetzte Vorzeichen von $Da$, dann aber viel wesentlicher noch durch folgenden Umstand: während in I. $Da$ dem Absolutwert nach über $Ub_2$ bleibt, liefern in III wenigstens die vorstehenden Betrachtungen keine untere Grenze für $Da$. Es scheidet danach auch I für die Anwendung aus, die ja auf kleine Werte $Da$ abzielt. Daß praktisch nur das Gebiet III in Betracht kommt, ist denn auch allgemein bekannt, vgl. z. B. die älteren Auflagen des Taschenbuchs der Hütte. In dasselbe Gebiet fallen natürlich auch die Lüftungsbremsen üblicher Bauart, deren Eigenart nur darin besteht, daß das Moment $Da$ durch ein Gewicht dauernd ausgeübt wird, daß also zum Niedergang der Last „gelüftet“ werden muß.

Herr Stephan behauptet dementgegen: „In der Praxis(!) wird $b_1$ stets kleiner als $b_2 e^{\mu\alpha}$ ausgeführt, außer bei den Lüftungsbremsen, die ein Herabgehen der Last erst beim Anheben des Bremshebels zulassen.“ Er empfiehlt also gerade Gebiet I. und II. für die gewöhnliche Bremswirkung, während in Wirklichkeit I keinen Vorteil vor der einfachen Bremse bietet und II die unbrauchbaren labilen Fälle bezw. die wohl nie ausgeführte selbstsperrende Bremse umfaßt. Angesichts der Ziele des Stephanschen Buches scheint mir aber gerade ein Verstoß gegen die unmittelbare praktische Anwendung besonders schlimm. Zudem übernimmt Herr Stephan durch doppelte Beispielrechnung (95) aus dem labilen Gebiet II noch einmal ausdrücklich die Verantwortung für seine falschen Aufstellungen.

In einer zweiten Auflage, die einem Buch von so erwünschter Richtung gewiß bald bevorsteht, werden hoffentlich die besprochenen Fehler mit den vielen andern, die vorzubringen der Raum fehlte, verschwunden sein.

Braunschweig. R. SKUTSCH.

# Neue Bücher.

## Analysis.

1. Bruns, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. (Teubners Sammlung Bd. XVII.) Leipzig 1906, Teubner. geb. in Leinw. M. 8.40.
2. Leathem, J. G., Volume and surface integrals used in Physics. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics Nr. 1.) Cambridge 1905, University Press. 2 s. 6 d.

## Astronomie.

3. Brendel, Martin, Theorie des Mondes. (Abhandlungen der K. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen, mathem.-physikal. Klasse, neue Folge Bd. III Nr. 4.) Berlin 1905, Weidmann. M. 7.
4. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. VI, 2. Astronomie. Red. v. K. Schwarzschild. 1. Heft. Leipzig 1905, Teubner. M. 5.80.
5. Frischauf, Johs., Die Gauß-Gibbssche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Mit einem Anhang zum „Grundriß der theoret. Astronomie". Leipzig 1905, Engelmann. M. 1.20.
6. Kobold, Hermann, Der Bau des Fixsternhimmels, mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate. („Die Wissenschaft" Heft 11.) Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn.

S. auch Nr. 8, 28.

## Darstellende Geometrie.

7. Vonderlinn, J., Parallelperspektive, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. (Sammlung Göschen Nr. 260.) Leipzig 1905, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

## Geschichte.

8. Ebstein, Erich, Aus G. C. Lichtenbergs Correspondenz. Stuttgart 1906, Enke.
9. Rouse Ball, W.-W., Histoire des Mathématiques. Édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. I. Les Mathématiques dans l'antiquité. Les Mathématiques au moyen-age et pendant la renaissance. Les Mathématiques modernes de Descartes à Huygens. Notes complémentaires. Paris 1906, Hermann.

S. auch Nr. 22.

## Logikrechnung.

10. Schröder, Ernst, Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik). II. Bd. 2. Abtlg. Hrsg. im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung v. Eugen Müller. Mit einem Bildnis Ernst Schröders. Leipzig 1905, Teubner. M. 8.

## Mechanik.

11. Mehrtens, Georg Christoph, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. 3. Bd. Formänderungen und statisch unbestimmte Träger. Nebst Sach- und Namenverzeichnis über das ganze Werk. Leipzig 1905, Engelmann. M. 20.—; geb. in Leinw. M. 21.
12. Mohr, Otto, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1906, Ernst & Sohn. M. 15.—; geb. M. 16.50.

13. Vaes, F. J., Graphostatica. I. Samenstellen en ontbinden van krachten met toepassingen en uitgewerkte vraagstukken. Deventer 1905, Kluwer. Fl. 1.50.
14. Zech, P., Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. In dritter Auflage hrsg. v. C. Cranz unter Mithilfe v. Ritter von Eberhard. Stuttgart 1906, Metzler. M. 4.60; geb. in Leinw. M. 5.20.

## Physik.

15. Fleming, J. A., Elektrische Wellentelegraphie, vier Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Aschkinaß. Leipzig und Berlin 1906, Teubner. M. 4.20.
16. Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1904. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 60. Jahrg. 3. Abtlg. Kosmische Physik. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. M. 28.
17. Fraunhofer, Joseph, Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten in bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre. Hrsg. v. A. von Öttingen. (Ostwalds Klassiker Nr. 150.) Leipzig 1905, Engelmann. geb. M. 1.20.
18. Graetz, L., Kurzer Abriß der Elektrizität. 4. verm. Aufl. Stuttgart 1906, Engelhorn. geb. in Leinw. M. 3.
19. Grosse, W., Ionen u. Elektronen. Eine kurze Darstellung der Entwicklung u. Begründung neuerer Anschauungen insbesondere der Ionentheorie. Leipzig 1905, Quandt & Händel. M. 2.25.
20. Hallo, H. S., u. Land, H. W., Elektrische u. magnetische Messungen u. Meßinstrumente. Freie Bearbeitung u. Ergänzung des Holländischen Werkes Magnetische en Elektrische Metingen von G. J. van Swaay. Berlin 1906, Springer. geb. M. 15.
21. Hay, Alfred, Alternating currents: Their theory, generation, and transformation. London 1905, Harper. 6 s.
22. La Cour, Paul, und Appel, Jacob, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt. Autorisierte Übersetzung v. G. Siebert. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn.
23. Listing, Johann Benedikt, Beitrag zur physiologischen Optik. Hrsg. v. O. Schwarz. (Ostwalds Klassiker Nr. 147.) Leipzig 1905, Engelmann. geb. M. 1.40.
24. Lodge, Sir Oliver, Sur les électrons, Conférence, faite à l'Institution of Electrical Engineers le 5 novembre 1902. Traduite de l'Anglais par E. Nugues et I. Péridier. Paris 1906, Gauthier-Villars. Frs. 2.75.
25. Pearson, F. R., Problems in practical Physics. London 1905, Oliver & Boyd. 6 d.
26. Pellat, H., The new state of matter. An adress delivered April 3, 1905. Romance of science. London 1905. 1 s.
27. Schuster, Arthur, Advanced exercises in practical Physics. 2nd ed., revised. Cambridge 1905, University Press. 8 s.
28. Schwarzschild, K., Untersuchungen zur geometrischen Optik. III. Über die astro-photographischen Objektive. (Abhandlgn. der K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, mathem.-physikal. Klasse, neue Folge, Bd. IV, Nr. 3.) Berlin 1905, Weidmann. M. 4.
29. Winckelmann, A., Handbuch der Physik. 2. Aufl. Leipzig 1906, Barth. III. Bd. Wärme. 1. Hälfte. M. 16. VI. Bd. Optik. 2. Hälfte. M. 30. (VI. Bd. vollständig M. 44; geb. in Halbleinw. M. 46.)
30. Witte, Hans, Über den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen. (Naturwissenschaftl. Studien Heft 1.) Berlin 1906, Ebering.

S. auch Nr. 2.

### Tafeln.

31. Albrecht, Th., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Dezimalstellen. 9. Stereotyp-Auflage. Berlin 1905, Stankiewicz.
32. Arnaudeau, A., Tables des intérêts composés, annuités et amortissements pour des taux variant de dixièmes en dixièmes et des époques variant de 100 à 400 suivant les taux. Paris 1906, Gauthier-Villars. Frs. 10.

### Verschiedenes.

33. Dyck, Walther von, Über die Errichtung eines Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München. Festrede zur Übernahme des ersten Wahlrektorates bei der Jahresfeier der technischen Hochschule zu München, gehalten am 12. Dezember 1903. Leipzig u. Berlin 1905, Teubner. M. 2.
34. Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. Generalregister zu Bd. 1—50. Bearb. v. E. Wölffing. Leipzig 1905, Teubner. M. 15.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge, hrsg. v. Gerhard Hessenberg, Karl Kaiser u. Leonard Nelson. 3. Heft. IX. Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. X. Vier Briefe von Gauß u. Wilhelm Weber an Fries. XI. Wissenschaftliche und religiöse Weltansicht. Göttingen 1906, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2.40; Subskr. Preis M. 2.

Albrecht, Th., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 31.

Amodeo, Federico, Lezioni di geometria projettiva, dettate nella R. Università di Napoli. 3ª edizione (1ª ed. tipografica) migliorata e aumentata. Napoli 1905, Pierro.

Arnaudeau, A., Tables des intérêts composés, annuités et amortissements, s. N. B. 32.

Astronomischer Kalender für 1906. Hrsg. v. der k. k. Sternwarte zu Wien. Wien, Gerolds Sohn. M. 2.40.

Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung: Bestimmung der Längendifferenz Potsdam—Borkum und der Polhöhe auf Station Borkum im Jahre 1904. (Veröffentlichung des k. preußischen geodätischen Institutes, neue Folge Nr. 24.) Berlin 1906, Stankiewicz.

Borrass, E., Relative Bestimmungen der Intensität der Schwerkraft auf den Stationen Bukarest, Tiglina bei Galatz, Wien, Charlottenburg und Pulkowa im Anschluß an Potsdam. (Veröffentlichung des k. preußischen geodätischen Institutes, neue Folge Nr. 23.)

Brendel, M., Theorie des Mondes, s. N. B. 3.

Bruns, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, s. N. B. 1.

Bürklen, O. Th., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. (Sammlung Göschen Nr. 256.) Leipzig 1905. geb. in Leinw. M. —.80.

Dyck, W. von, Über die Errichtung eines Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München, s. N. B. 33.

Ebstein, E., Aus G. C. Lichtenbergs Correspondenz, s. N. B. 8.

Elsässer, W., Leitfaden der Stereometrie. Ein Hilfsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Lehranstalten. Stuttgart u. Berlin 1906, Grub.

Fine, Henry Burchard, A College Algebra. Boston 1905, Ginn & Co. cloth. 6 s. 6 d.

Fleming, J. A., Elektrische Wellentelegraphie, s. N. B. 15.

Fraunhofer, J., Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten, s. N. B. 17.

Gutzmer, A., Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, nebst einem allgemeinen Bericht über die bisherige Tätigkeit der Kommission. Leipzig u. Berlin 1905, Teubner. M. 1.

Hallo u. Land, Elektrische u. magnetische Messungen u. Meßinstrumente, s. N. B. 20.

Horn, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. (Sammlung Schubert L.) Leipzig 1905, Göschen. geb. in Leinw. M. 10.

Kobold, H., Der Bau des Fixsternhimmels, s. N. B. 6.

La Cour u. Appel, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung . . ., s. N. B. 22.

Lagrange, Joseph Louis, Über die Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades (1768). Aus dem Französischen übersetzt und hrsg. von E. Netto. (Ostwalds Klassiker Nr. 146.) Leipzig 1904, Engelmann. kart. M. 2.20.

Leathem, J. G., Volume and surface integrals used in Physics, s. N. B. 2.

Lehrmittel-Katalog, Illustrierter. Auswahl der bewährtesten Lehrmittel f. Volks- und Bürgerschulen, Gymnasien, Realschulen und verwandte Anstalten. Wien 1906, Pichlers Witwe & Sohn.

Listing, J. B., Beitrag zur physiologischen Optik, s. N. B. 23.

Lodge, Sir Oliver, Les électrons, s. N. B. 24.

Manes, A., Grundzüge des Versicherungswesens. („Aus Natur und Geisteswelt", 105. Bändchen.) Leipzig 1906, Teubner. M. 1; geb. M. 1.25.

Müller, Franz Joh., Ein neuer Netzentwurf für topographische Karten. (Sonderabdruck aus: „Süddeutsche Techniker-Zeitung".) München 1905, Verlag: Bayerischer Techniker-Verband.

Neikirk, Lewis Irving, Groups of order $p^m$ which contain cyclic subgroups of order $p^{m-3}$. (Publications of the university of Pennsylvania, series in Mathematics No. 3.) Philadelphia 1905, The John C. Winston Co.

Nielsen, N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.

Raydt, H., Spielnachmittage. Leipzig u. Berlin 1905, Teubner.

Rouse Ball, W.-W., Histoire des Mathématiques, s. N. B. 9.

Schröder, E., Algebra der Logik, II 2, s. N. B. 10.

Schubert, Hermann, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. II. Leipzig 1905, Göschen. geb. in Leinw. M. 4.

Schwarzschild, K., Untersuchungen zur geometrischen Optik, III, s. N. B. 28.

Vivanti, G., Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung, unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. v. A. Gutzmer. Leipzig 1906, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.

Vonderlinn, J., Parallelperspektive, s. Nr. B. 7.

Weber, H., u. Wellstein, J., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. I: Elementare Algebra u. Analysis. 2. Aufl. Leipzig 1906, Teubner. geb. in Leinw. M. 9.60.

Wilson, J. Cook, On the traversing of geometrical figures. Addendum to the Note upon the most general form of the construction of reciprocal figures. Oxford 1905, Clarendon Press. 6 d.

Witte, H., Mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen, s. N. B. 30.

# Abhandlungsregister 1904—1905.

Von Ernst Wölffing in Stuttgart.

(Die Zahlen über 2604 beziehen sich auf das im nächsten Heft erscheinende Technische Abhandlungsregister 1903—1904).

## Abkürzungen.

**A.A.E.I.** Atti dell' Associazione Elettrica Italiana, Torino 9 (1904).
**A.A.M.** Abh. d. K. Bayr. Akademie, München 22.
**A.A.N.Y.** Annals of the Academy of Science, New York 15.
**A.A.O.V.** Atti dell' Accademia Olimpica, Vicenza 33 (1901—02).
**A.A.P.** Atti della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Palermo 6.
**A.A.P.M.** Atti della R. Accademia Peloritana, Messina 1902—03.
**A.A.P.N.** Atti dell' Accademia Pontaniana, Napoli (2) 9.
**A.A.T.** Atti della R. Accademia di Scienze, Torino 39—40.
**A.A.W.** Anzeiger der K. K. Akademie, Wien 1904—05.
**A.B.** Atmosphaera, Budapest 7—8.
**A.C.J.** American Chemical Journal, Baltimore 34.
**A.C.P.** Annales de Chimie et de Physique, Paris (8) 3—5.
**A.D.M.** Annali di Matematica pura ed applicata, Milano (3) 9—12.
**A.D.P.N.** Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft 2.
**A.D.S.H.** Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, Hamburg 26—27.
**A.E.N.** Annales de l'Ecole Normale Supérieure, Paris (3) 21.
**A.F.** Comptes Rendus de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, Paris 1903—04.
**A.F.G.P.** Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 87; 101; 105.
**A.F.M.** Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte von Mecklenburg, Rostock 59.
**A.F.S.G.** Abhandlungen der Friesschen Schule, Göttingen 1.
**A.G.C.** Atti dell' Accademia Gioënia di Scienze Naturali, Catania (4) 16—17.
**A.G.E.R.** Abhandlungen aus dem Gebiet der Elektrotherapie und Radiologie 1.
**A.G.L.** Abhandlungen der K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch., Leipzig 27; 29.
**A.Gr.** Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig (3) 6—8.
**A.H.** Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 32—33.
**A.I.** American Inventor 12.
**A.I.V.** Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia 61—63.
**A.J.B.** Astronomical Journal, Boston 23—24.
**A.J.C.** Astrophysical Journal, Chicago 16—17; 19—21.
**A.J.S.** American Journal of Science, New Haven (6) 19.
**A.J.W.** Assekuranzjahrbuch, Wien 24.
**A.L.M.** Memorie della R. Accademia dei Lincei, Roma (5) 4.
**A.M.** Acta Mathematica, Stockholm 28—29.
**A.M.A.F.** Arkif för Mathematik, Astronomi och Fysik, Stockholm 1.
**A.M.C.** Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania 25.
**A.M.T.** Archives du Musée Teyler, Haarlem (2) 8—9.
**A.N.** Archives Néerlandaises, Haarlem (2) 8—10.
**A.N.J.** Aeronautical Journal 8.

C.A.A. Verslagen der Zittingen der K. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 12—13.
C.B. Chemische Berichte 37—38.
C.C.S. Colorado College Studies, Colorado Springs 2.
C.M.G. Zentralblatt für Mineralogie und Geologie, Stuttgart 1905.
C.N. The Chemical News, New York 89—90.
Co. Cosmos, Paris (2) 50—51.
C.P.L. Communications from the Physical Laboratory at the University, Leiden.
C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris 138—141.
Cr. Journal für reine und angewandte Mathematik, Berlin 127—128.
C.T.L. Czasopismo techniczne, Lemberg 22.
C.Z. Chemische Zeitung, Coethen 28.
D.A.W. Denkschriften der K. K. Akademie Wien 77.
D.I.G. De Ingenieur, 's Gravenhage 18.
D.M. Der Mechaniker, Berlin 12—13.
D.M.Z. Deutsche Mechanikerzeitung, Berlin 1905.
D.U.Z. Deutsche Uhrmacherzeitung, Berlin 27.
D.V.M. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 13 bis 14.
D.V.N. Verhandlungen der Deutschen Naturforscherversammlung, Leipzig 76.
D.W.B. Das Weltall, Berlin 3—5.
D.Z.R. De Zee, Rotterdam 25—26.
E.C.Z. Elektrochemische Zeitschrift, Berlin 12.
E.I. Electrochemical Industry 2.
E.M. L'enseignement Mathématique, Paris 5—7.
E.M.W. The English Mechanic and World of Science, London 77; 79; 80.
E.R. Electrical Review, London 45.
E.W. The Electrical World, New York 43.
F.C. Forstwissenschaftliches Zentralblatt, Berlin 24.
F.T. Mémoires de l'Académie des Sciences, Toulouse (10) 3—4.
G.B. Giornale di Matematiche, Napoli 42.
G.L. Gaea, Leipzig 41.
G.M.B. Gazeta Matematica, Bukarest 10—11.
G.Z. Geographische Zeitschrift, Leipzig 1904.
H.E.B. Himmel und Erde, Berlin 15—17.
H.E.D. Hemel en Dampkring, Amsterdam 2.
H.H. Hansa, Hamburg 40.
I.A.M. Illustrierte Aëronautische Mitteilungen, Straßburg 8—9.
I.L. Publications de l'Institut, Luxembourg 27.
J.B.A.A. Journal of the British Astronomical Association, London 13—14.
J.C.E.T. Journal of the College of Engineers, Tokyo 2.
J.C.P. Journal de Chimie et de Physique 2—3.
J.C.S. Journal of the Chemical Society, London 85; 87.
J.D.S. Journal des Savants, Paris 1904—05.
J.E.P. Journal de l'École Polytechnique, Paris (2) 9.
J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 155; 156; 158—160.
J.F.P.C. Journal für praktische Chemie, Leipzig (2) 70.
J.H.U.C. John Hopkins' University Circulars, Baltimore 167; 174; 1905.
J.H.W.A. Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten, Hamburg 21.
J.M. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris (5) 10; (6) 1.
J.M.S.J. Journal of the Meteorological Society of Japan, Tokyo 23.
J.N.K. Jahresbericht des Naturwiss. Vereins, Krefeld 1903—05.
J.P. Journal de Physique, Paris (4) 2—4.
J.P.C. The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 8—9.
J.R.E. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Leipzig 1—2.
J.R.M.S. Journal of the Royal Microscopical Society, London 1905.
J.R.P.C.G. Journal der Russ. Physiko-Chemischen Gesellschaft, Petersburg 35—36.
J.S.G. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur, Breslau 82.
J S.M. Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, Porto 15.
J.U.T. Journal of the College of Science, Imperial University, Tokyo 14; 19; 20.
J.V.S.G. Jahreshefte des Vereins der Schweizerischen Gymnasiallehrer 23.
J.Z.M E. Jahrbücher der Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, Wien (2) 40.
K.L. Kosmos, Lemberg 29.
Kn.L. Knowledge, London 26, 27; (2) 1.
K.T. Der Kulturtechniker, Breslau 1904.
L.A.M. L'Astrofilo, Milano 11.
L.E.M. L'Elettricità, Milano (2) 3.
L.R. Le Radium, Paris 1.
M. Mathesis, Gand (3) 4—5.

N.T.N.I. Natuurkundig Tijdschrift voor Nederland. Indië, Batavia 63.
N.W. Naturwissenschaftliche Wochenschrift, Jena (2) 3.
O. The Observatory, London 26—27.
Ö.W.Ö.B. Österreichische Wochenschrift für den Öffentlichen Baudienst 1903—04.
Ö.Z.B.H. Österreichische Zeitschrift für Berg- u. Hüttenwesen, Wien 1903.
Ö.Z.V. Österreich. Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien 1903—04.
P. Prometheus, Berlin 16.
P.A. Popular Astronomy, Northfield 11—12.
P.A.B. Veröffentlichungen der K. Serb. Akademie, Belgrad 67.
P.A.Bo. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Boston 39—41.
P.A.O.H. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums, Heidelberg 1.
P.A.O.P. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums, Potsdam.
P.A.S.F. Publications of the Astronomical Society for the Pacific, San Francisco 14—16.
P.C.P.S. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 12—13.
P.E.M.S. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Edinburgh 22.
P.G.M. Petermanns Geographische Mitteilungen, Gotha 49; 51.
P.I.A.S. Proceedings of the Indiana Academy of Science, Indianapolis 1898; 1902.
Pit. Il Pitagora, Palermo 10—11.
P.J.G. Preisschriften der Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 37.
P.L.M.S. Proceedings of the London Mathematical Society, London (2) 1—2.
P.M. Philosophical Magazine, London (6) 6—9.
P.M.R. Periodico di Matematica, Roma (3) 1; Suppl. 8.
P.N.I. Proceedings of the United States Naval Institution, Annapolis M. D. 29.
Pol.M. Il Politecnico, Milano 1903—04.
P.P.S. Proceedings of the American Philosophical Society, Philadelphia 44.
P.P.S.G. Proceedings of the Philosophical Society, Glasgow 35.
P.P.S.L. Proceedings of the Physical Society, London 19.
P.R. The Physical Review, New York 18—21.
P.R.A.S.C. Selected Papers and Proceedings of the Royal Astronomical Society of Canada, Toronto.
P.R.I. Proceedings of the Royal Institution of Great Britain, London 17.
P.R.I.A. Procedings of the Royal Irish Academy, Dublin 24.
P.R.S.E. Proceedings of the Royal Society, Edinburgh 25.
P.R.S.L. Proceedings of the Royal Society, London 72—74.
P.R.S.V. Proceedings of the Royal Society of Victoria, Melbourne 17.
P.S.B. Procès-verbaux de la Société des Sciences, Bordeaux 1902—03.
P.S.D. Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society, Dublin (2) 10.
P.S.T.P. Processi Verbali delle Società Toscana di Scienze Naturali, Pisa 14.
P.T.M. Summary of the Proceedings of the Tokyo Mathematicophysical Society, Tokyo.
P.T.R.S.C. Proceedings and Transactions of the Royal Society of Canada, Montreal (2) 9—10.
P.Z. Physikalische Zeitschrift, Göttingen 5—6.
Q.J. Quarterly Journal of Mathematics, London 34—35.
Q.J.M.S. Quarterly Journal of the Meteorological Society, London 31.
R.A.A. Reports of the Australasian Association for the Advancement of Science, Melbourne 1.
R.A.G. Rivista di Artigleria e Genio, Roma 1903—04.
R.A.L.R. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Roma (5) 13—14.
R.A.M. Revista de la Reale Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales, Madrid 1.
R.A.N. Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze, Napoli (3) 10—11.
R.B.A. Reports of the British Association for the Advancement of Science 73—74.
R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 7—8.
R.C.M.P. Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo 18—20.
R.F.M. Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali, Pavia 4—6.
R.G.M.M. Revista General de Marina, Madrid 52.
R.G.O. Revue Générale des Sciences, Paris 14—16.
R.I.B. Rendiconti delle Sessioni dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto, Bologna (2) 6—8.
R.I.L. Rendiconti del Reale Istituto Lombardo delle Scienze e Lettere, Milano (2) 36—38.
R.M. Rivista di Matematica, Torino 8.
R.M.B. Revista Maritima Brazileira, Rio de Janeiro 41—42.

**R.M.M.** Revue de Métaphysique et de Morale, Paris 11—12.
**R.M.M.P.** Revue Maritime, Paris 147.
**R.M.P.** Sammelschrift der Math. Gesellschaft, Prag 9.
**R.M.R.** Rivista Marittima, Roma 36—37.
**R.M.S.** Revue de Mathématiques Spéciales, Paris 14—15.
**R.S.** Revue Scientifique, Paris (5) 1; 3.
**R.S.I.** Rivista Scientifico-Industriale 37.
**R.S.M.** Sammelschrift der Sewtschenkogesellschaft, Lemberg 9—10.
**R.T.C.** Rivista di Topografia e Catasto, Torino 16—17.
**R.T.M.** Revista Trimestral de Matematica, Valencia 4—5.
**R.U.J.** Recueil de la Société Scientifique et Litéraire de l'Université, Jurjev 5; 7.
**S.** Science, New York (2) 17—19; 21.
**S.A.B.** Sitzungsberichte der K. Preuß. Akad. der Wissensch., Berlin 1904—05.
**S.A.M.** Sitzungsberichte der Math. Phys. Klasse der K. Bayr. Akademie der Wissenschaften, München 33—34
**S.A.W.** Sitzungsber der Math. Naturw. Klasse der K. K. Akad. der Wissenschaften, Wien 112—114.
**S.E.** Mémoires Présentés par divers savants à l'Académie, Paris 22.
**S.E.D.** Mémoires couronnés et Mémoires de savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences, Bruxelles en 4° 62.
**S.F.P.** Société Française de Physique, Paris 214—216; 219; 220; 222—225; 229; 230.
**S.G.B.** Sitzungsberichte der K. Böhm. Gesellsch. der Wissenschaften, Prag 1903—04.
**S.G.M.** Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft, Marburg 1903—04.
**S.I.D.** Sitzungsberichte der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis, Dresden 1904.
**S.L.** Sirius, Leipzig 36—37.
**S.M.** Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris 31—33.
**S.M.Am.** Bulletin of the American Math. Society, New York (2) 11; 12.
**S.M.B.** Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellschaft, Berlin 1904.
**S.M.H.** Mitteilungen der Math. Gesellschaft Hamburg 4.
**S.M.Ka.** Bulletin der Physikomathematischen Gesellschaft, Kasan (2) 13—14.
**S.M.Kh.** Mitteilungen der math. Gesellschaft, Charkow (2) 8.
**S.M.M.** Sammelschrift der Math. Gesellschaft, Moskau 24.
**S.N.C.** Mémoires de la Société Nationale des Sciences Naturelles et Mathématiques, Cherbourg (4) 1.
**S.N.G.B.** Sitzungsberichte der Niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde, Bonn 1904—05.
**S.P.** Bulletin de la Société Philomatique, Paris (9) 4—5.
**S.P.M.** Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society, Manchester 48—49.
**S.P.M.E.** Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft Erlangen 36—37.
**S.V.K.** Schriften des naturwiss. Vereins für Schleswig, Kiel 13.
**T.A.A.** Acta der Südslavischen Akademie, Agram.
**T.A.E.S.** Transactions of the American Electrochemical Society 5.
**T.A.W.** Transactions of the Wisconsin Academy of Science, Madison 13—14.
**T.C.P.S.** Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 19.
**T.C.R.S.** Transactions of the Canada Royal Society, Ottawa (2) 9.
**T.F.S.** Transactions of the Faraday Society 1.
**T.G.C.** Arbeiten der Topographisch-Geodätischen Kommisson, Moskau 18.
**T.K.L.** Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, Utrecht 20 (1904).
**T.M.** Nyt Tidskrift for Mathematik, Kjöbenhavn 14—16.
**T.M.W.** Terrestrial Magnetism, Washington 9.
**T.N.J.** Schriften der Naturforschergesellschaft, Jurjev 13—14.
**T.N.Z.I.** Transactions and Proceedings of the New Zeeland Institute, Wellington 36.
**T.O.M.** Tidskrift for Opmaalings- og Matrikulsväsen, Kjöbenhavn 3.
**T.R.I.A.** Transactions of the Royal Irish Academy, Dublin 32.
**T.R.S.E.** Transactions of the Royal Society, Edinburgh 40—41.
**T.R.S.L.** Philosophical Transactions of the Royal Society, London 201—203.
**T.S.D.** Scientific Transactions of the Royal Dublin Society, Dublin (2) 8.
**T.S.M.Am.** Transactions of the American Math. Society, New York 5.
**T S.U.R.** Travaux Scientifiques de l'Université, Rennes 2—3.
**T.W.** Prace matematyczno fizyczne, Warschau 16.
**U.B.** Urania, Budapest 3—4.
**U.M.N.** Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften, Berlin 10—11.

V.A.G. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, Leipzig 38—39.
V.A.R.I. Veröffentlichungen des Astronomischen Recheninstituts, Berlin 23.
V.D.P.G. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Berlin 6—7.
V.G.H. Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins, Heidelberg (2) 8.
V.I.G.C. Verhandlungen des internationalen Geographenkongresses, Berlin 7.
V.I.M.C. Verhandlungen des Internationalen Mathematikerkongresses, Heidelberg 3.
V.L.V. Verbandszeitschrift der Landmesservereine in Schlesien, Posen, Preußen und Brandenburg 1904.
V.N.B. Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft, Basel 16—17.
V.S.H. Veröffentlichungen der Großherzoglichen Sternwarte, Heidelberg 3.
V.S.N.G. Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Bern 86; 87.
V.V.F.U.W. Vierteljahrsberichte des Vereins zur Förderung des Unterrichts, Wien 9.
V.V.N.T. Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde, Preßburg 1903.
V.W.A. De Vried der Wiskunde, Arnhem 20.
W.E. Western Electrician 35.
W.M. Wiadomosci Matematyczne, Warschau 6—8.
W.W. Wszechświat, Warschau 22; 23; 28.
Y.G. Yachting Gazette, Paris 297.
Z.A.C. Zeitschrift für anorganische Chemie, Hamburg 40; 42.
Z.B.G.V. Zeitschrift des Bayrischen Geometervereins, München 1903—04.
Z.E. Zeitschrift für Elektrochemie, Halle 10—11.
Z.G.K. Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie, München 11.
Z.G.V. Zeitschrift für die Gesamte Versicherungswissenschaft, Stuttgart 4.
Z.H. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig 34—36.
Z.K.M. Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie, Leipzig 39—41.
Z.L.L. Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur, Wien 1.
Z.P. Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Berlin 17—18.
Z.P.Z. Zeitschrift für physikalische Chemie, Leipzig 40—44.
Z.R. Zeitschrift für Realschulwesen, Wien 29.
Z.R.W.L. Zeitschr. des Rheinisch-Westfälischen Landmesservereins, Kassel 1903—04.
Z.S. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 51—52.
Z.W.P. Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Leipzig 3.

### Angewandte Mathematik.

1. *R. Bettazzi.* Le applicazioni della matematica. B.A.M.T. 8. 40.

2. *Pizzetti.* Matematica e sperimenti. A.R.U.G. 11.

### Geschichte der angewandten Mathematik.

3. *P. Harzer.* Die exakten Wissenschaften im alten Japan. D.V.M. 14. 312.

### Philosophie der angewandten Mathematik.

4. *E. F. Apelt.* Über Begriff und Aufgabe der Naturphilosophie. A.F.S. 1.

5. *A. Höfler.* Zur gegenwärtigen Naturphilosophie. A.D.P.N. 2.

### Pädagogik der angewandten Mathematik.

6. *F. Klein.* Bemerkungen zum mathematischen und physikalischen Unterricht. D.V.N. 76. A. 130.

7. *F. Klein.* Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite. V.I.M.C. 3. 396.

8. *P. Staeckel.* Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. D.V.M. 13. 313.

9. *F. Klein.* Mathematik, Physik, Astronomie an den deutschen Universitäten in den Jahren 1893—1903. D.V.M. 13. 457.

10. *A. Gutzmer.* Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten. D.V.M. 13. 517.

11. *G. Holzmüller.* Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik. D.V.M. 14. 249; 395; *F. Ebner* 339.

### Logikkalkul.

12. *G. Vacca.* La logica di Leibniz. R.M. 8. 64.

13. *H. Mac Coll.* La logique symbolique. E.M. 5. 415; 6. 372.

**14.** *E. V. Huntington.* Sets of independent postulates for the algebra of logic. T.S.M.Am. 5. 288.

**15.** *P. Poretzky.* Théorie des non-égalités logiques. S.M.Ka. (2) 13. 80. 127; 14. 118.

Siehe auch 319; 427; 685; 686.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**16.** *M. Dehalu.* Une vérification élémentaire de la loi des probabilités. B.S.B.A. 9. 54.

**17.** *P. Mansion.* Sur la portée objective du calcul des probabilités. M. (3) 4. Suppl. 3.

**18.** *R. E. Moritz.* A general theorem in local probability. M.M.F. 12. 59.

**19.** *P. Mansion.* Sur la loi des grands nombres des Poisson. A.S.B. 28 A. 72; M (3) 4. Suppl. 2.

**20.** *R. de Montessus.* La loi des grands nombres. E.M. 7. 122.

**21.** *C. Lagrange.* Le principe de la limite conduit, dans des problèmes classiques aux relations absurdes 1 = ½ et 1 — 0. B.A.B. 1904. 923.

**22.** *F. W. Helmert.* Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalles bei Beobachtungsreihen. S.A.B. 1905. 594.

**23.** *P. Mansion.* Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités. B.A.B. 1904. 239; 538; M. (3) 4 Suppl. 6; 8.

**24.** *L. K. Lachtin.* O metodach Pirsona v priloženijach teorii verojatnostej k [illegible] statistiki i biologii (Über die Methoden Pearsons zur Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Aufgaben der Statistik und der Biologie). [illegible] 24. 451.

**25.** *D. F. Mancinelli.* Problema dei [illegible]. [illegible] 361.

**26.** *P. Mansion.* Sur une sommation [illegible] considérées en calcul des [illegible]. B.A.B. 1904. 538; A.S.B. [illegible]

**27.** *[illegible] Pearson.* The problem of the [illegible] N. 72. 294. — *Rayleigh.* 318.

Siehe auch 66.

### Fehlerrechnung.

[illegible] *Story.* A new general [illegible] P.A.Bo. 40. 167.

[illegible] Das Fehlergesetz und [illegible] durch Fechner [illegible]

[illegible] Ein Apparat zur [illegible] Fehlergesetzes [illegible]

**31.** *M. Näbauer.* Mittlerer und durchschnittlicher Fehler. Z.B.G.V. 1903. 56.

**32.** *F. R. Helmert.* Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauß für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. S.A.B. 1904. 950.

**33.** *C. L. Landré.* Vergleichung von Mittelwerten. A.J.W. 24. 81

**34.** *S. Finsterwalder.* Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung und solchen der Statik. S.A.M. 33. 683.

**35.** *J. Midzuhara.* New formulas for finding the mean error of an observation and some likely errors of the most probable values of the unknown quantities in indirect observations. A.J.B. 23. 75.

**36.** *S. A. Saunder.* Note on the use of Peirce's Criterion for the rejection of doubtful observations. M.N.A.S. 63. 432.

**37.** *Harksen.* Unsere Beobachtungen und die dabei begangenen Fehler. A V.N. 1903. 137; 185.

**38.** *E. Cotton.* Sur l'évaluation des erreurs dans l'intégration approchée des équations différentielles. C.R. 141. 177.

**39.** *E. Lindelöf.* Zur Frage von der Bedeutung der Fehlerrechnung bei der harmonischen Analyse von Kurven. A. F.G.P. 87. 597.

**40.** *L. Hermann.* Kurvenanalyse und Fehlerrechnung. A.F.G.P. 89. 600.

**41.** *Zachariae.* Sur l'erreur moyenne de la mesure relative de pendules avec l'appareil Schneider. B.A.Co. 1903. 349.

**42.** *P. Pizzetti.* Die alcuni casi di simplificazione sulla compensazione delle reti geodetiche e in particolare in quella di Hansen. R.T.C. 16. 177.

**43.** *G. de Sandre.* Tavola grafica per la ricerca dei coefficienti delle equazioni degli errori nella compensazione angolare degli allineamenti. R.T.C. 17. 129.

**44.** *C. Jorio.* Dell' error medio nel calcolo di una distanza e di un azimut. R.T.C. 17. 30; 75; 81.

**45.** *C. Jorio.* Sull' influenza dell' errore di verticalità nei livelli. R.T.C. 16. 113; 138.

**46.** *Harksen.* Unsere Beobachtungen und die dabei begangenen Fehler. Das Feinnivellement. A.V.N. 1904. 2.

**47.** *G. de Sandre.* Compensazione di un punto determinato per intersezione inversa. R.T.C. 17. 113.

**48.** *G. de Sandre.* L'errore lineare nelle poligonali. R.T.C. 16. 11; 25; 40.

**49.** *F. Schulze.* Zur Ausgleichung der Polygonzüge. A.V.N. 1904. 93.

**50.** *G. Pfeiffer.* Graphische Ausgleichung bei der trigonometrischen Punktbestim-

mung durch Einschneiden. Ö.Z.V. 1903. 205; 1904. 3; 117; 325.

51. *M. Näbauer.* Genauigkeit verschiedener Arten des Punktauftrages durch rechtwinklige Koordinaten. Z.B. G.V. 1903. 110.

52. *M. Komel.* Graphische Koordinatenausgleichung trigonometrisch bestimmter Punkte. Ö.Z.V. 1903. 173.

53. *J. Sutter.* Genauigkeitsuntersuchung und die Universalzeichen- und Rechenausdrücke. A.V.N. 1903. 281.

54. *E. Puller.* Bestimmung des Minimumpunktes einer fehlerzeigenden Figur. Z.R.W.L. 1904. 66.

55. *U. Barbieri.* Della compensazione nel problema di Marek. R.T.C. 17. 145.

56. *B. Seyfert.* Überschätzung der Fehlergrenzen bei trigonometrischen Berechnungen. V.L.V. 1904. 295.

57. *B. Seyfert.* Maßstab zur Bestimmung der Richtungskoeffizienten *a* und *b*. V.L.V. 1904. 194.

58. *J. Hann.* Regenfall zu Greenwich 1815—1903. M.Z. 22. 30.

59. *B. Wanach.* Über die Ausgleichung von Uhrgängen. A.N.K. 167. 15.

Siehe auch 291; 795; 2112—14; 2574; 3230; 2232—35; 3237; 3238; 3241—44.

### Methode der kleinsten Quadrate.

60. *V. P. Ermakov.* Methode der kleinsten Quadrate (russ.). B.U.K. 1905 b, e.

61. *W. Ivanovsky.* O sposob naimenšich kvadratov. (Über die Rechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate). M.Z.P. 317. 85.

62. *F. Strehlow.* Über das arithmetische Mittel und die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. A.V. N. 1903. 257; 266.

63. *W. Ivanovsky.* O sposob naimenšich kvadratov. (Eine vereinfachte Art der parabolischen Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate). M.Z.P. 313. 103; 131.

64. *R. d'Emilio.* Illustrazioni geometriche e meccaniche del principio dei minimi quadrati. A.I.V. 62. 364.

65. *F. Schlesinger.* Some common inaccuracies in the application of the method of least squares. P.A.S.F. 15. 224.

66. *J. Midzuhara.* On an application of the method of least squares for comparing the probabilities of naturalness of 2 different sets of series of hypothetical observation equations both derived from the same observations. A.J.B. 24. 136.

67. *G. H. Bryan.* Note on the method of the arithmetic mean as applied to rates of increase. M.G.S. 3. 97. — *F. J. W. Whipple.* 173.

68. *S. Wigert.* Sur un problème de la méthode des moindres carrés. A.M. A.F. 1. 719.

69. *S. Wellisch.* Über das natürliche Erhaltungsprinzip. Z.S. 52. 202.

70. *G. Förster.* Über die Gewichte der Beobachtungen auf den 6 internationalen Pohlhöhenstationen. A.N.K. 169. 193.

71. *E. Engel.* Die Koeffizienten für die Bedingungs- und Normalgleichungen beim Ausgleiche trigonometrischer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ö.Z.V. 1903. 101; 1904. 81; 97.

### Politische Arithmetik.

72. *A. Meyer.* La théorie des élections et la représentation proportionelle. R. G.O. 16. 111; 158.

73. *G. B. M. Zerr.* The sinking-fund of the United States. M.M.F. 11. 202.

Siehe auch 2656; 2660; 2662; 2665; 2668; 2669; 2672; 2673.

### Kaufmännische Arithmetik.

74. *S. Johnsen.* Middelforfalstid. T. M. 14. A. 106.

Siehe auch 176; 2658; 2659; 2661; 2666; 2667; 2670; 2671.

### Rentenrechnung.

75. *F. Mortara.* Un quesito comparativo circa le annualità. B.D.M. 4. 33.

76. *W. Reichardt.* Näherungsformeln aus der Rentenrechnung. S.I.D. 1904. A. 25.

77. *J. F. Steffensen* og *N. B. Bertelsen.* T.M. 14. B. 82.

### Statistik.

78. *H. Wiechel.* Volksdichte-Schichtenkarten in neuer mathematisch begründeter Entwurfsart. S.I.D. 1904. 35.

79. *K. Pearson.* Math. Contributions to the theory of evolution. P.R.S.L. 72. 505. T.R.S.L. 203. 53.

80. *F. Galton.* Everage number of kinsfolk in each degree. N. 70. 529; 71. 30. — *G. H. Bryan.* N. 71. 9; 248.

81. *K. Pearson.* On a criterion which may serve to test various theories of inheritance. P.R.S.L. 73. 262.

Siehe auch 24; 91; 2394.

### Biometrie.

**82.** *F. Ludwig.* Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. Z.S. 52. 106.

**83.** *F. Ludwig.* Weitere Abschnitte aus der Biometrie. Z.H. 36. 105. 175; 266.

**84.** *Lexis.* Über die Messung der menschlichen Fruchtbarkeit. Z.G.V. 4. 155.

**85.** *A. D. Darbishire.* On the supposed antagonism of Mendelian to biometric theories of heredity. S.P.M. 49. No. 6.

**86.** *R. Chodat.* La biométre et les méthodes de statistique appliquées à la botanique. V.S.N.G. 87. 85.

**87.** *F. Ludwig.* Die biometrische Analyse einer Pflanzenspezies. Z.S. 51. 277.

**88.** *F. de Helguero.* Sui massimi delle curve dimorfiche. Bi. 3. Nr. 1.

**89.** E. Gain. Étude biométrique sur les variations de la fleur et sur l'hétérostylie de Pulmonaria officinalis. Bi. Nr. 4.

Siehe auch 24; 2395; 2396.

### Sterblichkeit.

**90.** *Czuber.* Zum Problem der Sterblichkeitsmessung. Z.G.V. 4. 160.

**91.** *Lowenthal.* Essai sur les rapports entre la natalité et la mortalité R.S. (5) 3. 1; 38.

### Versicherungsmathematik.

**92.** *Ziegel.* Zur Bewertung der reduzierten Polize in der Lebensversicherung. Z.G.V. 4. 241.

**93.** *Eggenberger.* Über die Beziehungen zwischen den Fundamentalgrößen in der Invalidenversicherung. Z.G.V. 4. 129. — *Meyer.* 131.

Siehe auch 2664.

### Spiele.

**94.** *H. M. Taylor.* On a paper-folding puzzle. M.M. 34. 142.

**95.** *W. J. Wisselink.* Een vraagstuk met oplossing over een spellet je met speelkarten. V.W.A. 20. 250.

**96.** *P. A. Mac Mahon.* Magic squares and other problems on a chess-board. P.R.I. 17. 50.

**97.** *N. J. Lennes.* Motion of a ball on a billiard table. M.M.F. 12. 152.

### Sport.

**98.** *F. Walth*[illegible] U.M.N. 1[illegible]

**99.** *H. W. Segar.* A note on drawing for competitions. T.N.Z.I. 36. 501.

### Numerisches Rechnen.

**100.** *É. Borel.* Les exercises pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. R.G.O. 15. 431.

**101.** *O. Biermann.* Zwei dem numerischen Rechnen angehörende Betrachtungen. M.H. 15. 325.

**102.** *Burkhardt.* Wie man vor Zeiten rechnete. Z.H. 36. 9.

**103.** *G. Lasseri.* I calcoli numerici degli antichi Greci. P.M.R. Suppl. 8. 33.

**104.** *V. V. Bobynin.* Sur les facultés particulières aux mathématiciens et aux calculateurs extraordinaires. E.M. 6. 362.

**105.** *H. Bosmans.* La méthode d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres. A.S.B. 28 B. 411.

**106.** *J. Rius y Casas.* Extraccion de raices por sustraciones sucesivas. R.T.M. 5. 92.

**107.** *H. Schubert.* Elementare Berechnung der Logarithmen. Z.H. 35. 273.

**108.** *F. G. Teixeira.* Sur une formule pour le calcul numérique des logarithmes. N.A. (4) 5. 36.

**109.** *J. A. C. Oudemans.* An easy method to compute a logarithm. O. 26. 416.

**110.** *C. Bremiker.* On the errors with which logarithmic computations are affected. T.A.W. 13. 427.

**111.** *N. P. Bertelsen.* Om den nöjagtighed der opnaas ved tabelopslag i fircifrede logaritme — og antilogaritme — tabeller. T.M. 16 A. 65.

**112.** *P. Barbarin.* Calculs abrégés des sinus et cosinus circulaires ou hyperboliques. M.S B. (6) 2. 163.

**113.** *E. Zogbom.* Genauigkeit der Berechnungen mit der Klothschen Hyperbeltafel. V.L.V. 1904. 244.

**114.** *C. Runge.* Numerische Berechnung der Hauptachsen einer $F_2$. Z.S. 52. 103.

**115.** *E. Lampe.* Einige Übungsaufgaben zur Integralrechnung. D.V.N. 76 B. 4.

Siehe auch 3597—3600.

### Rechenproben.

**116.** *Christiani.* Die Siebener-, Achter-, Neuner-, Elfer-, Siebenunddreißiger- und Hunderteinerprobe zur Vermeidung und Auffindung von Rechenfehlern. A.V.N. 1903. 169.

**Analytische Näherungsmethoden.**

117. *G. Fazzari Errori* assoluti nei calcoli approssimati. Pit. 11. 66.

118. *L. Kollros*. Sur l'approximation périodique des irrationelles cubiques. B.D. (2) 29. 21.

119. *G. H. Hardy*. The asymptotic solution of certain transcendental equations. Q.J. 35. 261.

120. *F. L. O. Wadsworth*. On convergents and arithmetical series, the ratio of whose terms approximate successively the value of $\pi$ and on their application to the construction of computing machines. J.F.I. 156; M.S.P.A. 0. 14.

121. *P. Mansion*. Sur le calcul approché de quelques intégrales. A.S.B. 29 A. 62.

122. *F. Rimondini*. Sul colcolo approssimato degli integrali doppi a limiti costanti. A.A.T. 40. 146.

123. *F. Rimondini*. Sul calcolo approssimato degli integrali doppi. A.A.T. 40. 168.

124. *G. dal Pozzo*. Sulla duplicità del cubo. R.F.M. 6 B. 324.

125. *W. Goering*. Zur Berechnung der Zahl $\pi$. Z.H. 35. 509.

126. *C. Stengel*. Über den Näherungswert $\pi \sim \sqrt{10}$. Z.H. 35. 508.

127. *W. Koch*. Weitere Untersuchungen über Näherungsformeln zur Berechnung der Ludolfschen Zahl. U.M.N. 10. 83; 105; 133. — *T. Adrian*. 11. 31.

128. *G. N. Watson*. Mathematical note. M.G.S. 2. 361.

Siehe auch 76; 112; 119; 3584.

**Numerische Gleichungen.**

129. *R. de Montessus*. La résolution numérique des équations. S.M. 33. 26.

130. *C. Michel*. Sur les méthodes d'approximation. R.M.S. 15. 89; 113.

131. *P. Werkmeister*. Graphisch-numerische Methode zur beliebig genauen Bestimmung der Wurzeln einer numerischen Gleichung. Z.S. 51. 104.

132. *J. Richard*. Sur la méthode d'approximation de Newton. R.M.S. 15. 137.

133. *M. Lerch*. Sur une amélioration de la méthode d'approximation de Newton. E.M. 6. 292.

134. *F. Giudice*. Metodo di Newton perfezionato e nuovo metodo pel calcolo assintotico delle radici reali d'equazioni. A.A.T. 40. 83; 105.

135. *O. Niccoletti*. Su alcune applicazioni del teorema di Sturm. A.A.T. 39. 455.

Siehe auch 110; 165—171; 275; 3352; 3353.

**Empirische Formeln.**

136. *V. Hensen*. Das graphische Verfahren zur Entwicklung korrekter Kurven aus Beobachtungsresultaten. N.G.G. 1904. 131.

Siehe auch 147.

**Interpolation.**

137. *S. Bernstein*. Sur l'interpolation. S.M. 33. 33.

138. *O. Biermann*. Ein Problem der Interpolationsrechnung. M.H. 16. 49.

139. *H. Zemplén*. Über graphisches Interpolieren (ung). M.P.L. 12. 96.

140. *F. E. Ross*. An application of Stirlings interpolation formula. M.M.F. 12. 43.

141. *F. G. Teixeira*. Sur une formule trigonométrique d'interpolation. E.M. 6. 214.

142. *M. Krause*. Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes. C.R. 40. 1442.

143. *E. Borel*. Sur l'interpolation des fonctions continues par les polynomes. V.I.M.C. 3. 229.

144. *H. Zemplén*. Étude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationelles en fractions partielles. A. Gr. (3) 8. 214.

145. *A. A. Markoff*. Recherches sur les valeurs extrêmes des intégrales et sur l'interpolation. A.M. 28. 243.

Siehe auch 63; 1770.

**Harmonische Analyse.**

146. *S. P. Thompson*. Note on an approximate rapid method of harmonic analysis. P.P.S.L. 19. 443.

147. *C. Runge*. Über die Zerlegung einer empirischen Funktion in Sinuswellen. Z.S. 52. 117.

148. *L. Steiner*. Der tägliche Gang der erdmagnetischen Elemente im Kingua-Fjord. A.D.S.H. 27. 3.

149. *J. Schneider*. Die tägliche Luftbewegung über Hamburg in den einzelnen Monaten des Jahres ermittelt durch Anwendung der doppelten harmonischen Analyse. A.D.S.H. 27. 4.

Siehe auch 39; 40 265

## Mathematische Tafeln.

**150.** *J. de Mendisabal Tamborrel.* Tables numériques d'après la division décimale de la circonférence et du jour. M. y R. M. 13 Suppl.

**151.** *W. T. Elderton.* Tables of powers of natural numbers and of the sums of natural numbers from 1—100. Bi 2. No. 9.

**152.** *A. Cunningham.* Factor tables. M. M. 39. 24.

**153.** *A. Cunningham.* Corrigenda in Mr. W. Shanks tables: On the number of figures in the reciprocal of a prime. T. R. S. E. 73. 359.

**154.** *A. Cunningham.* On hauptexponent tables. M. M. (2) 33. 145.

**155.** *W. H. Bussey.* Galois field tables for $p^n \leqq 169$. S. M. Am. 12. 22.

**156.** *A. S. Verebrjusov.* Tablica dlja razloženija kvadratnych kornej iz celych čisel v nepreryvnyja drobi (Tabelle zur Ausziehung der Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen mittels Kettenbrüchen). S. M. M. 24. 501.

**157.** *P. J.* Wo findet man Tafeln des Integrallogarithmus? Z. S. 52. 222.

**158.** *W. L. Miller* and *T. R. Rosebrugh.* Numerical values of certain functions involving $e^{-x}$. P. T. R. S. C. (2) 9. 73.

**159.** *G. Witt.* Tafeln zur bequemen Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung. A. N. K. 165. 33.

**160.** *J. G. Isherwood.* Tables of the Bessel functions of pure imaginary values of the argument. S. P. M. 48 No. 19.

Siehe auch 294; 2019; 2075; 2077; 2119; 2137; 3765; 3766; 3784; 3856.

## Nomographie.

**161.** *M. d'Ocagne.* Coup d'oeil sur la théorie la plus générale de la nomographie. A. F. 1903. 180.

**162.** *C. G. Knott.* Polar plotting paper. N. 71. 296.

**163.** *M. d'Ocagne.* Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques. S. M. 32. 196.

Siehe auch 43; 113; 179; 2128; 3480; 3489; 3590—96.

## Graphischer Kalkül.

**164.** *I. Ionescu.* Practica constructiunilor grafice sau geometria aplicată. G. M. B. 10. 200.

**165.** *W. O. Hemming.* A graphical solution of the typical quadratic equation $ax^2 \pm bx \pm c = 0$. M. G. S. 3. 86.

**166.** *D. Gambioli.* Nota sopra una costruzione geometrica delle radici di un' equazione di 2. grado. Pit. 10. 102.

**167.** *A. Padoa.* Esposizione elementare del metodo di Steiner per la risoluzione grafica delle equazione di 2. grado. B. D. M. 3. 1.

**168.** *M. Pelnár.* Příspěvek ku grafickemú řešeni rovnic kvadratických. (Beitrag zur graphischen Lösung der quadratischen Gleichungen.) C. 33. 315.

**169.** *J. Sobotka.* Zur konstruktiven Auflösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades. S. G. B. 1904. Nr. 33.

**170.** *J. Sobotka.* Příspěvek ku grafickému řešeni rovnic 2., 3. a 4. stupně. (Beitrag zur graphischen Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades.) C. 3. 1; 97.

**171.** *H. J. Thomsen* Graphical solution of cubic and quartic equation. N. 72. 295.

**172.** *L. E. Dickson.* Graphical methods in trigonometry. M. M. F. 12. 129.

**173.** *J. A. Harris.* On the use of a drawing board and scales in trigonometry and navigation. S. (2) 18. 108.

**174.** *R. M. Milne, A. P. Trotter, S. J. Crookes, W. Larden, W. J. Dobbs.* Graphic methods in an educational course of mechanics. N. 70. 5; 81; 103; 125.

**175.** *L. Rauch.* Die graphische Ermittelung des Papiereinganges. Ö. Z. V. 1904. 361.

**176.** *P. Ayné.* Nouvelle application des méthodes graphiques à l'étude des opérations financières. R. G. O. 15. 733.

**177.** *G. Kummer.* Die Genauigkeit graphischer Flächeninhaltsberechnungen. V. L. V. 1904. 290.

**178.** *F. Stupecký.* Ein Beitrag zur graphischen Behandlung hydrometrischer Aufgaben. Ö. W. Ö. B. 1903. 860.

**179.** *W. Köppen.* Tafel zur graphischen Ableitung der Höhen aus den Meteorogrammen bei Drachenaufstiegen. A. H. 32. 270.

Siehe auch 50; 52; 131; 136; 139; 274; 293; 303; 514; 1196; 1382; 1527; 1534; 2029; 2030; 2047; 2138; 3354—60; 3599.

## Geometrische Näherungsmethoden.

**180.** *F. Villareal.* Inscripcion de polígonos. R. C. L. 8. 153.

**181.** *G. Bratu.* Asupra eneagonului regulat. (Über das reguläre Neuneck.) G. M. B. 11. 31.

**182.** *T. Harmuth.* Näherungsweise Konstruktion des Winkels von 1°. U. M.N. 11. 14.

**183.** *U. Ceretti.* Sopra una costruzione approssimata del quadrato equivalente ad un dato cerchio. Pit. 11. 136.

**184.** *C. Stengel* Über den Näherungswert $\pi = \sqrt{10}$. Z.H. 35. 508.

**185.** *F. Blencke.* Konstruktion eines Näherungswertes für $\frac{\pi}{2}$. U.M.N. 10. 89.

**186.** *L. Pilgrim.* Binomische und trinomische Näherungsflächen algebraischer Flächen. M.B. (2) 7. 19, 33.

Siehe auch 3240; 3537; 3585.

### Winkelteilung.

**187.** *Bertling.* Stereometrische Winkelteilung. U.M.N. 11. 84-

**188.** *P. Carrara.* I 3 problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. R.F.M. 5. 399.

**189.** *P.* Elementare Winkelteilung. U.M.N. 11. 60.

**190.** *R. T. Aley.* Note on Angels method of inscribing regular polygons. P.I.A S. 1898. 92.

**191.** *J. D. Everett.* Note on Borgnet's method of dividing an angle in an arbitrary ratio. P.M. (6) 7. 79.

**192.** *J. N. Miller.* A method of dividing the circumference of a circle into 360 equal parts. P.E.M.S. 23. 58.

**193.** *Große.* Die Dreiteilung des Bogens. Z.H. 35. 307.

**194.** *F. Villareal.* Trisección del ángulo. Refutacion. R.C.L. 7. 29.

**195.** *O. Schneider.* Planimetrische Ableitung der kubischen Gleichung für die Winkeltrisektion. U.M.N. 10. 17.

Siehe auch 181; 182; 258; 382; 3350; 3921.

### Korbbogenkurven.

**196.** *E. Teller.* Über Minimumaufgaben bei zweifachen Korbbögen. Z.R. W.L. 1903. 130.

**197.** *W. Heyder.* Das Abstecken von Dreibogenkurven ohne Längenmessung. F.C. 24. 266.

**198.** *R. v. Lichtenfels.* Der Korbbogen und die Übergangskurve im Eisenbahngeleise. Ö.W.Ö.B. 1903. 679.

Siehe auch 199; 3585; 3586; 3588.

### Verbindungskurven.

**199.** *C. Jorio.* Sulle curve di raccordo a 2 centri. Studio grafico. R.T.C. 16. 2.

**200.** *G. Pigozzi.* Raccordo di 2 rettifili stradali con curva parabolica. R.T.C. 16. 129.

Siehe auch 2787; 3529; 3532; 3539; 3541; 3542; 3785.

### Näherungsweise Quadratur.

**201.** *S. O. Šatunovsky.* Über genäherte Quadraturen (russ.) M.S.O. 26. VII.

**202.** *R. W. K. Edwards.* On certain modifications in the coefficients used in Simpson's rule, when either of the outside ordinate is a tangent to the curved boundary of the figure. M M. 34. 121.

Siehe auch 434; 1956; 3349; 3359; 3480.

### Planimeter.

**203.** *J. Barvík.* Studie über Polarplanimeter (tschech.). M.A.T.P. 1903. Nr. 34.

**204.** *A. Kriloff.* On the hatched planimeter. A.P.B. (5) 19. 221.

**205.** *A. N. Krilov.* O planimetre toporike. (Über das Beilplanimeter.) M. Z.P. 323. 6; 113.

**206.** *R. W. K. Edwards.* A radial areal scale. P.R.S.L. 73. 292.

Siehe auch 3496; 3663.

### Rechenapparate.

**207.** *E. Selling.* Neue Rechenmaschine. Z.S. 52. 86.

**208.** *F. Marre.* La plus simple des machines à calculer. Co. (2) 51. 425.

**209.** *R. P. Baker.* A balance for the solution of algebraic equations. M.M. F. 11. 22.

**210.** *R. E. Moritz.* Some physical solutions of the general equation of the $n^{th}$ degree. A. of M. (2) 6. 64.

**211.** *B. Seyfert.* Trigonometrische Berechnungen mit der Rechenmaschine. V.L.V. 1904. 317.

**212.** *J. E. Murray.* A differentiating machine. P.R.S.E. 25. 277.

**213.** *A. Kriloff.* Über einen Integrator von Differentialgleichungen (russ.) A. P.B. (5) 20. 17.

**214.** *N. V. Bervi.* Kinematičeskie vyčislitcli funkcij. (Kinematische Berechnungen von Funktionen.) S.M.M. 24. 523.

**215.** *V. Lebeau.* Sur un nouveau curvigraphe. M.S.L. (3) 5. No. 7.

Siehe auch 120; 3666; 3671; 3673.

### Rechenschieber.

**216.** *C. S. J.* Extract from an old pamphlet on the slide rule. M.G.S. 3. 137.

**217.** *E. Leray.* Comparaison de la règle à calculs Beghin avec la règle Mannheim. B.S.A.F. 17. 191.

**218.** *S. E. Woodbury.* The slide rule position of the decimal point. E.M.W. 80. 474.

**219.** *A. Beghin.* De l'approximation dans les opérations avec les règles à calcul. B.S.A.F. 17. 452.

**220.** *W. Hall.* The slide rule in navigation. N.M.L. 72. 215. — *Ellenborough.* 563.

**221.** *Rimbach.* Chemischer Rechenschieber aus alter Zeit. S.N.G.B. 1905. 1.

Siehe auch 3352; 3664; 3665; 3667—70; 3672.

### Vektoranalysis.

**222.** *G. Hessenberg.* Über einen geometrischen Kalkül. A.M. 29. 1.

**223.** *J. Frischauf.* Das Rechnen mit Vektoren. Z.H. 35. 249.

**224.** *E. Waelsch.* Über Binäranalyse. S.A.W. 113. 645. 1091.

**225.** *E. Waelsch.* Über die lineare Vektorfunktion als binäre doppeltquadratische Form. S.A. W. 113. 1081.

**226.** *W. Voigt.* Etwas über Tensoranalysis. N.G.G. 1904. 495.

**227.** *E. B. Wilson.* On products in additive fields. V.I.M.C. 3. 202.

**228.** *G. Kolossoff.* Über eine Formel analog der von Herrn J. J. Somow für die Ableitung des geometrischen Produkts (russ.). A.U.J. 1905. Nr. 1—2.

**229.** *H. Taber.* The scalar functions of hypercomplex numbers. P.A.Bo. 41. 59.

**230.** *E. Genty.* Note de géométrie vectorielle sur les systèmes orthogonaux. S.M. 32. 211.

**231.** *C. E. Brooks.* A note on the orthic cubic curve. J.H.U.C. 167. 47.

**232.** *O. Lesser.* *L*-Kurven und Evoluten. Z.H. 36. 241.

**233.** *L. Donati.* Sulle variazioni determinate dal movimento in un campo vettoriale. R.I.B. (2) 8. 22.

**234.** *J. Mestres.* Relacion entre les velocidades de las cantidades vectoriales y las de los rotores o ejes materiales de rotacion. M.A.C.B. (3) 5. No. 8.

**235.** *O. Henrici.* On the use of vectorial methods in physics. R.B.A. 73. 51. — *J. Svinburne* 569.

**236.** *L. Prandtl.* Über die physikalische Richtung in der Vektoranalysis. D.V.M. 13. 436.

**237.** *E. Waelsch.* Über die höheren Vectorgrößen der Kristallphysik als binäre Formen. S.A.W. 113. 1107.

Siehe auch 427; 1669.

### Äquipollenzen.

**238.** *I. Ionescu.* O aplicațiunea metoadei echipolențelor. (Über eine Anwendung der Methode der Äquipollenzen.) G.M.B. 10. 230.

### Ausdehnungslehre.

**239.** *R. W. Genese.* On the developement of the „Ausdehnungslehre" according to the principles of statics. V.J. M.C. 3. 433.

**240.** *J. V. Collins.* Uses of the special triple product $ab^2$ of extensive quantities. M.M.F. 12. 38.

### Quaternionen.

**241.** *J. B. Shaw.* Quaternions. S.M. Am. (2) 11. 548.

**242.** *C. J. Joly.* A method of establishing the principles of the calculus of quaternions. P.M. (6) 6. 653.

**243.** *C. G. Knott.* Hamiltons quaternion vector analysis. D.V.M. 14. 167.

**244.** *H. E. Hawkes.* Enumeration of non-quaternion number systems. M.A. 58. 361.

**245.** *J. M. Peirce,* On certain complete systems of quaternion expressions and on the removal of metric limitations from the calculus of quaternions. T.M.Am. 5. 411.

**246.** *I. Stringham.* A geometric construction for quaternion products. S.M. Am. (2) 11. 437.

**247.** *P. A. Mac Mahon.* On the application of quaternions to the orthogonal transformation and invariant theory. P. L.M.S. (2) 1. 210.

**248.** *J. H. Maclagan Wedderburn.* On the applications of quaternions in the theory of differential equations. T.R. S.E. 40. 709.

**249.** *H. R. Philipps.* Application of quaternions to 4 dimensions. J.H.U.C. 174. 9.

### Geometrisches Zeichnen.

**250.** *G. M. Minchin.* Mathematical drawing. N. 71. 211.

**251.** *S. M. Basurco.* La enseñanca del dibujo. R.C.L. 8. 25.

252. *L. Crelier.* Le dessin de projection dans l'enseignement secondaire. E. M. 6. 300.

Siehe auch 100; 302; 3240; 3907.

### Kurvenzeichnen.

Siehe 3519; 3528; 3531; 3540; 3911.

### Technisches Zeichnen.

Siehe 3240.

### Zeichenwerkzeuge.

253. *C. Daviso.* Un nuovo apparecchio americano da disegno. R.T.C. 16. 166.

254. *Palatini.* Per la raccolta di notizie relativi a strumenti di disegno. B. A.M.T. 8. 68.

255. *H. Maurer.* Transporteur und Dreieck. A.H. 33. 278.

256. *P.* Geometrische Dreiecke. U. M.N. 10. 41.

257. *Berau.* Abschiebedreiecke. Ö. Z.V. 1904. 390.

258. *A. de Campos Rodrigues.* Un trisettore d'angoli. Pit. 10. 82.

259. *J. J. Quinn.* A linkage for describing the conic sections by continuous motion. M.M.F. 11. 12.

260. *Z. E. Hornickij.* Proekt elipsografu. (Modell eines Ellipsenzirkels.) R.S.M. 10 No. 4.

261. *J. R. Cotter.* An instrument for drawing conics. P.M. (6) 7. 274; 608.

262. *C. Alasia.* Un conicografo di facile costruzione. Pit. 10. 139.

263. *E. Estanave.* Un hyperbolographe à liquide. R.S. (5) 1. 596; S. M. 32. 58.

264. *E. Estanave.* Un sinusoïdographe à liquide. R.S. (5) 3. 183.

265. *T. R. Lyle.* Preliminary account of a wave tracer and analyser. P.M. (6) 6. 549.

266. *R. Pearson.* On a naval instrument for drawing parabolas. P.M. (6) 7. 200.

Siehe auch 53; 215; 383; 2605; 2817; 3543; 3908—22.

### Darstellende Geometrie.

267. *V. Hübner.* Poznamka ku sestrojeni stop roviny určené odchylkami $\alpha$, $\beta$ od průmĕten. (Bemerkung über die Herstellung der Spuren einer Ebene, welche durch ihre Winkel $\alpha$, $\beta$ gegen die Grundebenen bestimmt ist.) C. 33. 331.

268. *G. Bordiga.* I metodi della geometria descrittiva. A.I.V. 61. 389; 609.

269. *W. Fiedler.* Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit. D.V.M. 14. 493.

270. *A del Re.* Intorno ai metodi di rappresentazione nella geometria descrittiva. A.A.P.N (2) 9 Nr. 10.

271. *G. Loria.* Osservazioni sopra un problema di geometria descrittiva. P. M.R. (3) 1. 143.

272. *D. Adamczik.* Konstruktion der Achsen bezw. konjugierten Durchmesser der Projektionen des Schnittkreises zweier Kugelflächen. Z.H. 36. 188.

273. *C. Heuman.* Zur Theorie der Krümmung nach den Methoden der darstellenden Geometrie. A. Gr. (3) 6. 283.

274. *R. Mehmke.* Über die darstellende Geometrie der Räume von 4 und mehr Dimensionen, mit Anwendungen auf die graphische Mechanik, die graphische Lösung von Systemen numerischer Gleichungen und auf Chemie. M.B. (2) 6. 41.

### Projektion.

275. *G. Tognoli.* Sopre alcune costruzione nel metodo delle proiezioni ortogonali. R.F.M. 6. A. 325.

276. *T. Schmid.* Uneigentliche Projektion und Pillet'sche Konstruktion. M.H. 16. 25.

277. *G. Majcen.* Über Reliefprojektionen des Kreises. M.H. 15. 329.

278. *O. Richter.* Zur Orthogonalprojektion des Würfels. Z.H. 36. 333.

279. *T. Schmid.* Kontourbestimmung der $F_2$. S.A.W. 113. 1423.

280. *A. Sýkora.* Sikmy prumĕt šroubovice. (Schiefe Projektion der Schraubenlinie.) C. 34. 91.

Siehe auch 252; 304.

### Stereographische Projektion.

281. *P. Cassoni.* Sulla proïezione stereoscopica. A.I.V. 62. 35.

282. *H. Hilton.* To find the relation between 2 maps of the same contour on the stereographic projection. M.G.S. 3. 33.

283. *G. Cesàro.* Un lieu géométrique sphérique démontré par les projections stéréographiques. M.S.L. (3) 5 Nr. 4.

### Perspektive.

284. *K. Doehlemann.* Raumkunst und Illusionsmalerei. D.V.M. 14. 47.

**285.** *G. Hauck.* Theorie der parallelprojektiv-trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme Cr. 128. 91.

**286.** *L. Klug.* Konstruktion der Perspektivumrisse und der ebenen Schnitte der $F_2$. S.A.W. 113. 1317.

Siehe auch 3655.

### Axonometrie.

Siehe 285.

### Schattenkonstruktionen.

**287.** *W. Bennett.* Notes on nonhomocentric pencils and the shadow produced by them. P.M. (6) 7. 700.

Siehe auch 983.

### Beleuchtungskunde.

**288.** *V. Hübner.* Osvětleni centrálne a geometrálné koule. (Zentrale und geometrische Beleuchtung der Kugel.) C. 34. 178.

**289.** *A. Sucharda.* Über die Lichtgleichen der Rotationsflächen bei Parallelbeleuchtung. B.I.P. 7. 237.

### Photogrammetrie.

**290.** *S. Finsterwalder.* Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. A. A.M. 22. 226.

**291.** *A. Férand.* Étude de quelquesunes des erreurs qui entachent les mesures faites sur les images photographiées des astres. B.A. 21. 305; 337; 22. 5.

**292.** *V. Cerulli.* Sul lavoro di riduzione delle lastre delle fotografie stellare. M.S.S.I. 33. 19. — *A. Bemporad* 120.

**293.** *L. Mendola.* Un nuovo grafico per la prima reduzione delle misure stellari fotografiche. M.S.S.I. 32. 272.

**294.** *S. Morano.* Tavole matematiche pei calcoli di riduzione delle fotografie stellari per la zona Vaticana. N.L.A. 57. 72; 95; 127; 161; 191.

**295.** *L. Carnera.* Vermessung photographischer Aufnahmen des Planeten (433) Eros. P.A.O.H. 1. 120.

**296.** *E. v. Hübl.* Die stereophotogrammetrische Terrainaufnahme. M.M. G.I. 1903. 182.

**297.** *S. Finsterwalder.* Flüchtige Aufnahmen mittels Photogrammetrie. V.I. M.C. 3. 476.

**298.** *S. Finsterwalder.* Eine neue Art, die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden. S.A.M. 34. 103.

**299.** *A. Lekée.* La photogrammetrie en hydrographie. R.S. (5) 1. 330.

Siehe auch 34; 3572; 3656—58.

### Kristallographie.

**300.** *H. Marshall.* Crystallographical notes. P.R.S.E. 25. 383.

**301.** *Grattarola.* Cristallografia. A. S.T.P. 14.

**302.** *S. L. Penfield.* On crystal drawing. A.J.S. (6) 19. 39.

**303.** *G. Cesàro.* Résolution graphique des cristaux. N.M.A.B. 54 Nr. 1; 4.

**304.** *H. Hilton.* On crystallographic projections. P.M. (6) 9. 85.

**305.** *C. Viola.* Über das Grundgesetz der Kristalle. C.M.G. 1905. 225.

**306.** *V. Goldschmidt.* Flächen oder Zonen als Ausgang der Formenentwicklung. Z.K.M. 40. 385.

**307.** *C. Viola.* Zwei Sätze aus der Zonenlehre. Z.K.M. 40. 495.

**308.** *E. Sommerfeldt.* Eine Erweiterung der Komplikationsregel. C.M.G. 1905. 427.

**309.** *G. Tschermak.* Einheitliche Ableitung der Kristallisations- und Zwillingsgesetze. Z.K.M. 39. 433.

**310.** *E. v. Fedorow.* Theorie der Kristallstruktur. Z.K.M. 40. 529.

**311.** *F. Haag.* Zu E. v. Fedorows Notiz betreffend ein Minimumproblem in der Gestaltenlehre. Z.K.M 40. 497.

**312.** *E. v. Fedorow.* Einige Folgerungen aus dem Syngonieellipsoidgesetze. Z.K.M. 40. 332.

**313.** *L. Borgström* u. *V. Goldschmidt.* Kristallberechnung im triklinen System, illustriert am Anorthit. Z.K.M. 41. 63.

### Modelle.

**314.** *Weist.* Zur stereometrischen Veranschaulichung. Z.H. 36. 336.

**315.** *L. Klug.* Konstruktion des Reliefs einer $F_2$. S.A.W. 114. 65.

**316.** *P. Stäckel* Über das Modell einer $F_3$ die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt. Z.S. 51. 98.

**317.** *F. Schilling.* Über neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie nebst einer geometrischen Einführung in dieses Gebiet. Z.S. 52. 1.

Siehe auch 380; 600; 1285; 1362; 1525.

### Mechanik.

**318.** *P. Duhem.* Die Entwicklung der Mechanik (poln). W.M. 8. 1; 191.

**319.** *A. Gouilly.* Enseignement élémentaire de la mécanique. E.M. 6. 219; R.S. (5) 1. 763.

Siehe auch 174.

### Geschichte der Mechanik.

Siehe 330.

### Prinzipien der Mechanik.

**320.** *E. Picard.* Les principes de la mécanique. R.G.O. 15. 1063; J.D.S. 1905. 42.

**321.** *R. de Saussure.* Les bases physiques et logiques de la mécanique. R.S. (5) 3. 577.

**322.** *H. Padé.* Barré de Saint Venant et les principes de la mécanique. R.G.O. 15. 761.

**323.** *M. Réthy.* Über das Grundprinzip der analytischen Mechanik (ung.) M.P.L. 13. 204.

**324.** *G. Sorel.* Sur divers aspects de la mécanique. R.M.M. 11. 716.

**325.** *G. H. Bryan.* Dynamical and granular media. N. 69. 250.

**326.** *H. Kleinpeter.* Zur Einführung der Grundbegriffe der Mechanik. Z.R. 29; Z.P. 17. 300.

**327.** *R. de Saussure.* Sur les grandeurs fondamentales de la mécanique. A.S.G. (4) 18. 267. 516.

**328.** *J. Krkoška.* O síle. (Über Kräfte). C. 34. 21.

**329.** *R. de Saussure.* Le temps, l'effort et l'espace. A S.G. (4) 18. 221.

**330.** *T. Körner.* Der Begriff des materiellen Punktes in der Mechanik des 18. Jahrhunderts. B.M. (3) 5. 15.

**331.** *F. Siacci.* Sul principio dei lavori virtuali. R.A.N. (3) 11. 46.

**332.** *G. Hamel.* Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik. M.A. 59. 416.

**333.** *P. Duhem.* Sur les origines du principe des déplacements virtuels. C.A. 141. 525.

**334.** *F. Lindemann.* Über das d'Alembertsche Prinzip. S.A.M. 34. 77.

**335.** *H. Kleinpeter.* Die Relativität aller Bewegung und das Trägheitsgesetz. A.N.L. 3. 381.

**336.** *Clariana y Ricart.* Importancia de ciertas funciones para obtener directe y facilmente muchas integrales de aplicacion a la mecanica racional. M.A.C.B. (3) 4 Nr. 37.

**337.** *J. Levi-Civita.* Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili. M.A. 59. 383.

**338.** *M. Réthy.* Ostwalds Prinzip über den Energieumsatz (ung). M.T.E. 21. 459; M.P.L. 12. 111.

**339.** *G. Zemplén.* Über das Prinzip des größten Energieumsatzes (ung.). M.P.L. 12. 372.

**340.** *C. S. Hilbert.* Über das Prinzip der kleinsten Wirkung. S.A.M. 34. 125.

**341.** *M. Réthy.* Über das Prinzip der Aktion u. über die Klasse mathematischer Prinzipien, der es angehört. B.M.N. 20. 289; M.A. 58. 169.

**342.** *E. Cominotto.* Un apparecchio per la dimostrazione del principio dell' azione e della reazione. N.C.P. (5) 9. 295.

**343.** *B. Wolff.* Demonstrationen zu der Drehmomentengleichung und der dynamischen Grundgleichung, der Beziehung zwischen der Kraft, Masse und Beschleunigung M.B. (2) 6. 35.

**344.** *A. Brill.* Über zyklische Bewegung. M.A. 58. 469.

**345.** *Juppont.* Critique de la mécanique classique et essai de mécanique naturelle. F.T. (10) 3. 177.

**346.** *Juppont.* La mécanique „de l'école du fil" et l'énergie. F.T. (10). 4. 33.

Siehe auch 69; 463; 479; 521; 654; 2721.

### Kinematik.

**347.** *W. v. Dücker.* Eine Aufgabe aus der Kinematik. A.G. (3) 8. 151.

**348.** *R. Magini.* Sulle accelerazioni d'ordine superiore. A.I.V. 62. 1063.

**349.** *J. van de Griend jr.* Snellheidsassen. N.A.W. (2) 6. 284.

**350.** *E. Cotton.* Généralisation de la théorie du trièdre mobile. S.M. 33. 42.

**351.** *J. Ruiz-Castizo Ariza.* Algunas fórmulas para el empleo de ejes coordenades oblícuos en la mecánica analítica. R.T.M. 4. 20; 72.

**352.** *R. Bevard.* Sur le déplacement d'une figure de forme invariable. B.M.G. 9. 166.

**353.** *L. E. J. Brouwer.* Over een splitsing van de continue beweging om een vast punt $O$ van $R_4$ in 2 continue bewegingen om $O$ van $R_3$'s. C.A.A. 12. 819. 941. — *E. Jahnke.* 940.

**354.** *G. Darboux.* Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du déplacement d'une figure invariable. B.D. (2) 29. 34.

**355.** *L. Lévy.* Sur les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des lignes sphériques. S.M. 32. 203.

**356.** *J. Le Roux.* Sur certains mouvements des plans d'un système invariable

et les mouvements à trajectoires sphériques. T.S.U.R. 3. 189.

857. *L. Lecornu.* Sur le rendement du joint universel. C.R. 138. 1330.

858. *A. Bienaymé.* Essai sur le déplacement d'un madrier sur 2 rouleaux non parallèles. N.A. (4) 3. 485.

859. *E. J. Coker.* Note on the application of Fourier's series to the determination of the form of cams to fulfil given conditions of displacement, velocity and acceleration. P.T.R.S.C. (2) 9. 53.

860. *de Guiche* et *H. Gilardoni.* Sur un nouvel embrayage. C.R. 140. 1132.

861. *L. Lecornu.* Sur une variante du joint universel. C.R. 138. 1405.

Siehe auch 233; 234; 3507; 3508; 3510; 3532.

## Kinematische Geometrie.

862. *A. Mannheim.* Note de géométrie cinématique. A.F. 1903. 128.

863. *J. J. Quinn.* On kinematic geometry. — A new inversor. M.M.F. 12. 105.

864. *H. Hilton.* An extension of the theory of groups of movements. M.M. 34. 157.

865. *J. Diekmann.* Bewegung und Umformung. Z.H. 34. 97.

866. *J. Diekmann.* Bewegung und Umformung. Z.H. 35. 97.

867. *R. Bricard.* Sur le déplacement d'une figure de grandeur invariable assujettie à 3 conditions. N.A. (4) 3. 448.

868. *C. E. Wasteels.* Sur l'aire linéaire de la surface engendrée par une figure invariable. M. (3) 5. 34.

869. *E. v. Weber.* Die komplexen Bewegungen. B.G.L. 55. 384.

870. *R. Mehmke.* Die kinematische Grundlage von Chr. Wieners Tangentenmethode und ihr Verhältnis zu Robervals Tangentenmethode. M.B. (2) 6. 54.

871. *E. Meyer.* Über das in der kinematischen Geometrie auftretende Nullsystem. M.A. 60. 242.

872. *R. v. Mises.* Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven. Z.S. 52. 44.

Siehe auch 214; 3532.

## Relative Bewegung.

873. *A. Foeppl.* Über absolute und relative Bewegung. S.A.M. 34. 383.

874. *S. Zaremba.* Le principe des mouvements relatifs et les équations de la mécanique physique. B.I.C. 1903. 614.

875. *A. Denizot.* Theorie der relativen Bewegung mit einer Anwendung auf das Problem der Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde sowie auf den Foucaultschen Pendelversuch. B.I.C. 1904. 449.

Siehe auch 835; 1732; 1798; 1825; 1826; 1984.

## Mechanismen.

876. *G. Fontené.* Sur le système articulé de M. Kempe. N.A. (4) 3. 529; 4. 8.

877. *G. Fontené.* Sur un système articulé gauche. N.A. (4) 4. 105.

878. *O. Mohr.* Zur Kinematik ebener Getriebe. Z.S. 51. 29.

879. *O. B. Zimmermann.* A treatment of instant angular and linear velocities in complex mechanisms. T.A.W. 14. 513.

880. *G. Holzmüller.* Vorschlag zum kinematischen Modell eines besonderen Gelenkvierecks. U.M.N. 11. 13.

881. *F. J. Vaes.* Een vraagstuk betreffende stangenvierhoeken. N.A.W. (2) 6. 177.

882. *A. Kempe.* Ein Gelenkmechanismus zur Teilung des Winkels. V.I.M.C. 3. 492.

883. *R. Bricard.* Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur des systèmes articulés qui s'y rattachent. S.M. 32. 269.

884. *E. G. Coker.* Note on the application of Fouriers series to the determination of the forms of cams to fulfil given conditions of displacement, velocity, and acceleration. P.T.R.S.C. (2) 9. 53.

885. *F. Eber.* Die Schubkurbel. U.M.N. 10. 6.

Siehe auch 259; 3497; 3498; 3504; 3509; 3522; 3523.

## Schraubenrechnung.

886. *E. Rath.* Zur Theorie der Schraubenbewegungen. M.B. (2) 6. 85; 7. 9.

887. *Portuondo y Barceló.* Movimentos helizoidales R.A.M. 1. Nr. 7—8.

888. *R. S. Ball.* Some extensions of the theory of screws. T.R.I.A. 32. 299.

889. *C. J. Joly.* Some new relations in the theory of screws. T.R.I.A. 24. 69.

890. *C. J. Joly.* The geometry of a three system of screws. T.R.I.A. 32. 239.

891. *C. J. Joly.* The quadratic screw system; a study of a family of quadratic complexes. T.R.I.A. 32. 155.

**392.** *M. Disteli.* Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyperboloidräder. Z.S. 51. 51.

### Dynamen.

**393.** *F. Hausdorff.* Eine neue Strahlengeometrie. Z.H. 35. 470.

### Statik.

**394.** *M. Bäcker.* A problem in statics and its relation to certain algebraic invariants. P.A.Bo 40. 469.

**395.** *A. Tresse.* Sur l'équilibre du corps solide. N.A. (4) 5. 153.

**396.** *J. Richard.* Un principe de statique établi par la méthode de Lagrange. R.M.S. 14. 441.

**397.** *T. Painlevé.* Sur la stabilité de l'équilibre. C.R. 138. 1555.

**398.** *P. Stäckel.* Mindings Beweis für die Stabilität des Gleichgewichts bei einem Maximum der Kräftefunktion. D.V.M. 14. 504.

**399.** *E. Ferron.* Note exposant un essai de solution complète de problèmes de l'équilibre d'un corps solide qui ne peut que tourner autour de la droite joignant 2 points fixes du corps. I.L. 27. 72.

**400.** *E. Grimsehl.* Das Kräftepaar. Z.P. 17. 321.

**401.** *G. H. Bryan.* Graphic construction for the central axis of 2 nonintersecting forces. M.G S. 3. 109.

**402.** *R. Mehmke.* Nachtrag zu der Mitteilung: Statische Eigenschaft eines Systems von Punkten für die eine beliebige Funktion ihrer Lage ein Minimum ist. (Z.S. 50. 156.) Z.S. 51. 168.

**403.** *G. Vailati.* La dimostrazione del principio della leva data da Archimede nel libro I sull' equilibrio delle figure piane. B.B.L. 7. 33

**404.** *J. Deisinger.* Ein Apparat zur Darstellung des Hebelgesetzes. Z.L.L. 1. 126.

Siehe auch 34; 239; 2905; 3354; 3693; 3697; 3705; 3711; 3723; 3734; 3745.

### Graphische Statik.

**405.** *J. Sobotka.* Über $n$-Ecke und $n$-Seite in perspektiver Lage und über die Konfiguration eines im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystems. B.I.P. 7. 59.

Siehe auch 274; 401; 3524; 3691; 3695; 3712; 3756.

### Zusammensetzung von Kräften.

**406.** *P. Duhem.* Léonard de Vinci et la composition des forces concurrentes. B.M. (3) 4. 338.

**407.** *E. Grimsehl.* Das Parallelogramm der Bewegungen, das Parallelogramm der Kräfte und der Projektionssatz. Z.P. 17. 257.

**408.** *G. B. M. Zerr.* To find the equation to the straight line which is the resultant of a system of forces acting in one plane. M.M.F. 12. 176.

Siehe auch 3715; 3716.

### Schwerpunkte.

**409.** *S. Dautheville.* Sur quelques sommations que l'on rencontre en mécanique. E.M. 5. 437.

**410.** *A. B.* Sui teoremi generalmente attribuiti a Guldino. P.M.R. Suppl. 8. 81.

**411.** *F. Castellano.* Baricentro di un sistema piano di punti con masse imaginarie. P.M.R. (3) 1. 163.

**412.** *J. Tuppy.* Über den Schwerpunkt des eigentlichen Ovals und seines Rotationskörpers. B.K.N.B. 6. 39.

**413.** *R. Gräber.* Inhaltsberechnung und Schwerpunktsbestimmung von Körperstümpfen. Z.H. 35. 193.

Siehe auch 434; 3584.

### Momente.

**414.** *J. Schnöckel.* Verwandlung der Polygone in Dreiecke gleichen Moments beliebigen Grades. Z.S. 51. 41.

**415.** *L. Kann.* Apparat zur mechanischen Bestimmung von Trägheitsmomenten. V.V.F.U.W. 9. 92.

**416.** *E. Rehfeld.* Reduktion der Trägheitsmomente einfacher Körper auf die Trägheitsmomente einzelner Massenpunkte, die auf ihrer Oberfläche liegen. A.Gr. (3) 6. 237.

**417.** *P. H. Schoute.* Le moment d'inertie d'un simplexe $S(n+1)$ de l'espace $E_n$ par rapport à un $E_{n-1}$ de cet $E_n$. R.C.M.P. 19. 156. — *A. Berry.* 314.

**418.** *R. Mehmke.* Über Trägheitsmomente und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebig hoher Stufe. C.A.A. 13. 530.

**419.** *P. Pizzetti.* Relazioni fra i momenti di inerzia di un corpo del quale la funzione potenziale e simmetrica intorno ad un asse. R.A.L.R. (5) 14 A 357.

**420.** *C. Spelta.* Sulla sezioni principali degli elissoidi d'inerzia relativi a punti di un asse principale centrale d'inerzia. G.B. 42. 81; 229.

**421.** *C. S. Jackson.* A contrivance for showing bending moment diagrams. M.G.S. 2. 360.

Siehe auch 409; 1583; 1680; 3578—81; 3583; 3584; 3587.

### Kettenlinien.

**422.** *C. Neumann.* Über die Hervorbringung einer Kettenlinie durch Biegung einer Kreisfläche. B.G.L. 56. 13.

**423.** *S. Composto.* Sulla configurazione d'equilibrio d'un filo sottoposto a force centrali. R.F.M. 5 A. 411.

Siehe auch 2864; 2867; 3698; 3703; 3710; 3729; 3748.

### Dynamik.

Siehe 2683; 2685; 2796; 3524.

### Differentialgleichungen der Dynamik.

**424.** *P. E. B. Jourdain.* On the general equations of mechanics. Q.J. 34. 61.

**425.** *L. Koenigsberger.* Über die aus der Variation der mehrfachen Integrale entspringenden partiellen Differentialgleichungen der allgemeinen Mechanik. S.A.B. 1905. 250.

**426.** *L. Rothmann.* On the form of Lagrange's equations for non holonomic systems. R.B.A. 73. 569.

Siehe auch 374; 430; 474; 484; 485; 523.

### Dynamik des Punktes.

**427.** *A. Gouilly.* Sur l'enseignement élémentaire de la mécanique. E.M. 6. 12; R.S. (5) 1. 379.

**428.** *E. et F. Cosserat.* Sur la dynamique du point et du corps invariable dans le système énergétique. C.R. 140. 932.

**429.** *F. Ricci.* Un teorema di meccanica che fa seguito ad un ben noto di Galileo. R.F.M. 6 B. 220.

**430.** *R. Lehmann-Filhès.* Über die Verwendung unvollständiger Integrale der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung. A.N.K. 165. 209.

**431.** *V. Amato.* Sugl' integrali delle equazioni del moto d'un punto materiale. A.G.C. (4) 17 No. 13.

**432.** *L. Orlando.* Sulla velocità minima nella trajettoria di un grave. A.A.P.M. 1902—03.

**433.** *A. R. Cigala.* Sopra un criterio di instabilità. A.D.M. (3) 11. 67.

**434.** *G. Pennachietti.* Sopra una classe di problemi di meccanica reducibili a quadrature. A.G.C. (4) 17. No. 19.

**435.** *A. M. Hiltebreitel.* Note on a problem in mechanics. S.M.Am. (2) 11. 432.

**436.** *E. Collignon.* Problème de géométrie. A.F. 1903. 1.

**437.** *G. Bardelli.* Sul moviment di un punto in un piano. R.I.M. (2) 38. 663.

**438.** *F. Schuh.* Over de beweging van een materieel deeltje in een vlak eenparig roteerend krachtenveld. N.A.W. (2) 6. 123.

**439.** *V. Nobile.* Sullo studio intrinseco delle curve di caccia. R.C.M.P. 20. 73.

**440.** *R. Kottenbach.* Apparat zum Nachweis des Fallgesetzes und zur Bestimmung der Schwerebeschleunigung. Z.P. 18. 79.

**441.** *M. T. Edelmann.* Zeitbestimmung für kleine Fallräume nach der Methode von Radacovič. P. 25. 461.

**442.** *C. Stéphanos.* Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques. C.R. 140. 1318.

### Zentralbewegung.

**443.** *C. T. Whitmell.* Orbits. J.B.A.A. 14. 321.

**444.** *G. W. Hill.* Exemples of periplegmatic orbits. A.J.B. 24. 9. — *E. O. Lovett 75.*

Siehe auch 1900; 2727.

### Gezwungene Bewegung.

**445.** *L. Lecornu.* Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide. S.M. 32. 50.

**446.** *F. J. Vaes.* Opmerkingen omtrent de beweging in een plat vlak. N.A.W. (2) 6. 249.

**447.** *O. Olsson.* Om den materiella punktes rörelse på en rotationsyta. T.M. 15 B. 49.

Siehe auch 438; 465.

### Brachistochronen.

**448.** *C. Formenti.* Su alcuni classi di linee brachistocrone. R.I.L. (2) 36. 1079.

### Pendel.

**449.** *W. Lorey.* Das Gesetz des mathematischen Pendels auf dem Gymnasium. Z.H. 36. 24.

**450.** *A. G. Greenhill.* Le pendule simple sans approximations. N.A. (4) 4. 97.

**451.** *E. Grimsehl.* Demonstration eines Pendels mit direkt meßbarer Pendellänge. V.D.P.G. 6. 284.

**452.** *A. Emo.* Sul pendelo conico. R.S.I. 37.

**453.** *A. Filippino.* Sopra un particolare sistema di pendoli che rappresenta le molecole dei corpi composti. A.A.T. 39. 652.

**454.** *A. Prey.* Über eine Vorrichtung zur Vermeidung des Mitschwingens des Statives beim Doppelpendel. A.A.W. 1905. 219.

**455.** *H. Rebenstorff.* Abgleichung der Länge von Fadenpendeln. Z.P. 18. 224.

**456.** *A. Filippini.* Sopra un particolare sistema di pendoli che rappresenta le molecole dei corpi composti. A.A.T. 39. 502.

**457.** *J. Mascart.* Pendule en aciernickel entretenu électriquement. C.R. 139. 1026.

**458.** *C. Féry.* Pendule électrique à échappement libre. C.R. 140. 262.

Siehe auch 41; 553.

### Dynamik des Körpers.

**459.** *R. de Saussure.* Théorie géométrique du mouvement des corps solides et fluides. A.S.G. (4) 18. 25.

**460.** *E. Ferron.* Contribution à la théorie générale du mouvement des corps solides naturels. I.L. 27. 1.

**461.** *R. de Saussure.* Théorie générale du mouvement des corps. A.S.G. (4) 18. 25.

**462.** *F. Jung.* Bemerkung zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen. A.Gr. (3) 6. 206.

**463.** *G. Kolossoff.* Über Behandlung zyklischer Systeme mit Variationsprinzipien, mit Anwendungen auf die Mechanik starrer Körper. M.A. 60. 232.

**464.** *de Sparre.* Remarques au sujet de la question de mécanique posée au concours d'agrégation en 1903. N.A. (4) 4. 38.

**465.** *A. R. Cigala.* Sopra un criterio di instabilità. A.D.M. (3) 11. 67.

**466.** *R. de Saussure.* Mouvements infiniment petits d'un corps solide qui possède plusieurs degrés de liberté. A.S.G. (4) 18. 512.

**467.** *J. Andrade.* Détermination des mouvements $\mu$ de solides aux trajectoires sphériques. V.I.M.C. 3. 366.

**468.** *C. Alasia.* Sul movimento di una sfera de rotola in un piano mobile non orizzontale. R.F.M. 6A. 18.

**469.** *J. H. M. Falkenhagen.* Die rollende Lage eines beliebigen schweren Umdrehungskörpers über eine horizontale Ebene. N.A.W. (2) 6. 104.

**470.** *G. H. Bryan* and *W. E. Williams.* The longitudinal stability of aerial gliders. P.R.S.L. 73. 100.

**471.** *M. Krause.* Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Kurbelbewegung. B.G.L. 56. 273.

**472.** *G. Floquet.* Sur le „looping the loop". B.S.S.N. (3) 5. 31.

**473.** *A. Schoenflies.* Über den wissenschaftlichen Nachlaß Plückers. M.A. 58. 385.

Siehe auch 428; 481; 2684.

### Dynamik des Systems.

**474.** *G. K. Suslov.* Über die Bewegungsgleichungen der materiellen Systeme (russ.). B.U.K. 1904 d 10. 59.

**475.** *J. Ruiz-Castizo.* Algúnas formulas para el empleo de ejes coordenados oblicuos en la mecánica analitica. R.T.M. 4. 69.

**476.** *F. Wittenbauer.* Die Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse. Z.S. 52. 150.

**477.** *E. Kasner.* A geometric property of the trajectories of dynamics. S.M.Am. (2) 12. 71.

**478.** *G. Fubini.* Sulle traiettorie di un problema dinamico. R.C.M.P. 18. 301.

**479.** *P. Poinlevé.* Sur le théorème des aires et les systèmes conservatifs. C.R. 139. 1170.

**480.** *P. Bohl.* Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. Cr. 127. 179.

**481.** *J. Gehrke.* Om en anvendelse af ligningen $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ paa et uforanderligt, plan punktsystems bevaegelse. T.M. 15. A. 5.

**482.** *G. Floquet.* Sur le mouvement d'un fil dans un cas où il présente partout égale chance à la rupture. B.S.S.N. (3) 1. 167.

**483.** *H. Nagaoka.* Kinetics of a system illustrating the line and band spectrum and the phenomena of radioactivity. P.M. (6) 7. 445. — *H. A. Schott* 8. 384.

Siehe auch 427; 520; 698; 1047; 1049; 2712.

## Drehung.

**484.** *G. Pennacchietti.* Sulle equazioni differenziali del moto di un corpo solido intorno a un punto fisso. A.G.C. (4) 16 No. 4.

**485.** *P. A. Šiff.* Ob uravnenijach dviženija tjaželago tverdago tela imejuščago nepodvižnuju točku. (Über die Bewegungsgleichungen eines schweren festen Körpers, der einen unbeweglichen Punkt besitzt.) S.M.M. 24. 169.

**486.** *E. Husson.* Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. C.R. 141. 100.

**487.** *G. Dumas.* Sur le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe dans le cas de Mme. Kowalewski. N.A. (4) 4. 355.

**488.** *G. Kolossow.* Bahn des Endpunktes des Hauptmoments der Bewegungsgrößen im Kowalewskischen Problem der Drehung eines festen Körpers (russ.). A.U.J. 1904. No. 4b.

**489.** *F. P. Ruffini.* Delle accelerazioni di alcuni punti nel moto di un sistema rigido con un punto fisso. R.I.B. (2) 7. 11.

Siehe auch 2791; 2866.

## Kreisel.

**490.** *A. G. Greenhill.* The mathematical theory of the top considered historically. V.I.M.C. 3. 100.

**491.** *W. H. Pickering.* A little known property of the gyroscope. N. 71. 608.

**492.** *E. G. Gallop.* On the rise of a spinning top. T.C.P.S. 19. 356.

**493.** *C. Alasia.* Alcune osservazione sul politropio di Sire e sul giroscopio di Foucault. R.F.M. 4. II. 528.

**494.** *H. E. J. G. du Bois.* Hysteretische oriëntatieverschijnselen. C A.A. 13. 753.

Siehe auch 1806; 2793.

## Schwingungen.

**495.** *A. Korn.* Le problème mathématique des vibrations universelles. S.M.Kh. (2) 8. 68.

**496.** *J. Horn.* Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen. Z.S. 52. 1.

**497.** *Guillet.* Entretien des corps vibrants. S.F.P. No. 223. 2.

**498.** *A. E. H. Love.* Some illustrastrations of modes of decay of vibratory motions. P.L.M.S. (2) 2. 88.

**499.** *M. Radaković.* Über die Berechnung der erzwungenen Schwingungen eines materiellen Systems. A.A.W. 1905. 237; S.A.W. 114. 877.

**500.** *T. Terada.* Lissajous' figures by tank oscillation. N. 71. 296.

**501.** *S. Kępiński.* O drganiach poprzecznych prętów sprężystych. (Über die Querschwingungen der elastischen Saiten.) T.W. 16. 71.

**502.** *J. J. C. Müller.* Über schwingende Federn und deren Verwendung zur Frequenzmessung. Z.P. 18. 220.

**503.** *S. Mikola.* Resonanz und Interferenzerscheinungen mit schwingenden Platten und Membranen. Z.P. 17. 209.

**504.** *F. A. Schulze.* Bemerkung zu meiner Arbeit: Über drehende Schwingungen von dünnen Stäben mit rechteckigem Querschnitt und über Verwendung zur Messung der Elastizitätskonstanten. A.P.L. (4) 14. 848.

**505.** *J. Morrow.* On the lateral vibration of bars of uniform and varying sectional area. P.P.S.L. 19. 588.

**506.** *C. Chee.* The whirling and transverse vibrations of rotating shafts. P.P.S.L. 19. 114; P.M. (6) 7. 504.

**507.** *A. G. Kerkhoven-Wijthoff.* On the small oscillations of a system of 2 hemispheres of which one is resting with its spherical surface on the plane face of the other, both rotating with finite velocity about their vertical axes. N.A.W. (2) 7. 48.

**508.** *S. Guggenheimer.* Über die universellen Schwingungen eines Kreisringes. S.A.M. 34. 41.

**509.** *O. Hecker.* Ergebnisse der Messung von Bodenbewegungen bei einer Sprengung. B.G. 6. 87.

**510.** *S. Guggenheimer.* Über die Anwendung der Theorie der universellen Schwingungen auf das Gleichgewichtsproblem des Saturn und seiner Ringe. P.Z. 6. 207.

Siehe auch 584; 615; 719; 720; 823; 824; 826; 917; 2415—17; 2739; 2786.

## Rollbewegung.

Siehe 97; 468; 469; 2746.

## Stoß.

**511.** *J. Hadamard.* Sur un point de la théorie des percussions. N.A. (4) 4. 533.

**512.** *E. Henning.* Vorrichtung zu Versuchen über den elastischen zentralen Stoß. Z.P. 18. 228.

**513.** *K. v. Szily.* Der Stoß rauher Körper bei ebener Bewegung. B.M.N. 19. 283.

**514.** *C. H. Lees.* On a simple graphical method of treating the impact of smooth elastic spheres. P.M. (6) 8. 215.

**515.** *K. Bohlin.* Sur le choc considéré comme fondement des théories de la pression des gaz et de la gravitation universelle. A.M.A.F. 1. 529.

Siehe auch 657; 3271; 3764.

### Reibung.

**516.** *L. Lecornu.* Sur le frottement de glissement. C.R. 140. 635.

**517.** *P. Painlevé.* Sur les lois du frottement de glissement. C.R. 140. 702; 141. 401; 546.

**518.** *de Sparre.* Sur le frottement de glissement. C.R. 141. 310.

**519.** *E. Daniele.* Sulla rappresentazione parametrica delle forze d'attrito. N.C.P. (5) 9. 289.

**520.** *E. Daniele.* Forze d'attrito ed equazioni del movimento nei sistemi liberi. N.C.P. (5) 9. 266.

**521.** *G. Zemplén.* Anwendung der mechanischen Prinzipien auf Bewegung mit Reibung (ung.). M.P.L. 12. 275.

**522.** *L. Lecornu.* Sur la loi de Coulomb. C.R. 140. 847.

**523.** *E. Gieseler.* Die ersten Versuche über Reibung, Wirkungsgrade und Fallgeschwindigkeit. Z.P. 18. 146.

**524.** *A. G. M. Michell.* The lubrification of plane surfaces. Z.S. 52. 123.

Siehe auch 2859; 3674; 3680.

### Reibung fester Körper.

**525.** *E. Daniele.* L'attrito nel movimento di un solido in contatto con un piano. N.C.P. (5) 9. 174.

**526.** *B. Weinberg.* Einige Methoden zur Bestimmung des Koeffizienten der innern Reibung fester Körper (russ.). J.R.P.C.G. 36. 47.

Siehe auch 3675—78; 3681.

### Potentialtheorie.

**527.** *G. K. Sousloff.* Theorie des Potentials und der Hydrodynamik (russ.). B.U.K. 1904 e No. 6—9; 10. 129.

**528.** *A. C. Dixon.* On the Newtonian potential. Q.J. 35. 283.

**529.** *A. C. Dixon.* On many-valued Newtonian potentials. P.L.M.S. (2) 1. 415.

**530.** *F. Gráf.* O vlastnostech Newtonova a logarithmic kého potencialu a jeho pronich derivaci v některých jednoduchých singularitách hmotných ploch a křivek. (Über die Eigenschaften des Newtonschen und des logarithmischen Potentials und seiner ersten Ableitungen in einigen einfachen Singularitäten der materiellen Flächen und Kurven.) C. 34. 5; 130.

**531.** *L. Koenigsberger.* Das Energieprinzip für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung und einer beliebigen Anzahl abhängiger und unabhängiger Variabeln. S.A.B. 1904. 1342.

**532.** *T. Boggio.* Sulle funzioni di Green d'ordine *m*. R.C.M.P. 20. 97.

**533.** *L. Orlando.* Sulla funzione *n*-ma di Green par la sfera. G.B. 42. 292.

**534.** *C. W. Oseen.* Oni konjugerade potential funktioner af 3 variabler. A.M.A.F. 1. 651.

**535.** *E. Boggio-Lera.* Sopra una nuova forma della funzione potenziale. A.G.C. (4) 16. No. 6.

**536.** *L. Orlando.* Sopra alcune funzioni ausiliari. R.A.L.R. (5) 14. A. 138.

**537.** *C. W. Oseen.* Zur Theorie der verzweigten Potentialfunktionen. A.M.A.F. 1. 703.

**538.** *T. Boggio.* Sulle funzioni associate e sulle linee di forza di un elissoide di rotazione eterogeneo. R.I.L. (2) 38. 454.

**539.** *W. A. Steklow.* Über einige allgemeine Gleichungen, welche mehreren in der Analysis gebräuchlichen Funktionenreihen gemeinsam sind (russ.). A.P.M. (8) 15 No. 7. 1.

**540.** *O. D. Kellogg.* Unstetigkeiten in den linearen Integralgleichungen. M.A. 58. 441.

**541.** *D. Hilbert.* Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. V.I.M.C. 3. 233.

**542.** *K. Stojanowitsch.* Widerstandspotential (serb.). P.A.B. 67. 32.

**543.** *L. Fejér.* Über 2 Randwertaufgaben. B.M.N. 19. 329.

**544.** *G. Lauricella.* Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato. R.A.L.R. (5) 14. A. 70.

**545.** *S. Zaremba.* Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. J.M. (5) 10. 395.

**546.** *J. Plemelj.* Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie. M.H. 15. 337.

**547.** *E. R. Neumann.* Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. P.J.G. 37.

**548.** *Paci.* Derivate terze della funzione potenziale di superficie. A.R.U.G. 11.

**549.** *G. Picciati.* Sulle funzioni potenziali elicoidali. R.A.L.R. (5) 13. B. 595.

**550.** *L. Koenigsberger.* Das Energieprinzip für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung und einer beliebigen Anzahl abhängiger und unabhängiger Variabeln. S.A.B. 1904. 1342.

**551.** *S. Zaremba.* Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la physique. R.C.M.P. 19. 140.

Siehe auch 396; 419; 794.

### Attraktion.

**552.** *E. Hoffmann.* Die Entwicklung der verschiedenen Probleme der Maxima der Anziehung. B.M. (3) 5. 366.

**553.** *A. Favaro.* Una critica di Giovanni Plana ai dialoghi Galileiani delle nuove scienzi. A.A.T. 39. 493.

**554.** *G. W. Walker* and *A. Gray.* Attraction between concentric hemispherical shells. N. 69. 560.

**555.** *G. Morera.* Sull' attrazione di un elissoide eterogeneo. A.A.T. 39. 252; 258.

Siehe auch 2675.

### Gravitation.

**556.** *E. W. Brown.* On the verification of the Newtonian law. M.N.A.S. 63. 396.

**557.** *J. R. Rydberg.* Einige Bemerkungen über das Gravitationsgesetz. V.A.G. 39. 190.

**558.** *A. Korn.* Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. S.A.M. 33. 383; 563.

**559.** *A. P. Panoff.* L'attraction newtonienne considérée comme une fonction du temps. A.N.K. 167. 273.

**560.** *A. Despaux.* Cause de la gravitation et de la cohésion. R.S. (5) 1. 611.

**561.** *E. Bandl.* Das elektrodynamische Prinzip in seiner Anwendung auf die Erscheinung der Massenanziehung. N.R. 20. 273.

**562.** *W. P. Dreaper.* Note on gravity and chemical action. C.N. 90. 53.

**563.** *W. Sutherland.* The electric origin of gravitation and terrestrial magnetism. P.M. (6) 8. 685.

**564.** *E. v. Scheidler.* Über das Verhältnis der Gravitationskonstante zur absoluten Ladung des Elektrons. P.Z. 6. 237.

**565.** *E. Take.* Über etwaige Korrektionen an der von Richarz und Krigar Menzel ausgeführten Gravitationsbestimmung. A.P.L. (4) 15. 1010.

**566.** *B. Davis.* A suggestive relation between the gravitational constant and the constants of the ether. S. (2) 19. 928.

**567.** *K. R. Koch.* Über Beobachtungen, welche eine zeitliche Änderung der Größe der Schwerkraft wahrscheinlich machen. A.P.L. (4) 15. 146.

**568.** *J. M. Schaeberle.* On certain evidence indicating the existence in the solar system of streams of gravitating matter ejected from the sun. A.N.K. 169. 131.

Siehe auch 515; 695; 696; 1986; 3567.

### Hydrostatik.

**569.** *C. M. van Deventer.* Over de hydrostatika van Archimedes. N.T.N.L. 63. 313.

**570.** *G. Heinrich.* Hydrostatischer oder hydrodynamischer Auftrieb. Z.P. 17. 221. — *H. Kuhfahl* 318.

**571.** *R. W. H. T. Hudson.* The surface of flotation. M.M. (2) 33. 50.

Siehe auch 816; 1681; 2442.

### Gleichgewicht von Körpern in Flüssigkeit.

**572.** *Mathy.* Résistance de l'ellipsoide immergé dans un fluide parfait incompressible. Intégration des formules. Expressions des valeurs approchées. Cas du disque plat et de l'aiguille. N.A. (4) 5. 170.

Siehe auch 571; 590.

### Hydrodynamik.

**573.** *P. Duhem.* Recherches sur l'hydrodynamique. A.T. (2) 5. 197; 353.

**574.** *U. Grassi.* Studii d'idrodinamica A.S.P. 9. No. 3.

**575.** *Finzi* e *Soldati.* Dinamica de fluidi. Pol.M. 1903 Dez., 1904 Febr.

**576.** *Bernardi.* Paradosso idrodinmico. Pol.M. 1904 Nov.

**577.** *M. A. E. Stephansen.* Von d Bewegung eines Kontinuums mit ein Ruhepunkte. A.M.C. 25. No. 3.

**578.** *S. Kondla.* O nul-mjesti gibanja tekućine. (Über die Stellen,

denen die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit Null ist.) T.A.A. 154. 132.

**579.** *J. Weingarten.* Ein einfaches Beispiel einer stationären und rotationslosen Bewegung einer tropfbaren schweren Flüssigkeit mit freier Begrenzung. V.I.M.C. 3. 409.

**580.** *P. Schönhals.* Druckverminderung in einem Wasserstrom. Z.P. 17. 221.

**581.** *P. E. Belas.* On the structure of water-jets and the effect of sound thereon. P.S.D. (2) 10. 203.

**582.** *Jouguet.* Sur la similitude dans le mouvement des fluides. C.R. 141. 396.

**583.** *P. Duhem.* Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux. P.S.B. 1902—03. 52.

**584.** *P. Duhem.* Effets des petites oscillations des conditions extérieures sur un système dépendant de 2 variables. C.R. 138. 1313.

**585.** *S. Zaremba.* Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation. B.I.C. 1903. 594.

**586.** *Jouguet.* Remarques sur la loi adiabatique d'Hugoniot. C.R. 139. 786.

**587.** *E. Estanave.* Note sur le tracé des sections planes des surfaces au moyen de la surface libre d'un liquide. J.P. (4) 3. 705.

**588.** *P. Duhem.* Considérations sur la stabilité et particulièrement sur la stabilité des corps élastiques. P.S.B. 1902—03. 98.

**589.** *P. Duhem.* Influence exercée par de petites variations des actions extérieures sur un système que définissent 2 variables affectées d'hystérésis. C.R. 138. 1471.

**590.** *J. Boussinesq.* Pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un ellipsoide à axes inégaux immergé dans ce courant. C.R. 140. 15.

**591.** *J. Boussinesq.* Équation de 2. approximation pour l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et à faibles pentes. C.R. 139. 417.

**592.** *J. Boussinesq.* Équations générales du mouvement des nappes d'eau infiltrés dans le sol. C.R. 139. 387.

**593.** *J. Boussinesq.* Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée dans le sol, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors. C.R. 139. 441.

**594.** *E. Maillet.* Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés. S.M. 33. 2.

**595.** *L. Maillard.* Sur l'expérience de Perrot. C.R. 139. 562.

**596.** *W. Schmidt.* Über eine Methode zur Bestimmung des adiabatischen Kompressionsmoduls von Flüssigkeiten. A.A.W. 1905. 238.

**597.** *E. Penzold.* Über die Druckverhältnisse im Saugheber. Z.P. 18. 156.

**598.** *G. A. Zanon.* Sulla supposta causa della cavità generata dall' elica nell' acqua: teoriche e applicazioni pratiche. A.I.V. (8) 5. 6.

**599.** *G. Scheffers.* Über ein Problem, das mit der Theorie der Turbinen zusammenhängt. Z.S. 51. 88.

Siehe auch 344; 459; 527; 570; 797; 1111; 1954; 2206; 2213; 2434; 3363; 3376; 3388; 3389; 3401; 3406; 3423; 3428; 3438; 3447.

## Wellenlehre.

**600.** *K. Honda.* A simple model for illustrating wave-motion. N. 71. 295.

**601.** *P. Forchheimer.* Wasserbewegung in Wanderwellen. S.A.W. 112. 1697.

**602.** *N. Kapzov.* Über die Druckkräfte der Wellen, welche sich auf einer Flüssigkeitsoberfläche ausbreiten. A.P.L. (4) 17. 64.

**603.** *H. Bateman.* The solution of partial differential equations by means of definite integrals. P.L.M.S. (2) 1. 451.

**604.** *J. Hadamard.* Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles. V.I.M.C. 3. 265.

**605.** *H. Lamb.* On group velocity. P.L.M.S. (2) 1. 473.

**606.** *H. C. Pocklington.* Growth of a wave-group when the group-velocity is negative. N. 71. 607.

**607.** *Lord Kelvin.* Deep water ship-waves. P.R.S.E. 25. 562.

**608.** *Lord Kelvin.* On the front and rear of a free procession of waves in deep water. P.R.S.E. 25. 311; P.M. (6) 8. 454.

**609.** *Lord Kelvin.* On deep water two-dimensional waves produced by any given initiating disturbance. P.R.S.E. 25. 185; P.M. (6) 7. 609.

**610.** *T. H. Havelock.* Mathematical analysis of wave propagation in isotropic space of $p$ dimensions. P.L.M.S. (2) 2. 122.

**611.** *W. H. Fry.* Ocean waves. N.M.L. 1905. 592.

**612.** *A. E. H. Love.* The propagation of wave motion in an isotropic elastic solid medium. P.L.M.S. (2) 1. 291.

**613.** *J. Bousinesq.* Propagation des ondes le long d'une colonne liquide com-

pressible se composant de filets à vitesses inégales et remplissant un tuyau élastique horizontale sans tension longitudinale. C.R. 141. 8.

**614.** *J. Boussinesq.* Sur un cas simple où se calculent aisément l'action mutuelle des anneaux juxtaposés constituant un tuyau et l'influence de cette action mutuelle sur la propagation des ondes liquides dans le tuyau. C.R. 141. 234.

**615.** *A. Pizzarello.* Oscillazioni isocrone del mercurio in tubi communicanti. N.C.P. (5) 9. 375.

**616.** *E. Jouguet.* Sur l'onde explosive. C.R. 139. 121.

**617.** *L. Prandtl.* Über die stationären Wellen in einem Gasstrahl. P.Z. 5. 598.

Siehe auch 265; 728; 1416; 2169—72; 3392.

### Bewegung der Flüssigkeiten in Kanälen.

**618.** *H. Hahn, G. Herglotz* und *K. Schwarzschild.* Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen. Z.S. 51. 411.

**619.** *J. Boussinesq.* Calcul, pour les diverses contextures et épaisseurs de paroi possibles, de la résistance élastique qu'un tuyau sans tension longitudinale oppose au gonflement de la colonne liquide le remplissant. C.R. 141. 81.

**620.** *Lüdecke.* Berechnung der Geschwindigkeit des in Wässerungsgräben fließenden Wassers und Wassermessung mittels des Überfalls von Cipoletti. K.T. 1904. 237; V.L.V. 1904. 270; 273.

Siehe auch 580; 613—15; 902; 2441; 3364; 3379; 3380; 3426; 3427; 3440; 3446; 3456; 3465.

### Ausfluß von Flüssigkeiten.

**621.** *J. Boussinesq.* Complément au mémoire intitulé „Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrés dans le sol et sur le débit des sources. J.M. (5) 10. 363.

**622.** *J. Hermanell.* Theorie des freien Ausflusses von Flüssigkeiten an Mündungen und Überfällen. S.A.W. 113. 879.

Siehe auch 581; 590; 591; 593; 771; 961; 3393; 3421.

### Gleichgewicht rotierender Flüssigkeiten.

**623.** *A. Liapounoff.* Sur la stabilité des figures ellipsoidales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation. A.T. (2) 6. 5.

### Wirbel.

**624.** *W. Büchel.* Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung und 1. Grades definierten Kurvenschar. S.M.H. 4. 133.

**625.** *F. Ahlborn.* Die Wirbelbildung im Widerstandsmechanismus des Wassers. M.K. 1904. Nr. 23.

**626.** *V. Bjerknes.* Über Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen. A.M.A.F. 1. 225.

**627.** *E. Laura.* Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli in un fluido incompressibile indefinito. A.A.T. 40. 262; 296.

Siehe auch 661; 3403.

### Reibung von Flüssigkeiten.

**628.** *Lord Rayleigh.* Fluid friction on even surfaces. P.M. (6) 8. 66.

**629.** *L. Prandtl.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. V.I.M.C. 3. 484.

**630.** *L. Natanson.* Über die Fortpflanzung einer kleinen Bewegung in einer Flüssigkeit mit innerer Reibung. Z.P.C. 40. 581.

**631.** *H. Rudorf.* Über die innere Reibung von Lösungen. Z.E. 10. 473.

**632.** *E. Grüneisen.* Über die innere Reibung wäßriger Salzlösungen und ihren Zusammenhang mit der elektrolytischen Leitung. A.P.T.R. 4. 237.

Siehe auch 686; 1506; 3414; 3418; 3679.

### Viskosität.

**633.** *L. Natanson.* Sur l'approximation de certaines équations de la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 283.

**634.** *L. Natanson.* Sur l'application des équations de Lagrange dans la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 268.

**635.** *S. Zaremba.* Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité. B.I.C. 1903. 380.

**636.** *P. Duhem.* Sur la viscosité et le frottement au contact de deux fluides. P.S.B. 1902—03. 27.

**637.** *P. Duhem.* Stabilité et viscosité. M.S.B. (6) 3. 121.

**638.** *A. E. Dunstan.* The viscosity of liquid mixtures. I. J.C.S. 85. 817; 87. 11.

**639.** *L. Natanson.* Über die Dissipationsfunktion einer zähen Flüssigkeit. Z.P.C. 43. 179.

**640.** *L. Natanson.* Remarques sur la théorie de la relaxation. B.I.C. 1903. 767.

**641.** *P. Duhem.* Effet des petites oscillations de la température sur un système affecté d'hystérésis et de viscosité. C.R. 138. 1196.

**642.** *P. Duhem.* Modifications permanentes. Sur les propriétés des systèmes affectés à la foi d'hystérésis et de viscosité. C.R. 138. 942.

**643.** *L. Natanson.* Über die Deformation einer plastisch-viskösen Scheibe. Z.P.C. 43. 185.

**644.** *W. N. Taylor.* Note on the standard of relative viscosity and on negative viscosity. P.R.S.E. 25. 227.

Siehe auch 374; 1456; 1465.

### Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten.

**645.** *O. Olsson.* Über die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten. A.M.A.F. 1. 541.

**646.** *U. Cisotti.* Sul paradosso di d'Alembert. A.I.V. 63. 423.

**647.** *V. Fischer.* Eine Analogie zur Thermodynamik. Z.S. 51. 426.

**648.** *E. Lenzi.* Sulla ricerca di un quarto integrale di 2. grado del sistema di equazioni differenziali del moto di un corpo solido in un liquido indefinito. A.D.M. (3) 10. 227.

**649.** *A. Viterbi.* Sui moti spontanei stazionari d'un solido immerso in un liquido indefinito. A.I.V. (8) 5. 6.

**650.** *A. Viterbi.* Formole ellittiche per i moti spontanei stazionari d'un solido immerso in un liquido indefinito. A.I.V. 63. 873.

**651.** *W. Köppen.* Versuche über den Stau und Sog an den Oberflächen halb eingetauchter schräg durch das Wasser geführter drachenähnlicher Körper. A.D.S.H. 27. 1.

**652.** *G. Bonfantini.* Movimento di un liquido indefinito in cui si muove un disco circolare infinitamente sottile. R.I.L. (2) 37. 775.

**653.** *A. B. Basset.* On the motion of bicircular quartic cylinders in a liquid. Q.J. 34. 267.

Siehe auch 463; 2623; 3411; 3436.

### Aerodynamik.

**654.** *H. Smoluchowski-Smolan.* On the principles of aerodynamics and their application, by the method of dynamical similarity, to some special problems. P.M. (6) 7. 667.

**655.** *A. Satkewitsch.* Über die Abteilung der Differentialgleichungen der Bewegung eines Gases (russ.). J.R.P.C.G. 35. 425.

**656.** *P. Langevin.* Sur une formule fondamentale de la théorie cinétique. C.R. 140. 35.

**657.** *E. Jouguet.* Remarques sur la propagation des percussions dans les gaz. C.R. 138. 1685.

**658.** *W. Myjkowski.* Über das Gesetz von Boyle und Mariotte (russ.). K.L. 29. 302.

**659.** *J. Boussinesq.* Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement des gaz par les orifices. J.M. (5) 10. 79

**660.** *M. F. Gutermuth.* Versuche über den Ausfluß des Wasserdampfes. M.F. 19. 45.

**661.** *F. J. B. Cordeiro.* Vortex rings as revolving solids. M.W.R. 32. 415.

**662.** *A. F. Zahm.* The measurement of air velocity and pressure in aerodynamic experiments and the balloon anemometer. A.N.J. 8. 74.

**663.** *F. G. Reynolds.* The viscosity coefficient of air, with an inquiry into the effect of Roentgen rays thereon. P.R. 18. 419.

**664.** *A. v. Öttingen* und *F. Blumbach.* Räumliche Darstellungen des zeitlichen Vorganges von Schwefelkohlenstoffexplosionen im Eudiometerrohre mittels des durch rotierenden Planspiegel mit Steinheil-Aplanat erhaltenen Bildes. V.D.P.G. 7. 44.

Siehe auch 515; 617; 729; 2440; 2608; 2610; 2613; 2614; 2616; 2618—20; 2622; 2628; 2629; 2632—38; 2643; 2647—50; 2652; 2653; 3699; 3801.

### Flugbewegung.

Siehe 2611; 2621; 2623.

### Luftwiderstand.

**665.** *C. Renard.* Résistance de l'air. Comparaison des résistances de diverses carènes aériennes. Résultats numériques. C.R. 138. 1264.

**666.** *A. Frank.* Versuche zur Ermittlung des Luftwiderstandes, dessen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Gestalt der Körper. A.P.L. (4) 16. 464.

**667.** *F. E. Stanton.* On the resistance of plane surfaces in a uniform current of air. N.P.L. 1. 245.

**668.** *M. Fréchet.* Sur la surface de la moindre résistance. N.A. (4) 4. 160.

Siehe auch 2607.

### Reibung von Gasen.

**669.** *A. F. Zahm.* Athmospheric friction with special reference to aeronautics. B.S.W. 14. 247.

**670.** *F. Kleint.* Über innere Reibung binärer Mischungen zwischen H, O, N. V.D.P.G. 7. 146.

**671.** *H. Markowski.* Die innere Reibung von O, H, chemischem und atmosphärischem N und ihre Änderung mit der Temperatur. A.P.L. (4) 14. 742.

**672.** *S. Chella.* Su di un apparecchio per la misura assoluta del coefficiente di attrito interno dei gas. R.A.L.R. 14 B. 23.

Siehe auch 663; 2640.

### Äußere Ballistik.

**673.** *G. Forbes.* Exterior ballistics. P.R.S.L. 74. 392.

**674.** *F. Gilman.* The ballistic problem. A. of M. (2) 6. 79.

**675.** *S. A. Corey.* The ballistic problem. M.M.F. 12. 121.

**676.** *E. Oekinghaus.* Das ballistische Problem auf hyperbolisch-lemniskatischer Grundlage. M.H. 15. 11; 139.

**677.** *K. Stojanovitch.* Fall der Integrabilität einer ballistischen Gleichung (serb). P.A.B. 67. 190.

**678.** *de Sparre.* Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité. A.M.A.F. 1. 281.

Siehe auch 2676; 2677.

### Innere Ballistik.

**679.** *E. Coradin.* Les ondes aériennes. R.G.O. 15. 182.

Siehe auch 1417; 2350.

### Physiologische Mechanik.

**680.** *O. Fischer.* Physiologische Mechanik. A.Gr. (3) 7. 110.

**681.** *G. Weiss.* Les travaux de W. Braune et O. Fischer sur la mécanique animale. R.G.O. 14. 1205.

**682.** *E. Solvay.* Sur le problème dit du travail statique; essai de dissociation des énergies mises en jeu. C.R. 140. 1362.

**683.** *J. Joteyko.* Les lois de l'ergographie. B.A.B. 1904. 557.

**684.** *J. K. A. Wertheim.* Salomonson Een nieuwe prikkelingswet. C.A.A. 12. 41.

Siehe auch 2796.

### Mathematische Physik.

**685.** *F. Klein.* Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts· D.V.M. 14. 477.

**686.** *A. Höfler.* Das Mathematische im physikalischen Unterricht. Z.P. 18. 1.

**687.** *H. Poincaré.* L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique. B.D. (2) 28. 302.

**688.** *A. Kneser.* Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. M.A. 58. 81.

**689.** *W. A. Steckloff.* Théorie générale des fonctions fondamentales. A.T. (2) 6. 356.

### Differentialgleichungen der Physik.

**690.** *A. W. Conway.* The partial differential equations of mathematical physics. T.S.D. (2) 8. 187.

**691.** *J. Hadamard.* Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. V.I.M.C. 3. 414.

### Geschichte der Physik.

Siehe 687.

### Prinzipien der Physik.

**692.** *A. Rey.* La philosophie scientifique de M. Duhem. R.M.M. 12. 699.

**693.** *R. de Saussure.* Le temps, l'effort et l'espace. A.S.G. (4) 18.

**694.** *E. Mach.* Space and geometry from the point of view of physical inquiry. Mon. 14. 1.

**695.** *V. Fischer.* Eine Bemerkung über Gravitations- und elektrische Masse. P. Z. 6. 106. — *H. Reissner* 237.

**696.** *B. Davis.* Das Verhältnis zwischen elektrischer und Gravitationskraft. P. Z. 6. 276.

**697.** *W. Sutherland.* The electric origin of rigidity. P.M. (6) 7. 417.

**698.** *H. Nagaoka.* Über ein die Linien und Bandenspektren, sowie die Erscheinungen der Radioaktivität veranschaulichendes dynamisches System. P.Z. 5. 517.

**699.** *H. Nagaoka.* Mutual actions of electron atoms. P.T.M. 2 No. 20.

**700.** *T. Tommasina.* Solution théorique de 2 questions de physique cinématique. A.S.G. (4) 17. 651.

**701.** *J. de Boissoudy.* Les hypothèses cinétiques et la loi de l'évolution. R. G.O. 15. 815.

**702.** *W. Hollenkamp.* Astronomische Chemie. H.E.B. 15. 116; 452.

Siehe auch 719; 3101; 3201.

### Materie.

703. *H. C. Pocklington.* Of the kinetic of matter. P.C.P.S. 12. 283.

704. *L. Mottez.* La matière, l'éther et les forces physiques. S.N.C. (4) 1. 1.

705. *G. Berndt.* Moderne Anschauungen über die Konstitution der Materie. D.W.B. 5. 367; 385.

706. *C. E. Guye.* Les hypothèses modernes sur la constitution électrique de la matière. Rayons cathodiques et corps radioactifs. J.C.P. 2. 549; 3. 188.

707. *F. Soddy.* The evolution of matter. S.P.M. 48. No. 8.

708. *F. Hasenöhrl.* Über die Veränderung der Dimensionen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther. S.A.W. 113. 469.

709. *J. Larmor.* On the ascertained absence of effects of motion through the aether in relation to the constitution of matter and on the Fitz Gerald-Lorentz hypothesis. P.M. (6) 7. 621.

710. *A. E. Outerbridge.* The molecule, the atom and the new theory of matter. J.F.I. 158. 411.

711. *C. H. Wind.* Elektronen und Materie. P.Z. 6. 485.

Siehe auch 727; 730; 883; 3659; 3661; 3662.

### Kraft.

712. *L. Hartmann.* Définition physique de la force. E.M. 6. 425. R.M.M. 12. 935; 1056.

Siehe auch 328; 704; 730; 3662.

### Energie.

713. *G. Meslin.* Conservation et utilisation de l'énergie. R.G.O. 15. 584.

714. *M. Réthy.* Das Ostwaldsche Prinzip vom Energieumsatz in der Mechanik. M.A. 59. 554.

715. *V. v. Vürin.* Über die wechselseitigen Beziehungen der Bewegungsenergie und der Strahlenenergie. A.N.L. 3. 270.

Siehe auch 338; 339; 531; 550; 717; 1216—20; 2340; 2347—49.

### Atomtheorie.

716. *O. Aschan.* Laeran om atomerna. B.F.F. 46. No. 20.

717. *F. Re.* L'energia intraatomica. R.F.M. 5 A. 430.

718. *I. Traube.* Über den Raum der Atome. Die Theorien von T. W. Richards und mir. V.D.P.G. 7. 199.

719. *J. J. Thomson.* On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the theory of atomic structure. P.M. (6) 7. 237.

720. *J. J. Thomson.* On the vibrations of atoms containing 4, 5, 6, 7 and 8 corpuscles and on the effect of a magnetic field on such vibrations. P.C.P.S. 13. 39.

721. *H. Nagaoka.* Motion of particles in an ideal atom illustrating the line and bond spectra and the phenomena of radioactivity. P.T.M. 2. 92.

722. *H. Nagaoka.* The structure of an atom. P.T.M. 2. 240.

Siehe auch 699; 710; 886; 1047; 1425; 1462; 1593; 1630; 2359.

### Äther.

723. *R. de Saussure.* Constitution géométrique de l'éther. A.S.G. (4) 16. 753.

724. *W. Wien.* Über einen Versuch zur Entscheidung der Frage, ob sich der Lichtäther mit der Erde bewegt oder nicht. P.Z. 5. 585.

725. *W. Wien.* Experiments to decide whether the ether moves with the Earth. R.B.A. 74. 433.

726. *A. Schweitzer.* Über die experimentelle Entscheidung der Frage, ob sich der Lichtäther mit der Erde bewegt oder nicht. P.Z. 5. 809.

727. *J. Larmor.* On the ascertained absence of effects of motion through the aether in relation to the constitution of matter and on the Fitz Gerald-Lorentz hypothesis. P.P.S.L. 19. 253.

728. *L. d'Auria.* A relation between the mean speed of stellar motion and the velocity of wave propagation in a universal gaseous medium bearing upon the question of the nature of the ether. J.F.I. 155. 207; P.A. 11. 254; S. (2) 17. 110.

Siehe auch 566; 704; 708; 709; 1104; 1797; 1798; 1853.

### Absolutes Maßsystem.

729. *F. A. Wolff.* The so-called international units. B.B.S.W. 1. 39.

730. *K. Schreber.* Kraft, Gewicht, Masse, Stoff, Substanz. D.V.N. 76 B. 52.

731. *A. E. Haas.* Über ein Maßsystem, das die Längeneinheit und die Lichtgeschwindigkeit als Grundeinheiten enthält. P.Z. 6. 204.

**732.** *K. R. Johnson.* Eine Bemerkung zu den Dimensionssystemen der Physik. P.Z. 5. 685.

**733.** *J. Gasca.* Nomenclatura mnemonica internacional de las unidades teoricas C.G.S. M.y R.M. 19. 203.

Siehe auch 1667; 1668; 2991; 2560—62.

### Kompression.

**734.** *P. Cornazzi.* Dilatazione e compressibilità delle miscele. N.C.P. (5) 9. 161.

Siehe auch 596; 1130; 2802; 2305; 2642.

### Spezifisches Gewicht.

**735.** *E. Mathias.* Sur le coefficient à des diamètres rectilignes. C.R. 139. 359.

**736.** *A. Bestelmeyer* und *S. Valentiner.* Über die Dichte des N und deren Abhängigkeit vom Druck bei der Temperatur der flüssigen Luft. A.P.L. (4) 15. 61.

**737.** *L. Zehnder.* Ein Volumometer für große Temperaturintervalle. A.P.L. (4) 15. 328.

Siehe auch 463; 1122; 1123; 1128; 1208; 1209.

### Aggregatzustände.

**738.** *A. Schükarew.* Untersuchungen über den Zustand: gasförmigflüssig. Z. P.C. 44. 548.

Siehe auch 697; 1313; 1314.

### Änderung der Aggregatzustände.

**739.** *J. E. Trevor.* The slope of the vaporization neutral curve. J.P.C. 8. 341.

**740.** *F. Caubet.* Die Verflüssigung von Gasgemischen. Z.P.C. 40. 257. — *J. P. Kneser* 41. 43.

**741.** *J. J. von Laar.* Over de gedaante von smeltlijnen bij binaire mengsels, wanneer de mengwarmte in de beide phasen zeer gering of = 0 is. C.A.A. 13. 716.

**742.** *J. J. van Laar.* De smeltlijnen von legeeringen. C.A.A. 12. 25.

**743.** *J. J. van Laar.* De mogelijke vormen der smeltlijn bij binaire mengsels von isomorphe stoffen. C.A.A. 12. 169.

**744.** *A. Hess.* Methode zur Bestimmung der Volumänderung beim Schmelzen. P.Z. 6. 186.

**745.** *M. Wildermann.* Über die wahren und scheinbaren Gefriertemperaturen und die Gefriermethoden. A.P.L. (4) 16. 410.

**746.** *Y. Osaka.* Über den Gefrierpunkt verdünnter Lösungen von Gemengen. Z. P.C. 41. 560.

**747.** *A. A. Roth.* Gefrierpunktserniedrigung durch Nichtelektrolyte in konzentrierten wässrigen Lösungen. Z.P.C. 43. 539.

Siehe auch 931; 1228; 1325; 1326; 1347; 1403; 2358; 3788.

### Molekularphysik.

**748.** *L. Décombe.* Sur une nouvelle détermination de l'intervalle moléculaire dans les solides et les liquides. A.S.G. (4) 17. 133.

**749.** *R. Magini.* Influence de la configuration et des liaisons moléculaires sur les spectres ultraviolets d'absorption. J.C.P. 2. 403.

**750.** *L. Traube.* Die Eigenschaften der Stoffe als Funktion der Atom- und Molekularräume und Gedanken über die Systematik der Elemente. Z.A.C. 40. 372.

Siehe auch 453; 456: 526; 710; 719; 1203; 1204; 1301; 2859.

### Innere Struktur der Körper.

**751.** *W. Campbell.* Change of strucutre in the solid state. J.F I. 158. 161.

### Molekulargröße.

Siehe 1370.

### Molekularanziehung.

**752.** *E. Mills.* Molecularattraction II—IV. J.P.C. 8. 383; 593; 9. 402.

### Kohäsion.

**753.** *E. Bouty.* Cohésion diélectrique des mélanges. J.P. (4) 3. 489; 593.

**754.** *E. Bouty.* Cohésion diélectrique de la vapeur de mercure, de l'argon et de leur mélanges. S.F.P. 216. 1.

Siehe auch 560; 1466; 3101.

### Absorption.

**755.** *L. Quennesen.* Contribution à l'étude de l'absorption comparative de l'H par le Rh et le Pd. B.S.C.P. (3) 33. 191.

**756.** *A. Winkelmann.* Zu der Abhandlung des Herrn G. N. St. Schmidt: „Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des H durch Pd." A.P.L. (4) 16. 773.

Siehe auch 1057.

### Elastizität.

757. *J. A. Vollgraff.* Zur Elastizitätstheorie. A.P.L. (4) 14. 620.

758. *P. Duhem.* Recherches sur l'élasticité. A.E.N. (3) 21. 99; 375; 22. 143.

759. *C. Schäfer.* Neuere Arbeiten über Elastizität. J.S.G. 82. 2.

760. *K. E. Guthe.* On fibers resembling quartz in their elastic properties. B.B.S.W. 1. 101.

761. *V. Volterra.* Un teorema sulla teoria dell' elasticità. R.A.L.R. (5) 14 A. 127.

762. *G. Ercolini.* Ricerche intorno alle proprietà elastiche dei fili di Pd. N.C.P. (5) 9. 5.

763. *F. Beaulard.* Sur les propriétés élastiques des fils de soie. A.U.G. 16. 1.

764. *H. Reissner.* Über die Stabilität der Biegung. S.M.B. 1904. 53.

765. *C. Chree.* The bending of magnetometer deflexion-basis. P.M. (6) 7. 39.

766. *C. Lagrange.* L'infiniment petit absolu et le problème de la flexion debout. B.A.B. 1904. 907.

767. *L. N. G. Filon.* On a approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load. P.R.S.L. 72. 391; T.R.S.L. 201. 63.

768. *Lord Rayleigh.* Note on the application of Poisson's formula to discontinuous disturbances. P.L.M.S. (2) 2. 266.

769. *V. Volterra.* Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici. R.A.L.R. (5) 14 A. 431.

770. *V. Volterra.* Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi. R.A.L.R. (5) 14 A. 351.

771. *G. von der Mensbrugghe.* Sur l'élasticité développée dans les jets d'eau. B.A.B. 1904. 401.

772. *P. Duhem.* Sur certains milieux élastiques considérés par M. J. Boussinesq. P.S.B. 1902—03. 105.

773. *M. Panetti.* Una risoluzione diretta del problema della sezione reagente. A.A.T. 39. 185.

774. *H. Morris-Airey.* On the rigidity of gelatine. S.P.M. 49. Nr. 4.

Siehe auch 512; 613; 2482; 2886.

### Elastizitätsmodul.

775. *F. A. Schulze.* Über eine einfache Methode zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten. S.G.M. 1903. 80. 94.

776. *C. A. Bell.* Determination of Young modulus (adiabatic) for glass. P.P.S.L. 19. 511; P.M. (6) 9. 413.

777. *H. Bouasse.* Sur les modules d'élasticité de traction du caoutchouc vulcanisé. A.T (2) 6. 177.

778. *J. C. Shedd* and *R. L. Ingersol.* The elastic modulus and elastic limit of rubber and their relation to change of temperature. P.R. 19. 107.

779. *S. Kusakabe.* On a kinetic method of measuring the modulus of elasticity of rocks. P.T.M. 2. 197.

780. *A. Mallock.* On a direct method of measuring the coefficient of volume elasticity of metals. P.R.S.L. 74. 50.

781. *C. Chree.* Note on the determination of the volume elasticity of elastic solids. P.R.S.L. 74. 518.

Siehe auch 504; 830; 2831; 2852; 2888.

### Gleichgewicht elastischer Körper.

782. *L. Orlando.* Sopra alcuni problemi di equilibrio elastico. N.C.P. (2) 7. 161.

783. *E. Morandi.* Sopra alcuni problemi di statica elastica. A.D.M. (3) 9. 161.

784. *G. Lauricella.* Sull' integrazione delle equazioni d'equilibrio dei corpi elastici isotropi. A.D.M. (3) 11. 269.

785. *P. Duhem.* Considérations sur la stabilité et particulièrement sur la stabilité des corps élastiques. P.S.B. 1902—03. 98.

786. *O. Tedone.* Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo. A.D.M. (3) 10. 13.

787. *J. Dougall.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate. T.R.S.E. 41. 129.

788. *L. Orlando.* Sull' equilibrio elastico di una lastra indefinita. G.B. 42. 239.

789. *O. Tedone.* Sull' equilibrio di una piastra elastica isotropa indefinita. R.G.M.P. 18. 368.

790. *O. Tedone.* Sull' equilibrio elastico di un corpo limitato da un cono di rotazione. R.A.L.R. (5) 14 A 316.

791. *O. Tedone.* Sul problema dell' equilibrio elastico di un' elissoide di rotazione. R.A.L.R. (5) 14 A. 76.

792. *V. Volterra.* Sull' equilibrio dei corpi elastici più volte connessi. R.A.L.R. (5) 14 A. 193.

**793.** *C. Somigliana.* Le deformazioni ausiliarie nei problemi alterni d'equilibrio elastico. R.A.C.R. (5) 13 B. 129.

**794.** *L. Orlando.* Sopra alcune funzioni analoghe alla funzione di Green per un parallelepipedo rettangolo. R.C.M.P. 19. 62.

**795.** *S. Wellisch.* Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme. Ö.Z.V. 1904. 181. 197. 213. 229. 246.

Siehe auch 34; 588; 2409.

## Elastische Spannung.

**796.** *F. Klein* u. *K. Wieghardt.* Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besondererBerücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. A.Gr. (3) 8. 1. 95.

**797.** *V. Bjerknes.* On Maxwells stress theory. P.M. (6) 9. 491.

**798.** *A. V. Leon.* Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohl- und Vollkugel. Z.S. 52. 164.

**799.** *L. Henneberg.* Über einige Folgerungen, welche sich aus dem Satz von Green für die Torsion von Stäben ergeben. Z.S. 51. 242.

**800.** *B. Hopkinson.* The effects of momentary stresses in metals. P.R.S.L. 74. 498.

**801.** *W. C. Poplewell.* Experiments on the relation between uniform compressive stress and permanent strain in wrought iron and steel. S.P.M. 49. Nr. 7.

**802.** *E. G. Coker.* On the measurement of stress by thermal methods with an account of some experiments on the influence of stress on the thermal expansion of metals. T.R.S.E. 41. 229.

Siehe auch 808; 827; 828; 833; 1064; 2819; 2825; 2828; 2829; 2835; 2840—42; 2844; 2850; 2853; 2854; 2857; 2866; 2870; 2874; 2884; 2890; 2901; 2904; 2906; 3713; 3717; 3733; 3735.

## Elastische Deformation.

**803.** *H. Bouasse.* Sur les déformations des solides. R.G.O. 15. 115. — *P. Duhem* 217.

**804.** *H. Bouasse.* A propos de la déformation des solides. R.G.O. 15. 325.

**805.** *M. Gebbia.* Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici. A.D.M. (3) 10. 157.

**806.** *J. Weingarten.* Über die Lehrsätze Castiglianos. A.Gr. (3) 8. 183.

**807.** *R. Marcolongo.* Le formole del St. Venant per le deformazioni finite. R.C.M.P. 19. 151.

**808.** *M. Huber.* Die spezifische Arbeit der Deformation und ihre Verwendung als Maß der Spannung. Beitrag zur Theorie der Festigkeitslehre (poln.). C.T.L. 22. 38; 49; 61; 80.

**809.** *O. Manville.* Sur la déformation finie d'un milieu continu. M.S.B. (6) 2. 83.

**810.** *L. Maurer.* Über die Deformation gekrümmter elastischer Ketten. A.Gr. (3) 6. 260.

**811.** *L. Orlando.* Sulla deformazione del suolo elastico isotropo. R.C.M.P. 18. 311.

**812.** *L. Orlando.* Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da due piane paralleli. N.C.P. (5) 7. 421.

**813.** *L. Orlando.* Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da 2 piani paralleli per tensioni superficiali date. R.C.M.P. 19. 66

**814.** *T. Boggio.* Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque. R.A.L.R. 13 B 419.

**815.** *G. Lauricella.* Sulle equazioni della deformazione dei piastri elastiche cilindriche. R.A.L.R. (5) 14 A. 605.

**816.** *C. Runge.* Über die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck. Z.S. 51. 254.

**817.** *G. Lauricella.* Sulle formole che danno la deformazione di una sfera elastica isotropa. R.A.L.R. 13 B. 583.

**818.** *V. Volterra.* Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici. R.A.L.R. (5) 14 A. 641.

**819.** *V. Volterra.* Sulla distorsioni dei solidi elastici più volte connessi. R.A.L.R. (5) 14 A. 351.

**820.** *P. Gamba.* Influenza del modo di procedere nella deformazione sulle proprietà elastiche nel marmo. N.C.P. (5) 8. 446.

**821.** *F. Foster.* On phenomena due to repetitions of stress and on a new testing machine. S.P.M. 48. No. 7.

Siehe auch 643; 793; 798; 801; 827; 829; 1108; 2818; 2823; 2830; 2832; 2859; 2868; 2871; 2875; 2877; 2878; 2887.

## Biegungs- und Knickungselastizität.

Siehe 3263; 3292; 3297; 3310; 3335.

## Torsionselastizität.

Siehe 2863.

### Elastische Nachwirkung.

**822.** *E. Rosenthal.* Über die elastische Nachwirkung bei Aneroidbarographen. A.P.B. (5) 19. Nr. 3. 115; 20. Nr. 3. 113.

### Bewegung elastischer Körper.

**823.** *C. A. B. Garrett.* On the lateral vibrations ot bars. P.M. (6) 8. 581. — *C. Chree* 9. 134.

**824.** *V. Volterra.* Note on the application of the method of images to problems of vibrations. P.L.M.S. (2) 2. 327.

**825.** *A. Kneser.* Ein Beitrag zur Theorie der schnell umlaufenden elastischen Welle. Z.S. 51. 254.

Siehe auch 619; 2169—73; 2623.

### Elastische Kurven.

Siehe 502; 762; 763; 2766; 2899.

### Elastische Membranen.

**826.** *G. Bisconcini.* Sulle vibrazioni di una membrana che si possono far dippendere da due soli parametri. M. A.T. (2) 54. 51.

Siehe auch 502; 503; 787—90; 810; 814; 815; 829; 966.

### Thermoelastizität.

**827.** *A. V. Leon.* Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel, die von innen erwärmt werden unter der Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes. Z.S. 52. 174.

**828.** *G. Coker* and *C. M. Mc. Kergow.* The relation of thermal change to tension and compression stress with an account of some experiments on impulsive stress. P.T.R.S.C. (2) 10. 5.

**829.** *T. Boggio.* Sulla deformazione delle piastre elastiche sogette al calore. A A.T. 40. 197; 219.

Siehe auch 778; 802; 3235.

### Elektroelastizität.

Siehe 1570.

### Magnetoelastizität.

**830.** *K. Honda* und *T. Terada.* Über die Veränderung der Elastizitätskonstanten durch Magnetisierung. P.Z. 6. 622.

**831.** *H. Rensing.* Über magnetoelastische Wechselbeziehungen in paramagnetischen Substanzen. A.P.L. (4) 14. 363.

**832.** *N. Pezzini.* Magnetizzazione e trazione. R.I.L. (2) 38. 463.

**833.** *G. W. Walker.* On stresses in a magnetostatic field. P.P.S.L. 19. 110.

Siehe auch 1570; 1643; 3553.

### Festigkeit.

**834.** *E. Ferron.* Mémoire sur la flexion et la torsion des solides et son application aux constructions. I.L. 27. 79.

**835.** *Considère.* Influence des pressions latérales sur la résistance des solides à l'écrasement. C.R. 138. 945.

**836.** *L. Henneberg.* Zur Torsionsfestigkeit. Z S. 51. 225. — *C. Runge* 431.

**837.** *Trouton* and *A. O. Rankine.* On the stretching and torsion of lead wire beyond the elastic limit. P.M. (6) 8. 538.

**838.** *M. Panetti.* Teoria della resistenza delle piastre tronco-coniche e sui applicazioni al calcolo di alcuni organi meccanici e dei serbatoi cilindrici. A. A.T. 40. 349.

**839.** *F. Villareal.* Resistencia de las columnas de fierro. (span. u. esperanto.) R.C.L. 7. 241; 265; 8. 9; 33; 61; 89; 100.

**840.** *Pigeaud.* Arcs associés à des longueurs par les montants verticaux associés. C.R. 140. 1091.

**841.** *C. Lagrange.* L'infiniment petit absolu et le problème de la flexion debout. B.A.B. 1904. 907.

**842.** *E. S. Shepherd* and *G. B. Upton.* The tensile strength of copper-tin alloys. J.P.C. 9. 441.

**843.** *S. Kusakabe.* Modulus of rigidity of rocks and velocities of seismic waves: with a hint to the frequency of aftershocks. P.T.M. 2. 142.

**844.** *C. Bach.* Versuche über die Festigkeitseigenschaften von Stahlguß bei gewöhnlicher und höherer Temperatur. M.F.I. 24. 39.

**845.** *M. Baroni.* Untersuchung der Festigkeit von Eisenbetonbauten. Z.S. 51. 113.

**846.** *H. Rebenstorff.* Prüfung von Gefäßen auf Druckfestigkeit. Z.P. 17. 290.

Siehe auch 421; 482; 808; 2483; 2613; 2878; 3247—49; 3253; 3254; 3259—62; 3264; 3266; 3269; 3272—74; 3280; 3283; 3286; 3289; 3293; 3298; 3301; 3303; 3309; 3311; 3312; 3314—23; 3327; 3329; 3330; 3332—36; 3341; 3346; 3578; 3692; 3727.

### Kristallbildung.

**847.** *D. Pavlow.* Über die Abhängigkeit der Kristallform von dem Zustand der Lösung. Z.K.M. 40. 555.

### Kristallphysik.

**848.** *A. Nold.* Grundlagen einer neuen Theorie der Kristallstruktur. Z.K.M. 40. 13; 433.
**849.** *P. Pavloff.* Thermodynamische Kristalleigenschaften. (russ.) M.S.O. 21. 88.
**850.** *P. Pavlow.* Über einige Eigenschaften der Kristalle vom Standpunkt der Thermodynamik. Z.K.M. 40. 189.
**851.** *T. Tamaru.* Bestimmung der piezoelektrischen Konstanten von kristallisierter Weinsäure. P.Z. 6. 379.

Siehe auch 237; 310; 1651.

### Kristalloptik.

**852.** *A. Osthoff.* Über die Reflexion u. Brechung des Lichtes an Zwillingsebenen vollkommen durchsichtiger inaktiver einachsiger Kristalle. N.J.M. 20. Beilage.
**853.** *S. Kaemmerer.* Über die Reflexion und Brechung des Lichtes an inaktiven durchsichtigen Kristallplatten. N.J.M. 20. Beilage. 159.
**854.** *A. Pochettino.* Sulla catodoluminescenza dei cristalli. N.C.P. (5) 8. 438.
**855.** *A. Pochettino.* Ulteriori ricerche sulla luminescenza catodica nei cristalli. R.A.L.R. (5) 14 B. 220.

Siehe auch 1063; 1097; 1109.

### Ätherschwingungen.

**856.** *Herkless* Vibrations. J.B.A.A. 14. 198.

Siehe auch 2489.

### Ätherwellen.

**857.** *A. Broca.* Sur le pouvoir inducteur spécifique des métaux dans le cas des ondes calorifiques et lumineuses. C.R. 141. 29.

### Strahlen.

**858.** *T. Ewers.* Über die Geschwindigkeit der Kanalstrahlenteilchen. P.Z. 6. 500.
**859.** *E. Salvioni.* Fenomeni subbiettivi nelle experienze sui raggi N. R.A.L.R. (5) 13 A. 703.
**860.** *M. Otta.* Blondlotovy paprsky. (Blondlot'sche Strahlen.) C. 34. 193.

Siehe auch 715; 861; 868; 887; 888; 1281; 1640.

### Röntgenstrahlen.

**861.** *R. Blondlot.* Rayons $x$ et rayons $n$. A.S.G. (4) 17. 473.
**862.** *A. Righi.* Sulle cariche elettriche dai raggi $x$ sui metalli nel vuoto. M.I.B. (5) 10.
**863.** *P. Cardani.* Sulla dispersione elettrica prodotta dai raggi del Roentgen. N C.P. (5) 7. 241.
**864.** *C. G. Barkla.* Energy of secondary Roentgen radiation. P.M. (6) 7. 543.

Siehe auch 663; 867; 868; 1093.

### Kathodenstrahlen.

**865.** *P. Villard.* Sur les rayons cathodiques. S.F.P. Nr. 224. 7.
**866.** *R. Reiger.* Über das Verhältnis $\varepsilon/\mu$ bei Kathodenstrahlen verschiedenen Ursprungs. V.D.P.G. 7. 122.
**867.** *J. Stark.* Das Wesen der Kathoden- und Röntgenstrahlen. A.G.E.R. 1.
**868.** *Rothé.* Rayons cathodiques, $X$, $N$, substances radioactives. A.U.G. 16. 153; 201.
**869.** *F. Paschen.* Über die Kathodenstrahlen des Radiums. A.P.L. (4) 14. 389.
**870.** *A. Becker.* Messungen an Kathodenstrahlen. A.P.L. (4) 17. 381.
**871.** *N. Heil.* On the dimensions of the cathode images. P.M. (6) 9. 614.
**872.** *E. Warburg.* Über die Reflexion der Kathodenstrahlen an dünnen Metallblättchen. S.A.B. 1905. 458.
**873.** *H. Pellat.* Sur les rayons cathodiques et la magnétofriction C.R. 139. 124.
**874.** *Fortini.* Sur la déviation électrostatique des rayons magnétocathodiques. S.F.P. 215. 1.

Siehe auch 706; 854; 855; 1612; 3625; 3632.

### Radioaktivität.

**875.** *R. H. Bradbury.* Radium and Radioactivity in general. J.F.I. 159. 225.
**876.** *E. Rutherford.* Les problèmes actuels de la radioactivité. A.S.G. (4) 19. 31; 125.
**877.** *P. Curie.* Recherches récentes sur la radioactivité. A.S.G. (4) 17. 241; 361.
**878.** *J. Stark.* Gesetz und Konstanten der radioaktiven Umwandlung. J.R.E. 1. 1.
**879.** *S. Petir.* Radioaktivni látky, jich vlastnosti a účinky dle dosavadních výsledků badáni. (Radioaktive Stoffe, ihre Eigenschaften und Wirkungen nach den bisherigen Ergebnissen der Forschung.) C. 33. 38.
**880.** *J. A. Mc Clelland.* On the emanation given off by Radium. P.M. (6) 7. 355.

881. *J. A. Mc Clelland.* Über die vom Radium ausgesandte Emanation. P.Z. 5. 538.

882. *E. Rutherford* und *F. Soddy.* Die Ursache und Natur der Radioaktivität. Z.P.C. 42. 81; 174.

883. *C. Winkler.* Radioctivity and matter. C.N. 89. 289.

884. *H. Brooks.* The decay of excited radioactivity from Thorium, Radium and Actinium. P.M. (6) 8. 373.

885. *Lord Kelvin.* Plan of a combination of atoms to have the properties of Polonium or Radium. P.M. (6) 8. 528.

886. *E. Bose.* Zur Kenntnis der Atomenergie, eine Beziehung zwischen kinetischer Theorie und Radioaktivität. J.R.E. 1. 133.

887. *H. Becquerel.* Sur quelques propriétés des rayons α du radium. C.R. 141. 485.

888. *W. H. Braggs.* On the absorption of α rays and on the classification of the α rays from Radium. P.M. (6) 8. 719.

889. *W. Duane.* Sur l'ionisation due à l'émanation du radium. C.R. 140. 581.

890. *W. Duane.* Sur l'ionisation produite entre des plateaux parallèles par l'émanation du radium. C R. 140. 786.

891. *L. Matout.* Le rayonnement du Radium. L.R 1. 6.

892. *A. Battelli* und *F. Maccarrone.* Sind radioaktive Emanationen elektrisch? P.Z. 6. 161.

893. *E. Rutherford.* Der Unterschied zwischen radioaktiver und chemischer Verwandlung. J.R.E. 1. 103.

894. *H. W. Schmidt.* Über eine einfache Methode zur Messung des Emanationsgehalts von Flüssigkeiten. P.Z. 6. 561.

895. *H. Mache.* Über die im Gasteiner Wasser enthaltene radioaktive Emanation. P.Z. 5. 441.

Siehe auch 482; 698; 706; 721; 868; 1049; 1191; 1367; 1452; 1517; 1685; 2278; 2279; 2852; 2933; 2967; 2987; 3170; 3183; 3660.

### Kapillarität.

896. *G. Bakker.* Zur Theorie der Kapillarschicht. A.P.L. (4) 17. 471.

897. *G. Bakker.* Theorie der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeiten des Dampfes. Z.P.C. 42. 68.

898. *G. van der Mensbrugghe.* Note. B.A.B. 1905. 13.

899. *F. Goppelsröder.* Studien über die Anwendung der Kapillaranalyse. V.N.B. 17. 1.

900. *G. van der Mensbrugghe.* Contribution à la théorie des ménisques capillaires. B.A.B. 1905. 121.

901. *Ponsot.* Volume spécifique d'un fluide dans les espaces capillaires. C.R. 140. 1236.

902. *E. Grüneisen.* Über die Gültigkeitsgrenzen des Poiseuilleschen Gesetzes bei Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten durch gerade und gewundene Kapillaren. A.P.T.R. 4. 151.

903. *G. Bakker.* L'épaisseur de la couche capillaire. J.P. (4) 3. 927; 4. 96.

904. *H. Devaux.* Sur l'épaisseur critique des solides et des liquides, réduits en lames très-minces. J.P. (4) 3. 450.

905. *R. Feustel.* Über die Kapillaritätskonstanten und ihre Bestimmung nach der Methode des Maximaldruckes kleiner Blasen. A.P.L. (4) 16. 61. — *G. Kučera* 789.

906. *T. Terada.* On the capillary ripple on mercury produced by a jet tube. P.T.M. 2. 133.

### Oberflächenspannung.

907. *G. Bakker.* Bemerkung über die Theorie der Oberflächenspannung von H. Hulshof. A.P.L. (4) 14. 609; 17. 584. — *H. Hulshof* 16. 188.

908. *J. Traube.* Der Oberflächendruck und seine Bedeutung im Organismus. A.F.G.P. 105. 559.

909. *B. Kučera.* Beitrag zur Kalibrierung sehr enger Kapillare und zur Messung der Oberflächenspannung mittels der Tropfenwägung (tschech.). M.A.T.P. 1903. No. 32.

910. *J. Traube.* Über die Bedeutung der Oberflächenspannung im Organismus. V.D.P.G. 6. 326.

911. *C. Forch.* Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen. A.P.L. (4) 17. 744.

912. *J. Bolle* et *P. A. Guye.* Tensions superficielles de quelques liquides organiques. J.C.P. 3. 38.

913. *L. Grunmach.* Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung und des Molekulargewichts von verflüssigtem Stickstoffoxydul. P.Z. 5. 677; S.A.B. 1904. 1198; D.V.N. 76. B. 33; A.P.L. (4) 15. 401.

914. *van der Mensbrugghe.* Les corps solides sont-ils doués d'une tension superficielle efficace. A.S.B. 29 A. 206.

**915.** *G. Quincke.* Über Ausbreitung und Expansionskraft. A.P.L. (4) 15. 55. — *G. van der Mensbrugghe* 1048.

**916.** *E. Almansi.* Sopra una delle esperienze del Plateau. A.D.M. (3) 12. 1.

Siehe auch 813; 925; 939; 941.

## Tropfen.

**917.** *P. G. Gundry.* Über erzwungene Schwingungen eines polarisierbaren Quecksilbertropfens. A.P.L. (4) 14. 590.

Siehe auch 937; 2269.

## Diffusion.

**918.** *S. Nakamura.* On the diffusion of liquids. J.U.T. 19. No. 8.

**919.** *O. W. Richardson.* The solubility and diffusion in solution of dissociated gases. P.M. (6) 7. 266.

**920.** *R. Schmidt.* Über die Diffusion von Argon und Helium. A.P.L. (4) 14. 801.

**921.** *A. Winkelmann.* Über die Diffusion naszierenden H durch Fe. A.P.L. (4) 17. 589.

**922.** *O. W. Richardson.* Note on the diffusion of H through Pd. P.C.P.S. 13. 27.

Siehe auch 756; 1581.

## Osmose.

**923.** *C. Steinbrinck.* Versuch einer elementaren Einführung in die elementare Theorie der Osmose. Z.P. 18. 82.

**924.** *E. Ariès.* Sur la loi fondamentale des phénomènes de l'osmose. C.R. 139. 196.

**925.** *F. Kaufler.* Über die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichts durch Oberflächenkräfte. Z.P.C. 43. 686.

**926.** *A. Battelli* e *A. Stefanini.* Sulla natura della pressione osmotica. R.A. L.R. 14. B. 3.

**927.** *M. Planck.* Über den osmotischen Druck einer Lösung von merklich variabler Dichte. Z P.C. 42. 584.

**928.** *P. Kohnstamm.* Kinetische afleiding van van 't Hoff's wet voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing. C.A.A. 13. 788.

**929.** *P. Kohnstamm.* Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen wier damp de gaswetten volgt. C.A.A. 13. 781.

**930.** *S. Stenius.* Der osmotische Druck im Meerwasser. B.F.F. 46. No. 6.

**931.** *H. N. Morse* and *J. C. W. Frazer.* The osmotic pressure and freezing points of solution of cane-sugar. A.C.J. 34.

**932.** *G. A. Hulett.* Beziehung zwischen negativem Druck und osmotischem Druck. Z.P.C. 42. 353.

**933.** *P. Kohnstamm.* Osmotische druk of thermodynamische potentiaal. C.A.A. 13. 800.

Siehe auch 2190.

## Thermokapillarität.

**934.** *Ponsot.* Chaleur dans le déplacement de l'équilibre d'un système capillaire. C.R. 140. 1176.

**935.** *H. Rebenstorff.* Abnahme der kapillaren Steighöhe von Wasser bei steigender Temperatur. Z.P. 17. 223.

## Elektrokapillarität.

**936.** *J. Billitzer.* Zur Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen. S.A. W. 113. 637.

**937.** *F. Krüger.* Zur Theorie der Elektrokapillarität und der Tropfelektroden. N.G.G. 1904. 33.

**938.** *J. J. van Laar.* Über die Asymmetrie der Elektrokapillarkurve. Z.P.C. 41. 385.

**939.** *C. Christiansen.* Über den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und Potentialdifferenz. A.P.L. (4) 16. 382.

**940.** *Rothé.* Le cation et les phénomènes électrocapillaires. A.U.G. 16. 571.

**941.** *C. Fortin.* Tension superficielle d'un diélectrique dans le champ électrique. C.R. 140. 576.

## Akustik.

**942.** *T. Terada.* Acoustical notes. P.T.M. 2. No. 20.

**943.** *H. Sieveking* und *A. Behm.* Akustische Untersuchungen. A.P.L. (4) 15. 793.

**944.** *Lord Rayleigh.* On the acoustic shadow of a sphere. P.R.S.L. 73. 65. T.R.S.L. 203. 88.

**945.** *P. Ostmann.* Über Schwingungszahlen und Schwellenwerte. S.G.M. 1903. 11.

**946.** *H. J. Scharp.* On the reflection of sound at a paraboloid. P.C.P.S. 13. 183.

**947.** *O. Nairz.* Mechanische Resonanz und ihre Verwertung. P. 16. 292.

**948.** *T. Terada.* A note on a resonance box. P.T.M. 2. 211.

**949.** *T. Mizuno.* Electric resonance. M.C.K. 1. 33.

**950.** *M. T. Edelmann.* Kinematische Studie über die longitudinalen Bewegungen des Stieles einer tönenden Stimmgabel. P.Z. 6. 445.

**951.** *R. W. Wood.* Apparatus to illustrate the pressure of sound waves. P.R. 20. 113.

**952.** *V. Novák.* Interference zvuku. (Interferenz des Schalles.) C. 34. 179.

**953.** *J. Violle* et *T. Vautier.* Propagation des sons musicaux dans un tuyau de 3m de diamètre. C.R. 140. 1292.

**954.** *C. Krediet.* Sur un cas de propagation de vibrations sonores. N.A.W. (2) 6. 81.

**955.** *V. Hensen.* Über die Umwandlung periodischer Massenanhäufungen in akustisch wirksame Bewegungen. A.P.L. (4) 16. 838.

**956.** *Lord Rayleigh.* On the open organ-pipe problem in 2 dimensions. P.M. (6) 8. 481.

**957.** *O. Krigar-Menzel.* Zur Theorie der Rubensschen Schallröhre. V.D.P.G. 6. 356.

**958.** *H. Rubens.* Demonstration stehender Schallröhren durch Manometerflammen. V.D.P.G 6. 355.

**959.** *H. Rubens* und *O. Krigar-Menzel.* Flammenröhre für akustische Beobachtungen. A.P.L. (4) 17. 149.

**960.** *G. Jäger.* Theorie der Exner-Pollakschen Versuche. S.A.W. 113. 314.

**961.** *P. E. Belas.* Effect on sound on water jets. N. 70. 233.

**962.** *J. Violle* et *T. Vautier.* Expériences sur la propagation du son dans un tuyan cylindrique de 3 mètres de diametre. A.C.P. (8) 5. 208.

**963.** *R. Wachsmuth.* Neuer Apparat zur akustischen Bestimmung der Dichte von Gasen und Dämpfen. C.Z. 28. 896.

Siehe auch 581; 1455.

### Saitenschwingungen.

**964.** *W. B. Morton* and *T. B. Vingcomb.* On the vibrations of strings excited by plucking and by resonance. P.M. (6) 8. 573.

**965.** *H. Weber.* Bemerkungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. V.I.M.C. 3. 446.

Siehe auch 501.

### Luftschwingungen.

Siehe 951.

### Klangfiguren.

**966.** *K. Antolík.* Über Klangfiguren gespannter Membranen und Glasplatten. V.V.N.P. 1903. 71.

### Schallgeschwindigkeit.

**967.** *T. C. Hebb.* The velocity of sound. P.R. 20. 89.

**968.** *J. Sturm.* Die Kirchhoffsche Formel über Schallgeschwindigkeit in Röhren. A.P.L. (4) 14. 822.

**969.** *F. A. Schulze.* Über die Schallgeschwindigkeit in sehr engen Röhren. S.G.M. 1903. 59.

### Singende Flammen.

Siehe 959.

### Musikalische Instrumente.

Siehe 956.

### Architektonische Akustik.

Siehe 2655.

### Physiologische Akustik.

**970.** *E. W. Scripture.* Über das Studium der Sprachkurven. A.N.L. 4. 28.

### Mathematische Musik.

**971.** *G. Zambiasi.* Un capitolo di acustica musicale. N.C.P. (5) 9. 241.

**972.** *R. C. Phillips.* Mean tones, equal tempered tones and the harmonic tetrachords of Claudius Ptolemy. S.P.M. 48. No. 13.

**973.** *L. Erményi.* Petzvals Theorie der Tonsysteme. Z.S. 51. 281.

**974.** *K. v. Wesendonk.* Über die Ursachen der Dissonanzen. N.R. 20. 301.

**975.** *G. Eneström.* Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann Bernoulli. B.M. (3) 4. 344.

### Geometrische Optik.

**976.** *E. Study.* Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen. D.V.M. 14. 424.

**977.** *P. Mori.* Sulla riflessione e la rifrazione luminosa. Applicazioni geometriche. R.T.C. 16. 154.

**978.** *J. J. Thaudin Chabot.* Reflexion und Refraktion mittels einer natürlich

gekrümmten Fläche zwecks Demonstration geometrisch-optischer Grunderscheinungen. P.Z. 5. 823.

**979.** *G. de Sandre.* Effetti di riflessione e di rifrazione di luce nelle letture di stadia. R.T.C. 17. 1; 18.

**980.** *Gerloff.* Stereoskopische Darstellungen. P. 16. 1; 19.

**981.** *V. Reina.* Sulla definizione delle inmagini fornite dai riflettori e dai refrattori. R.T.C. 16. 75.

**982.** *K. Strehl.* Über eine angeblich normale Fortpflanzung des Lichtes im Brennraum. P.Z. 6. 513.

**983.** *W. Bennet.* Notes on nonhomocentric pencils and the shadows produced by them. P.P.S.L. 19. 205; 213.

Siehe auch 3606; 3621; 3626; 3636; 3637.

## Katoptrik.

**984.** *F. Kühnemann.* Totalreflexion des Lichtes. Z.P. 18. 224.

**985.** *E.* und *L. Mach.* Versuche über Totalreflexion und deren Anwendung. S.A.W. 113. 1219.

**986.** *R. A. Houston.* Über die Wirkung einer Oberflächenschicht bei Totalreflexion. P.Z. 6. 208.

**987.** *A. Alvarado.* Los espejos planos pueden dar imágenes reales? R.C.L. 7. 235.

**988.** *E. Jahnke.* Elementare Herleitung der Formeln für die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze durchsichtiger isotroper Körper. A.Gr. (3) 7. 278.

**989.** *K. Prytz.* Mikroskopische Bestimmung der Lage einer spiegelnden Fläche. A.P.L. (4) 16. 735.

**990.** *M. de Montcheuil.* Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis. S.M. 31. 283; 32. 152.

**991.** *A. Emch.* The theory of optical squares. M.M.F. 11. 33.

**992.** *W. J. Hussey.* The longitudinal aberration of a parabolic mirror. P.A.S.F. 14. 179.

**993.** *F. Biske.* Korrektionsspiegel zu parabolischen Reflektoren. Z.S. 52. 191.

**994.** *L. Matthiessen.* Mathematische Theorie der Spiegelung in abwickelbaren Flächen. Z.S. 52. 138.

**995.** *V. Kommerell.* Eine optische Eigenschaft des Paraboloids. M.B. (2) 6. 79.

**996.** *C. K. Edmunds.* The reflecting power of selenium as determined by a spectrophotometer. P.R. 18. 385.

**997.** *C. Scotti.* Su la risonanza clettrica. N.C.P. (5) 7. 334.

Siehe auch 852; 859; 872; 946; 1067; 1094; 1106; 2511.

## Dioptrik.

**998.** *C. de Ward.* Descartes en de brekingswet. N.A.W. (2) 7. 64.

**999.** *W. Grimm.* Eine energetische Darstellung des Brechungsquotienten. A.N.L. 4. 226.

**1000.** *L. V. Drysdale.* On the curvature method of teaching optics. P.M. (6) 9. 467.

**1001.** *A. Danckwortt.* Ableitung eines Satzes über die Lichtbrechung. Z.P. 17. 303.

**1002.** *A. Schuller.* Über die richtige Unterscheidung der kollektiven und dispansiven optischen Systeme. B.M.N. 17. 83.

**1003.** *C. Maltézos.* L'équation du prisme optique. E.M. 5. 454.

**1004.** *K. F. Muirhead.* Minimum deviation through a prism. P.E.M.S. 22. 76.

**1005.** *T. L. Bennett.* Minimum deviation through a prism. P.M. (6) 6. 697.

**1006.** *E. Gatti.* Proprietà dei segmenti ad una base di uno cilindro retto rifrangente. A.A.T. 39. 839.

**1007.** *E. Gatti.* Particolarità della rifrazione dovuta ad una corona cilindrica retta. A.A.T. 40. 732.

**1008.** *A. Schell.* Die Bestimmung der optischen Konstanten eines zentrierten sphärischen Systems mit dem Präzisionsfokometer. S.A.W. 112. 1057.

**1009.** *H. Pellat.* Formation des images par les réseaux. J.P. (4) 3. 611.

**1010.** *S. Trozewitsch.* Über das aplanatische System. Z.S. 51. 100.

Siehe auch 853; 988; 1944; 3639; 3642.

## Linsen.

**1011.** *F. Meisel.* Über die übliche Erklärung der Brennweite einer Linse. Z.H. 36. 102.

**1012.** *G. A. Hill.* A method of obtaining the focal point of a less of long focus. P.A. 11. 379.

**1013.** *S. D. Chalmers.* The theory of symmetrical optical objectives. P.R.S.L. 72. 267; 74. 396.

**1014.** *G. J. Barch.* Some uses of cylindrical lens-systems, including rotation of images. P.R.S.L. 73. 281.

**1015.** *A. Kerber.* Systematische Berechnung sphärischer korrigierter Anastigmatlinsen. D.M. 12. 171.

**1016.** *D. Kerber.* Bequeme Formeln zur Brechung von Anastigmatlinsen. D.M. 12. 181.

**1017.** *W. Pscheidl.* Neue Berechnung einer aplanatischen Brenn- und Beleuchtungslinse. P.Z. 6. 511. — *J. Petri* 632.

**1018.** *E. Berger.* Über das bei meiner binokularen Lupe verwendete Linsensystem. D.M.Z. 1905. 155.

Siehe auch 3638.

### Brennlinien.

**1019.** *J. J. Deschamps.* Caustiques et anticaustiques. S.P. (9) 5. 275.

### Physikalische Optik.

**1020.** *M. Laue.* Über die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien. N.G.G. 1904. 480.

**1021.** *J. Boussinesq.* Construction dans un milieu opaque homogène des rayons lumineux qui y pénètrent par une face plane. C.R. 140. 825.

**1022.** *A. B. Porter.* Doppler's principle and light-leats. S. (2) 21. 314.

**1023.** *A. Americo.* Nuove ricerche sulla legge di Draper. N.C.P. (5) 8. 313.

**1024.** *P. Drude.* Zur Theorie des Lichtes für aktive Körper. N.G.G. 1904. 1.

**1025.** *L. Houllevigne.* Propriétés optiques du fer ionoplastique. C.R. 140. 1093.

Siehe auch 3640.

### Lichtwellen.

**1026.** *J. S. S. Cooper.* An experiment bearing on the wave theory of light. T.N.Z.I. 36. 487.

**1027.** *H. Lehmann.* Superposition stehender Lichtwellen verschiedener Schwingungsdauer. P.Z. 6. 553.

**1028.** *T. H. Havelock.* Wave fronts considered as the characteristics of partial differential equations. P.L.M.S. (2) 2. 297.

**1029.** *G. J. Stoney.* Flat-wavelet resolution. P.M. (6) 9. 577.

**1030.** *F. Ehrenhaft.* Über optische Resonanz. P.Z. 6. 387. — *F. Pockels* 460.

Siehe auch 857; 1036.

### Lichtdruck.

**1031.** *J. H. Poynting.* Radiation pressure. P.M. (6) 9. 393; P.P.S.L. 19. 475.

**1032.** *T. H. Havelock.* The pressure of radiation on a dear glass vane. N. 72. 269.

**1033.** *G. F. Hall.* The elimination of action in experiments on light pressure. T.R. 20. 292.

Siehe auch 1400; 1401; 1943; 1949; 2567.

### Dispersion.

**1034.** *V. de Souza-Brandão.* Über eine Dispersionsformel der Doppelbrechung im Quarz und deren Verwendung beim Babinetschen Kompensator. C.F.M. 1905. 23.

**1035.** *H. Nagaoka.* Dispersion of light due to electron-atoms. P.T.M. 2. 280.

**1036.** *J. Larmor.* On the dynamical significance of Kundt's law of selective dispersion in connexion with the transmission of the energy of trains of dispersive waves. P.C.P.S. 13. 21.

**1037.** *M. Planck.* Normale und anomale Dispersion in nichtleitenden Metallen von variabler Dichte. S.A.B. 1905. 382.

**1038.** *R. W. Wood.* A quantitative determination of the anomalous dispersion of sodium vapour in the visible and ultraviolet regions. P.A.Bo. 40. 365.

**1039.** *R. W. Wood* Eine quantitative Bestimmung der anomalen Dispersion des Na-dampfes im sichtbaren und ultravioletten Spektralgebiet. P.Z. 5. 751.

**1040.** *F. Ehrenhaft.* Die diffuse Zerstreuung des Lichtes an kleinen Kugeln. A.A.W. 1905. 213.

Siehe auch 1911; 1938; 1940; 1941; 2231; 3610.

### Farben.

**1041.** *V. Grünberg.* Farbengleichung mit Zuhilfenahme der 3 Grundempfindungen im Young-Helmholtzschen Farbensystem. S.A.W. 113. 627.

**1042.** *J. C. M. Garnett.* Colours in metal glasses and in metallic films. P.R.S.L. 73. 443. T.R.S.L. 203. 385.

**1043.** *F. Kirchner* und *R. Zsigmondy.* Über die Ursachen der Farbenänderungen von Gold-Gelatinepräparaten. A.P.L. (4) 15. 573.

**1044.** *F. Monpillard.* Méthode pour établir des écrans colorés destinés à

isoler certains groupes de radiations spéciales. C.R. 141. 31.

Siehe auch 1178; 1179.

### Spektrum.

**1045.** *T. H. Havelock.* On the continuous spectrum. P.C.P.S. 12. 175.

**1046.** *P. G. Nutting.* On the transition from primary to secondary spectra. A.J.C. 20. 131.

**1047.** *H. Nagaoka.* A dynamical system illustrating the spectrum lines. N. 70. 124. — *G. A. Schott* 176.

**1048.** *O. M. Corbino.* Sull' osservazione spettroscopica della luce di intensità periodicamente variabile. R.A. L.R. (5) 14 A. 332.

**1049.** *H. Nagaoka.* On a dynamical system illustrating the spectrum lines and the phenomene of radioactivity. N. 69. 392. — *G. A. Schott* 437.

**1050.** *J. Rheinberg.* The influence of images of gratings on phase differences amongst their spectra. J.R.M.S. 1905. No. 2.

**1051.** *K. Angström.* Énergie dans le spectre visible de l'étalon Hefner. N.A.U. (3) 20.

**1052.** *H. Nagaoka.* Extension of Delandres's formula for band spectrum. P.T.M. 2. 129.

**1053.** *A. Schuster.* A simple explanation of Talbots bands. P.M. (6) 7. 1.

**1054.** *H. Hermann.* Messung der Wellenlängen roter Linien in einigen Bogenspektren. A.P L. (4) 16. 684.

**1055.** *L. Pfaundler.* Über die dunklen Streifen, welche sich auf den nach Lippmanns Verfahren hergestellten Photographien sich überdeckender Spektren zeigen. S.A.W. 113. 388.

**1056.** *J. W. Brühl.* The development of spectrochemistry. N. 72. 158.

Siehe auch 483; 698; 721; 1090; 1092; 1138; 1142; 1158; 1553; 1715; 1854.

### Ultrarote Strahlen.

**1057.** *F. E. Fowle.* The absorption of water vapour in the infra-red solar spectrum. M.C.S.I. 47. 1.

**1058.** *M. Iklé.* Sullo spettro d' assorbimento ultrarosso di alcuni liquidi organici. N.C.P. (5) 8. 42.

Siehe auch 1124.

### Ultraviolette Strahlen.

**1059.** *R. Morris-Airey.* On the determination of wave-lengths in the extrem ultraviolet portion of the spectrum. S.P.M. 49. No. 3.

Siehe auch 749; 1038; 1039; 3622; 3624; 3625.

### Absorption des Lichtes.

**1060.** *W. Gorczyński.* O sposobach waprowadzenia prawa Kirchhoffa. (Über die Herleitungsmethoden des Kirchhoffschen Gesetzes.) T.W. 16. 113.

**1061.** *T. Bialobrjevsky.* Über die Absorption des Lichts in den gefärbten Mitteln (russ.). R.U.K. 1904. 10. 11.

**1062.** *J. Boussinesq.* Formule rationnelle du coefficient d'absorption de la lumière par un corps translucide quelconque. C.A. 140. 622.

**1063.** *J. Boussinesq.* Sur l'existence d'une ellipsoide d'absorption dans tout cristal translucide même sans plan de symétrie ni axe principale. C.R. 140. 401.

**1064.** *J. H. Poynting.* Note on the tangential stress due to light incident obliquely on an absorbent surface. P. M. (6) 9. 169; D.R.A. 74. 434.

**1065.** *E. Ferrero* e *M. Nozari.* Sullo spettro di assorbimento delle soluzioni di allume di cromo. A.A.T. 40. 453.

**1066.** *A. Bemporad.* Il coefficiente di absorbimento dell'aria è propozionale alla quarta potenza della densità. B. G.C. 84. 25.

**1067.** *J. J. Kossonogoff.* Optische Resonanz als Ursache der auswählenden Reflexion und Absorption des Lichtes (russ.). B.U.K. 1904. Nr. 2. 4b.

Siehe auch 749; 1020; 1159; 1931; 1951; 2229; 2259.

### Szintillation.

**1068.** *K. Exner* und *W. Villiger.* Über das Newtonsche Phänomen der Szintillation II. S.A.W. 113. 1019.

(Fortsetzung folgt.)

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900)

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

**R. MEHMKE** IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN

53. BAND. 2. HEFT.

MIT 4 TAFELN UND [illegible] FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 1. Mai 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

**ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.**

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

**Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29**

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

O. Biermann, F. Blake, N. Delaunay, F. Dingeldey, E. Doležal, R. Gans, A. Grünwald, J. Horn, A. Kalähne, H. Liesenmann, R. Mehmke, M. Radaković, P. Riebesell, C. Runge, Fr. Schiffner, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, P. Werkmeister, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, A. Wlassow, E. Wölffing.

# Über die Nebenspannungen gewisser hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke.

Von K. Wieghardt in Aachen.

(Mit 4 Tafeln.)

## Inhalt.



Von den mancherlei Nebenspannungen, die in Fachwerken auftreten können, werden im folgenden nur diejenigen betrachtet, welche ihren Ursprung der sogenannten Steifigkeit der Knoten verdanken, also dem Umstande, daß die Stäbe an den Knotenpunkten nicht durch reibungslose Scharniere verbunden, sondern fest miteinander vernietet sind. Der erforderliche mathematische Ansatz rührt bekanntlich von Manderla her[1]) und ist seitdem vielfach Gegenstand weiterer Verarbeitung ge-

1) H. Manderla. Die Berechnung der Sekundärspannungen, welche im einfachen Fachwerk infolge starrer Knotenverbindungen auftreten. Allgemeine Bauzeitung. Wien 1880. S. 34 ff.

wesen, welche meistens den Zweck hatte, die Auflösung desjenigen Systemes linearer Gleichungen — auf welche nach Manderla im letzten Grunde die Lösung der gestellten Aufgabe hinausläuft — irgendwie zu vereinfachen. Ganz interessant ist in dieser Hinsicht ein schon von Manderla angegebenes und seitdem in der Literatur häufiger wiederkehrendes Näherungsverfahren wegen seiner ungemeinen Einfachheit. Zu jedem Knotenpunkte gehört nämlich eine der oben erwähnten linearen Gleichungen; das erwähnte Verfahren — wir wollen es künftig *das übliche Näherungsverfahren* nennen — besteht nun darin, daß man bei der Bildung einer jeden solchen Gleichung immer nur den *zugehörigen* Knotenpunkt als steif, alle anderen aber als gelenkig ansieht. Man erreicht damit, daß jede Gleichung von vornherein nur eine einzige Unbekannte enthält, sodaß man also ohne weitere Rechnung die Werte aller Unbekannten angeben kann, natürlich im allgemeinen nur mit einer gewissen ersten Näherung.

Wie dem auch sei, jedenfalls ist es eine unter allen Umständen notwendige Voraussetzung für die Lösung der Nebenspannungsaufgabe, daß man die betreffende Grundspannungsverteilung kennt, wie sie bei Vorhandensein reibungsloser Scharniere in den Knotenpunkten herrschen würde. Deshalb vermag man über die Nebenspannungen hochgradig, d. h. etwa hundert- und mehrfach statisch unbestimmter Fachwerke im allgemeinen nichts auszusagen. Es gibt aber besondere Klassen dieser Fachwerke, die durch eine regelmäßige Struktur ausgezeichnet sind und deren Grundspannungen aus diesem Grunde bei gewissen Belastungen einer Berechnung durchaus zugänglich werden, wie dies in meiner *Habilitationsschrift*[1]) des näheren ausgeführt ist. Auf eine dieser Klassen von Fachwerken beziehen sich denn auch die vorliegenden Untersuchungen.

Das Problem der Grundspannungen sowohl wie das der Nebenspannungen tritt dabei zunächst in der Form einer *Randwertaufgabe für eine Differenzengleichung* auf, also in einer Form, die von vornherein nur wenig Aussicht auf erfolgreiche Behandlung bietet. Indessen, konnte ich in meiner Habilitationsschrift zeigen, daß die Randwertaufgabe für die Grundspannungen in den wichtigsten Belastungsfällen sich sehr glatt erledigen läßt, so enthält die vorliegende Abhandlung den Nachweis, daß ganz Entsprechendes für die Randwertaufgabe der Nebenspannungen zutrifft; ihre Lösung gestaltet sich sehr einfach, falls

1) K. Wieghardt. Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke Vorhandl. d. Ver. zur Beförd. d. Gewerbefleißes (im Druck).

man von gewissen kleinen Unstimmigkeiten am Rande des Fachwerkes absieht. Es besteht noch eine weitere Verwandtschaft zwischen beiden Abhandlungen: Hier wie dort hängt alles an einem Begriff, nämlich dem Begriffe der Airyschen Spannungsfunktion. Ich möchte aber ausdrücklich erwähnen, daß die Kenntnis jener Abhandlung für das Verständnis der vorliegenden keine notwendige Voraussetzung ist.

Vergleicht man nun die angestellte Untersuchung mit der Literatur, so hat man die Überraschung, daß sie zum Teil einfach eine Anwendung des üblichen Näherungsverfahrens bedeutet, sodaß das Hauptergebnis der vorliegenden Abhandlung etwa so zu kennzeichnen ist: In den von uns betrachteten Fällen führt das übliche *Näherungs*verfahren seinen Namen zu Unrecht; es ist ein *genaues* Verfahren, denn es löst das erwähnte System linearer Gleichungen völlig genau auf, mit alleiniger Ausnahme der Gleichungen für die Randknotenpunkte. In anderen Fällen als den betrachteten aber liefert unsere Untersuchung ein gewisses Maß für die Größe des Fehlers, den man dabei mit der Anwendung des üblichen Näherungsverfahrens begeht.

Daß die erwähnten Unstimmigkeiten am Rande unser Ergebnis nur unwesentlich beeinflussen, bedarf einer näheren Untersuchung, welcher ein eigener Abschnitt gewidmet ist. Mathematisch handelt es sich dabei wesentlich um die Anwendung bekannter Sätze über gewöhnliche lineare Differenzengleichungen.

Die im zweiten Teile der Abhandlung auf Grund obigen Ergebnisses angestellten wirklichen Berechnungen von Nebenspannungen (Taf. I bis IV) können ein unmittelbar praktisches Interesse wohl nicht beanspruchen, und zwar vielleicht weniger deshalb, weil die in Wirklichkeit ausgeführten hochgradig statisch unbestimmten Fachwerke von den hier behandelten abweichen, als deshalb, weil neuerdings überhaupt solche Fachwerke nicht mehr konstruiert werden. Den Fachwerktheoretiker wird es aber immerhin interessieren, daß man in einigen, zwar speziellen, aber nicht trivialen Fällen einen vollständigen Einblick in die Wirkungsweise eines hochgradig statisch unbestimmten und gleichzeitig fest vernieteten Fachwerkes gewinnen kann, was im allgemeinen wegen der ungemeinen rechnerischen Schwierigkeiten als ausgeschlossen gelten kann.

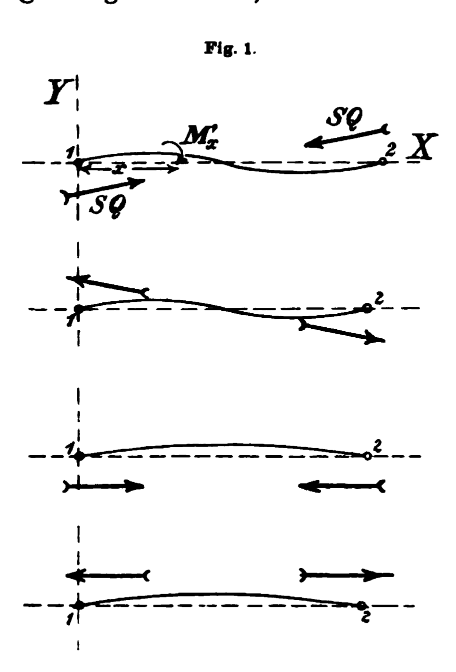
Als allgemeines Ergebnis der numerischen Rechnungen kann zum Schlusse bezeichnet werden, daß das Spannungsbild unserer Fachwerke durch Berücksichtigung der Knotensteifigkeit wesentlich beeinflußt wird.

## I. Manderlascher Ansatz für Nebenspannungen, übliches Näherungsverfahren und Airysche Spannungsfunktionen für elastisch-isotrope Fachwerke.

**1.** *Kurzer Abriß des Manderlaschen Ansatzes für Nebenspannungen.* — In seiner einfachsten Gestalt und damit so, wie er allein für unsere Rechnungen in Betracht kommen kann, läßt sich der Manderlasche Ansatz für Nebenspannungen in Fachwerken kurz etwa so darstellen:

a) Bei alleiniger Berücksichtigung der Grundspannungen des Problems erfahren infolge der Stabverlängerungen alle Knotenpunkte gewisse Verrückungen. Man nimmt an, daß diese *Knotenpunktverrückungen* genau dieselben sind, wenn die Stäbe in den Knotenpunkten nicht gelenkig verbunden, sondern fest miteinander vernietet sind.

Fig. 1.




b) Wenn die *Wirkung der Vernietung* annähernd so aufzufassen ist, daß sie in den Knotenpunkten eine Änderung der gegenseitigen Winkel, unter denen dort die Stäbe zusammenstoßen, unter allen Umständen verhindert, so folgt hieraus in Verbindung mit der Annahme unter a) unmittelbar, daß bei fester Vernietung die Stäbe im allgemeinen nicht geradlinig bleiben können, sondern sich $S$-förmig oder $C$-förmig (Fig. 1) verbiegen werden.

c) Eben diese Verbiegung der Stäbe gibt Anlaß zu den Nebenspannungen, welche somit als *Biegungsspannungen* aufzufassen sind.

d) Ist an irgend einer Stelle $x$ das an dem Stücke links von $x$ wirkende, im Uhrzeigersinne positiv gerechnete Biegungsmoment gleich $M_x'$ und herrschen speziell an den beiden Stabenden die Biegungsmomente $M_1'$ und $M_2'$, so ist zunächst klar, daß vermöge dieser Biegungsmomente auf die beiden Knoten 1 und 2 im Uhrzeigersinne positiv gerechnete Drehmomente $M_1$ und $M_2$ so übertragen werden, daß:

$$M_1 = M_1' \quad \text{und} \quad M_2 = -M_2'$$

ist. Damit nun der einzelne Knoten im endgültigen Zustande des Fachwerkes gegen Drehung im Gleichgewichte ist, müssen sich die an

ihm angreifenden Drehmomente gegenseitig aufheben; wir bekommen also für jeden Knotenpunkt eine Gleichung, die *Knotenpunktgleichung*, von der Form:

$$\Sigma M = 0. \tag{1}$$

e) Durch Einführung der *Knotendrehwinkel* $\varphi$ als derjenigen Winkel, um den sich ein Knoten im Uhrzeigersinne dreht, wenn an dem vorher unbelasteten Fachwerke die betrachtete Belastung angebracht wird (vergl. Fig. 2), wird die Zahl der Unbekannten in den Knotenpunktgleichungen auf die Zahl dieser Gleichungen zurückgeführt. Der zu diesem Zwecke herzustellende Zusammenhang zwischen den Knotendrehwinkeln $\varphi$ und den Drehmomenten $M$ ergibt sich — falls das Grundspannungsproblem bereits gelöst ist — durch Berücksichtigung der Gleichung des verbogenen Stabes:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = - M_x', \tag{2}$$

(wo $E$ der Elastizitätsmodul des Stabmateriales, $J$ das in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes $Q$ ist) wenn wir uns statisch überlegen, wie das Biegungsmoment $M_x'$ mit der Grundspannung $S$ (als Zugspannung positiv gerechnet) unseres Stabes zusammenhängt. Man stellt sich das Kräftespiel im Fachwerke so vor, daß die Grundspannkraft $SQ$ exzentrisch, wie Fig. 1 zeigt, an dem Stabe angreift[1]), dadurch einerseits in dem Stabe die Grundspannung $S$ erzeugt, anderseits an jeder Stelle $x$ ein Biegungsmoment $M_x'$ entstehen läßt. Von diesem Biegungsmomente ist dann klar, daß es eine lineare Funktion von $x$ ist, vermehrt um das Glied $-SQ \cdot y$. Dieses letzte Glied wird unter der Voraussetzung, daß die Durchbiegung $y$ des Stabes nur klein ist, gegen die übrigen Glieder vernachlässigt; man bekommt so als Integral von (2) das Polynom dritten Grades (kubische Parabel)

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

mit den noch näher zu bestimmenden Konstanten $c_0 c_1 c_2 c_3$.

Nun gilt das Grundspannungsproblem als gelöst; man kennt also nach der Annahme unter a) sämtliche Knotenpunktverrückungen und damit auch sämtliche *Stabdrehwinkel* $\omega$, nämlich diejenigen Winkel, um welche sich bei Vorhandensein reibungsloser Scharniere der einzelne Stab bei Anbringen der Belastung im Uhrzeigersinne drehen würde. Man kann also die Tangenten der beiden kleinen Verdrehungen des

1) Daß in unserer Fig. 1 die Kräfte $SQ$ so symmetrisch liegen, ist natürlich speziell. Man vergleiche die allgemeineren Figuren 6 bis 11 der Manderlaschen Abhandlung.

verbogenen Stabes gegen die Verbindungsgerade seiner Knotenpunkte in den Knotenpunkten durch die beiden unbekannten Knotendrehwinkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und den bekannten Stabdrehwinkel $\omega_{12}$ ausdrücken:

Fig. 2.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \omega_{12} - \varphi_1 ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \omega_{12} - \varphi_2 .$$

Damit drücken sich aber auch die 4 Konstanten c durch $\varphi$ und $\omega$ aus, wenn man noch bedenkt, daß für $x = 0$ und $x = \varepsilon$ ($\varepsilon$ Länge des Stabes) $y = 0$ werden muß; man hat dann die vier Gleichungen aufzulösen:

$$c_0 = 0$$

$$c_1 + c_2\varepsilon + c_3\varepsilon^2 = 0$$

$$c_1 = \omega_{12} - \varphi_1$$

$$c_1 + 2c_2\varepsilon + 3c_3\varepsilon^2 = \omega_{12} - \varphi_2$$

und bekommt:

$$c_2\varepsilon = 2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\omega_{12}, \quad c_3\varepsilon^2 = -\varphi_1 - \varphi_2 + 2\omega_{12} .$$

Da nun nach Gleichung (2)

$$M_x' = -2EJ(c_2 + c_3 x)$$

ist, so ergeben sich die Drehmomente zu:

$$(3) \quad M_1 = -\frac{2EJ}{\varepsilon}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\omega_{12}), \quad M_2 = -\frac{2EJ}{\varepsilon}(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\omega_{12}).$$

*Diese Gleichungen* (3) *repräsentieren den gesuchten Zusammenhang.* Stoßen nun an einem Knotenpunkte $h$ die Stäbe 1 bis $n$ zusammen, die zu den Knotenpunkten 1 bis $n$ hinführen mögen, so gehen vermöge dieses Zusammenhanges unsere Knotenpunktgleichungen (1) in die Gleichungen über:

$$(4) \qquad 2n \cdot \varphi_h + \sum_{j=1}^{j=n} \varphi_j = 3 \sum_{j=1}^{j=n} \omega_j ,$$

eine Anzahl linearer Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Sind daraus die Knotendrehwinkel $\varphi$ ermittelt, so liefern die Gleichungen (3) hinterher die Drehmomente $M$.

f) Aus diesen sind dann endlich noch die *Nebenspannungen* selbst zu bestimmen. Rechnen wir (Fig. 3) eine Ordinate $z$ senkrecht zur

Mittellinie des Stabes, so ist die Biegungsspannung an der Stelle $x$, $z$ gegeben durch:

$$\sigma = \pm \frac{M_x'}{J} \cdot z.$$

An jedem Stabe interessiert aber wesentlich die *größte Nebenspannung*; man findet sie, wenn man erstens die größte Nebenspannung über den Querschnitt des Stabes nimmt, nämlich die Spannungen in den äußersten Fasern:

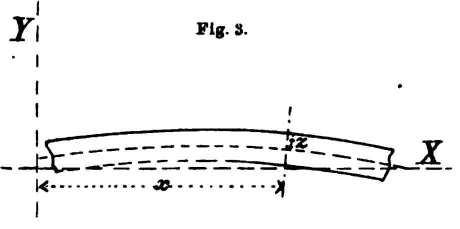


Fig. 3.

$$\sigma_0 = \pm \frac{M_x'}{J} \cdot \frac{\beta}{2},$$

wo $\beta$ die Breite des Stabes ist, und dann denjenigen Querschnitt aufsucht, dem das größte Biegungsmoment $M_x'$ zukommt. Dies ist aber stets einer der beiden Querschnitte an den Stabenden, da ja $M_x'$ eine lineare Funktion von $x$ ist. Man bekommt also als die größte Nebenspannung eines Stabes ($\sigma_{max.}$) den größeren der beiden Ausdrücke:

$$\frac{|M_1|}{J} \cdot \frac{\beta}{2}, \quad \frac{|M_2|}{J} \cdot \frac{\beta}{2}$$

mit dem positiven *und* dem negativen Vorzeichen, jenachdem man die Spannung an der konvexen oder der konkaven Seite des Stabes im Auge hat. Die *größte Gesamtspannung* des Stabes ist dann der größere der beiden Ausdrücke:

$$|S| + \frac{|M_1|}{J} \cdot \frac{\beta}{2}, \quad |S| + \frac{|M_2|}{J} \cdot \frac{\beta}{2}$$

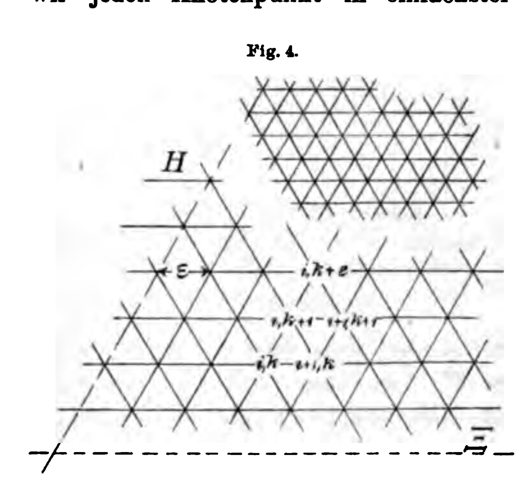
mit dem positiven *oder* negativen Vorzeichen, jenachdem $S$ ein Zug oder ein Druck ist. —

Den so skizzierten Ansatz nennen wir künftig der Kürze halber „den Manderlaschen Ansatz“, obwohl bei Manderla selbst die Untersuchung sehr viel weiter geführt ist.

2. *Spezialisierung auf elastisch-isotrope Fachwerke.* — Wir beschränken jetzt die Untersuchung auf diejenigen Fachwerke, deren Nebenspannungen im folgenden wirklich berechnet werden sollen (Fig. 4). Die Stäbe sind durch Seiten gleichseitiger Dreiecke repräsentiert; ihre Länge sei $\varepsilon$, ihre Breite $\beta$, ihr Elastizitätsmodnl $E$, ihr Querschnitt $Q$, dessen in Betracht kommendes Trägheitsmoment $J$. Wir nennen diese Fachwerke „*elastisch-isotrope Fachwerke*“, weil sie, wie in meiner Habilitationsschrift ausgeführt ist, mit der elastisch-isotropen Platte eng verwandt sind. Denken wir uns nun einstweilen unser Fachwerk

nach allen Richtungen hin unbegrenzt, so haben wir lauter ganz gleichartige Knotenpunkte, an denen immer sechs Stäbe zusammenstoßen. Durch Einführung des schiefwinkligen $\xi\eta$-Koordinatensystems der Fig. 4 und entsprechender Einführung ganzzahliger Indizes $i$ und $k$ können wir jeden Knotenpunkt in einfachster Weise charakterisieren. Das System der Knotenpunktgleichungen (4) nimmt dann hier die spezielle Form an:

Fig. 4.




$$(5)\quad \begin{aligned} 12\varphi_{i+1,k+1} &+ \varphi_{i+1,k} \\ + \varphi_{i,k+1} &+ \varphi_{i+2,k} + \varphi_{i,k+2} \\ + \varphi_{i+2,k+1} &+ \varphi_{i+1,k+2} \\ &= 3\cdot\Phi_{i+1,k+1}, \end{aligned}$$

wo wir die bequeme Abkürzung:

$\Phi_{ik}$ = Summe der Drehwinkel $\omega$ der sechs vom Knotenpunkte $i$, $k$ auslaufenden Stäbe

eingeführt haben. Brechen wir nachher das Fachwerk im Endlichen irgendwie ab, sodaß es einen *Rand* bekommt, so ist für die Randknotenpunkte natürlich nicht die Gleichung (5), sondern die allgemeinere Gleichung (4) gültig.

3. *Das übliche Näherungsverfahren.* — Die Knotenpunktgleichungen (5) bezw. (4) sind außerordentlich verwickelt, wie der bloße Augenschein lehrt; ist das Fachwerk hochgradig statisch unbestimmt, sodaß hundert und mehr Knotenpunkte vorhanden sind, so ist an ihre numerische Auflösung auf Grund irgend eines Eliminationsverfahrens im allgemeinen garnicht zu denken. Man wird sich daher nach einem Näherungsverfahren umsehen müssen. Obwohl man nun auf eine denkbar natürliche Weise auf das im vorigen so genannte übliche Näherungsverfahren geführt wird, wenn man das System der Gleichungen (5) als eine *Differenzengleichung* mit den unabhängigen Veränderlichen $\xi$ und $\eta$ (Koordinatensystem der Fig. 4) betrachtet, so soll doch der vielseitigeren Beleuchtung wegen jenes Verfahren zunächst so abgeleitet werden, wie es verschiedentlich in der Literatur geschieht. Das Verfahren ist folgendes: Man nimmt an, daß für das Gleichgewicht der Drehmomente an irgend einem Knotenpunkte vorwiegend die Steifigkeit eben dieses Knotenpunktes maßgebend ist und nimmt demnach bei der Bildung der betreffenden Knotenpunktgleichung die übrigen

Knotenpunkte als gelenkig an. Ist dann in Gleichung (3) 1 der steife, 2 der gelenkige Knotenpunkt, so haben wir statt (3):

$$M_2 = 0, \quad \text{daraus:} \quad \varphi_2 = \tfrac{3}{2}\omega_{12} - \tfrac{1}{2}\varphi_1, \quad \text{demnach:}$$

$$M_1 = -\frac{2EJ}{\varepsilon} \cdot \frac{3}{2}[\varphi_1 - \omega_{12}].$$

Hieraus resultiert dann in Verbindung mit (1) für unsere Knotenpunkte mit sechs Stäben an Stelle der Gleichung (5) die folgende:

$$(6) \qquad \varphi_{ik} - \tfrac{1}{6}\Phi_{ik} = 0.$$

Allgemeiner haben wir an Stelle der Gleichung (4) das Ergebnis: *Nach dem üblichen Näherungsverfahren ist der einzelne Knotendrehwinkel einfach das arithmetische Mittel aus den von ihm auslaufenden Stabdrehwinkeln.*

Diese Ableitung ist anschaulich, läßt aber keine Abschätzung des begangenen Fehlers zu und läßt insbesondere nicht erkennen, wodurch die eventuell existierenden Fälle charakterisiert sind, in denen das Näherungsverfahren ein genaues Verfahren ist. Mit der im folgenden Abschnitte gegebenen Ableitung verhält es sich umgekehrt; sie ist zwar wenig anschaulich, liefert aber ein Kriterium für die Genauigkeit.

4. *Bedingung für die Genauigkeit des üblichen Näherungsverfahrens.* — Um die Gleichung (5) als Differenzengleichung in den unabhängigen Veränderlichen $\xi$ und $\eta$ schreiben zu können, führen wir die in Betracht kommenden Differenzen einer Größe $G_{ik}$ an der Stelle $ik$ durch folgendes Gleichungsschema ein:

| | $G_{ik}$ | $G_{i+1,k}$ | $G_{i,k+1}$ | $G_{i+2,k}$ | $G_{i+1,k+1}$ | $G_{i,k+2}$ | $G_{i+2,k+1}$ | $G_{i+1,k+2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_{ik}$ | 1 | | | | | | | |
| $\Delta_\xi G_{ik}$ | $-1$ | 1 | | | | | | |
| $\Delta_\eta G_{ik}$ | $-1$ | | 1 | | | | | |
| $\Delta_{\xi^2} G_{ik}$ | 1 | $-2$ | | 1 | | | | |
| $\Delta_{\xi\eta} G_{ik}$ | 1 | $-1$ | $-1$ | | 1 | | | |
| $\Delta_{\eta^2} G_{ik}$ | 1 | | $-2$ | | | 1 | | |
| $\Delta_{\xi^2\eta} G_{ik}$ | $-1$ | 2 | 1 | $-1$ | $-2$ | | 1 | |
| $\Delta_{\xi\eta^2} G_{ik}$ | $-1$ | 1 | 2 | | $-2$ | $-1$ | | 1 |

welches so zu lesen ist, daß beispielsweise die zweimal nach $\xi$ genommene Differenz der Größe $G$ gleich

$$\Delta_{\xi^2} G_{ik} = G_{ik} - 2G_{i+1,k} + G_{i+2,k}$$

ist. Denken wir uns nun hier alle Größen:

$$G_{ik}, \quad G_{i+1,k}, \quad G_{i,k+1} \ldots$$

umgekehrt durch die Größen:

$$G_{ik}, \quad \Delta_\xi G_{ik}, \quad \Delta_\eta G_{ik} \ldots$$

ausgedrückt, so bekommen wir ein neues Gleichungsschema; dieses leitet sich aus dem obigen bekanntlich in einfacher Weise dadurch ab, daß man alle Minuszeichen durch Pluszeichen ersetzt und dann

$$G_{i+m,k+n} \quad \text{und} \quad \Delta_{\xi^m \eta^n} G_{ik}$$

gegenseitig vertauscht, sodaß man beispielsweise bekommt:

$$G_{i+2,k} = G_{ik} + 2\Delta_\xi G_{ik} + \Delta_{\xi^2} G_{ik}.$$

Man führe nun vermöge dieses Schemas in der Gleichung (5) alle Größen $\varphi_{i+m,k+n}$, $\Phi_{i+m,k+n}$ auf $\varphi_{ik}$, $\Phi_{ik}$ und deren Differenzen zurück, so erhält man folgende Differenzengleichung:

$$(7) \quad 18(\varphi_{ik} - \tfrac{1}{6}\Phi_{ik}) + 18\Delta_\xi(\varphi_{ik} - \tfrac{1}{6}\Phi_{ik}) + 18\Delta_\eta(\varphi_{ik} - \tfrac{1}{6}\Phi_{ik})$$
$$+ (2\Delta_{\xi^2} + 16\Delta_{\xi\eta} + 2\Delta_{\eta^2} + \Delta_{\xi^2\eta} + \Delta_{\xi\eta^2})\varphi_{ik} - 3\Delta_{\xi\eta}\Phi_{ik} = 0.$$

Hier ist nun der eigentliche Witz des üblichen Näherungsverfahrens deutlich zu erkennen; er besteht in der Tatsache, daß mit Einführung der Annahme (6) nicht nur das erste, differenzlose Glied in Gleichung (7) verschwindet, sondern auch die beiden folgenden Glieder, welche erste Differenzen enthalten. Die übrigen Glieder mit den zweiten und dritten Differenzen aber bilden ein Maß für den Fehler, den man beim üblichen Näherungsverfahren begeht. Sucht man nun weiter das Kriterium dafür, daß bei einer gegebenen Grundspannungsverteilung, also gegebenem $\Phi$, das Näherungsverfahren ein genaues Verfahren wird, so hat man mit der Annahme (6) und den daraus durch Differenzbildung folgenden:

$$\Delta_{\xi^2}\varphi_{ik} = \tfrac{1}{6}\Delta_{\xi^2}\Phi_{ik}, \quad \Delta_{\xi\eta}\varphi_{ik} = \tfrac{1}{6}\Delta_{\xi\eta}\Phi_{ik} \ldots \text{ usw.}$$

in die Gleichung (7) hineinzugehen und kommt so zu dem Ergebnis: *Soll das übliche Näherungsverfahren ein genaues Verfahren sein, so muß die Summe der Stabdrehwinkel am einzelnen Knotenpunkte, die Funktion $\Phi_{ik}$, der Differenzengleichung:*

$$(8) \qquad (\Delta_{\xi^2} - \Delta_{\xi\eta} + \Delta_{\eta^2} + \tfrac{1}{2}\Delta_{\xi^2\eta} + \tfrac{1}{2}\Delta_{\xi\eta^2})\Phi = 0$$

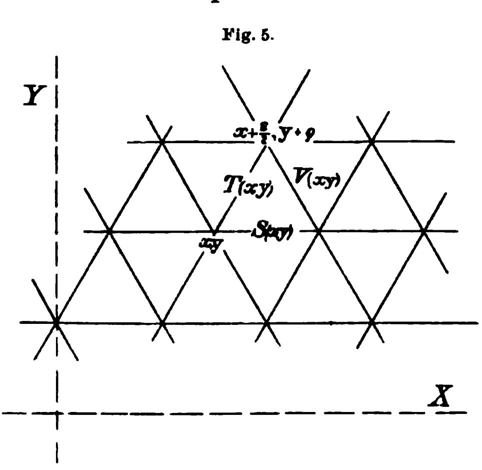
*genügen.*

**5.** *Zusammenhang mit der Airyschen Spannungsfunktion.* — In meiner Habilitationsschrift ist gezeigt, wie man die Grundspannungen

eines genügend engmaschigen elastisch-isotropen Fachwerkes in jedem Falle durch eine *Airysche Spannungsfunktion* mehr oder weniger angenähert, wie folgt, darstellen kann:

Bezeichnen wir unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 5) mit $S(xy)$ eine Spannung in demjenigen parallel zur $X$-Achse laufenden Stabe, dessen linker Endpunkt die Koordinaten $x, y$ hat, ferner mit $T(xy)$ eine Spannung in dem vom Punkte $(xy)$ nach rechts oben ansteigenden Stabe, mit $V(xy)$ endlich eine Spannung in demjenigen Stabe, der die beiden vorigen zu einem gleichseitigen Dreieck ergänzt, so ist klar, daß man den Grundspannungszustand eines elastisch-isotropen Fachwerkes vollständig kennt, wenn man die drei Größen $S$, $T$, $V$ als Funktionen von $x$ und $y$ kennt.

Fig. 5.




Es sei nun $F(x, y)$ eine Funktion, welche in unserem rechtwinkligen System der Differentialgleichung:

$$\nabla\nabla F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

genügt. Alsdann gewinnt man die — im allgemeinen nur angenähert richtige — Darstellung einer möglichen Grundspannungsverteilung in einem elastisch-isotropen Fachwerke, wenn man aus $F(xy)$ die Funktionen $S$, $T$, $V$ nach folgendem Schema bestimmt:

$$(9)\quad \begin{aligned} C\cdot S(xy) &= F\left(x+\frac{\varepsilon}{2},\, y+\varrho\right) + F\left(x+\frac{\varepsilon}{2},\, y-\varrho\right) - F(x+\varepsilon,\, y) - F(xy) \\ C\cdot T(xy) &= F(x+\varepsilon,\, y) + F(x-\tfrac{1}{2}\varepsilon,\, y+\varrho) - F\left(x+\frac{\varepsilon}{2},\, y+\varrho\right) - F(xy) \\ C\cdot V(xy) &= F\left(x+\frac{3\varepsilon}{2},\, y+\varrho\right) - F(x+\varepsilon,\, y) - F\left(x+\frac{\varepsilon}{2},\, y+\varrho\right) + F(xy), \end{aligned}$$

wo $C$ eine willkürliche Konstante und $\varrho$ eine Abkürzung für $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\varepsilon$ bedeutet.

*Ist überdies $F$ ein Polynom von nicht höherem als dem fünften Grade, so ist diese Darstellung nicht angenähert richtig, sondern genau richtig.*

Dabei hat man sich zunächst das Fachwerk als nach allen Seiten unbegrenzt zu denken. Hinterher führt man die gewollte Begrenzung

ein, indem man alle überflüssigen Stäbe entfernt. Um dabei das Gleichgewicht des Fachwerks nirgends zu stören, muß man dann die Spannungen in denjenigen fortgenommenen Stäben, welche einen Randknotenpunkt enthalten, durch entsprechende äußere Kräfte ersetzen, deren Gesamtheit dann diejenige Belastung vorstellt, welche in unserem begrenzten Fachwerke die Grundspannungsverteilung (9) hervorruft. Diese Sätze, bezüglich deren Nachweises ich auf meine Habilitationsschrift verweisen muß, betrachten wir im folgenden als Tatsachen.

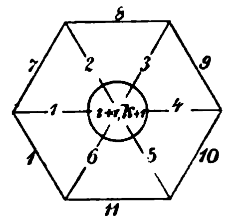
Kann man nun so den Grundspannungszustand eines elastisch-isotropen Fachwerkes durch eine einzige Funktion $F(xy)$ beschreiben, so natürlich auch die damit gegebenen Stabdrehwinkel und insbesondere deren Summen am einzelnen Knotenpunkte, $\Phi_{ik}$. Vermöge dieses Zusammenhanges geht die Bedingungsgleichung (8) für die Genauigkeit des üblichen Näherungsverfahrens in eine Bedingungsgleichung für die Funktion $F$ über. Die Frage nach ihrer Gestalt wollen wir so präzisieren: *Das Grundspannungsproblem eines elastisch-isotropen Fachwerkes sei von der Art, daß es durch ein Polynom $F(xy)$ von nicht höherem als dem fünften Grade als Spannungsfunktion in der durch Gleichung (9) gegebenen Weise gelöst wird. Welche weitere Bedingung muß das Polynom $F(xy)$ erfüllen, damit das übliche Näherungsverfahren ein genaues Verfahren wird?* Wir werden sehen, daß $F$ eine weitere Bedingung überhaupt nicht zu erfüllen braucht.

Um dies zu beweisen, beziehen wir zunächst alles auf unser schiefwinkliges Koordinatensystem von Fig. 4 mit Hilfe der Umformungsgleichungen:

$$x = \xi + \tfrac{1}{2}\eta, \quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\eta; \quad \xi = x - \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \frac{2y}{\sqrt{3}}.$$

Unser Polynom $F(xy)$ gehe dabei in das Polynom $P(\xi\eta)$ über, welches natürlich keinen höheren Grad als $F$ hat; die Differentialgleichung $\nabla\nabla F = 0$ geht in eine andere über, beiläufig in folgende:

Fig. 6.




$$(10)\quad \frac{\partial^4 P}{\partial\xi^4} - 2\frac{\partial^4 P}{\partial\xi^3\partial\eta} + 3\frac{\partial^4 P}{\partial\xi^2\partial\eta^2} - 2\frac{\partial^4 P}{\partial\xi\partial\eta^3} + \frac{\partial^4 P}{\partial\eta^4} = 0.$$

Unsere Aufgabe ist, die Funktion $\Phi_{ik}$ oder besser ihre in der Differenzengleichung (8) vorkommenden Differenzen durch Differenzen unseres Polynoms $P$ auszudrücken.

Erteilen wir vorübergehend den Stäben, die um den Knotenpunkt $i+1$, $k+1$ herumliegen, die Indizes 1 bis 12 (Fig. 6) und sind:

$$\vartheta_1\,\vartheta_2\,\ldots\,\vartheta_{12}$$

die kleinen elastischen Dehnungen, die diese Stäbe bei unserer Grundspannungsverteilung erfahren, sind entsprechend:

$$\omega_1 \omega_2 \omega_3 \ldots \omega_{12}$$

die zugehörigen Stabdrehwinkel, ist also:

$$\Phi_{i+1,k+1} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6,$$

so ist es zunächst Sache einer kleinen elementaren Rechnung, die Richtigkeit folgender Rekursionsgleichungen nachzuweisen, wobei wir uns der Abkürzung:

$$s = \frac{\vartheta}{\sqrt{3}}$$

bedient haben:

$$(11)\quad \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_1, \\ \omega_2 &= \omega_1 - s_1 - s_2 + 2s_7, \\ \omega_3 &= \omega_2 - s_2 - s_3 + 2s_8, \\ \omega_4 &= \omega_3 - s_3 - s_4 + 2s_9, \\ \omega_5 &= \omega_4 - s_4 - s_5 + 2s_{10}, \\ \omega_6 &= \omega_5 - s_5 - s_6 + 2s_{11}; \\ \\ \omega_8 &= \omega_3 - s_3 - s_8 + 2s_2. \end{aligned}$$

Hieraus folgen dann die Gleichungen:

$$(12)\left\{\begin{aligned} &\Phi_{i+1,k+1} = 6\omega_1 - 5s_1 - 9s_2 - 7s_3 - 5s_4 - 3s_5 - s_6 + 10s_7 + \\ &\qquad + 8s_8 + 6s_9 + 4s_{10} + 2s_{11} \\ &\text{und:} \\ &\omega_4 - \omega_1 = -s_1 - 2s_2 - 2s_3 - s_4 + 2(s_7 + s_8 + s_9), \\ &\omega_8 - \omega_1 = -s_1 - 2s_3 + 2(s_7 + s_8). \end{aligned}\right.$$

Die erste Gleichung (12) wollen wir noch einmal hinschreiben, aber in einer mehr graphischen Gestalt, nämlich als Fig. 7. Diese Figur ist aufzufassen als die algebraische Summe aller derjenigen Produkte, welche man bekommt, wenn man jede an einem Stabe stehende Zahl mit der zu diesem Stabe gehörigen Größe $s$ multipliziert; die Figur repräsentiert dann in der Tat die erste Gleichung (12). Der Zweck dieser Art Darstellung ist der, die folgenden Untersuchungen übersichtlich zu gestalten.

Fig. 7.

$\Phi_{i+1,k+1} = 6\omega_1 +$

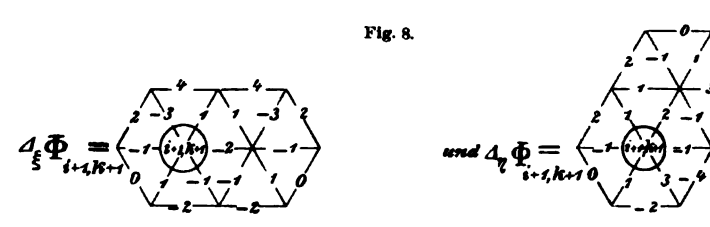
Bilden wir uns die ersten Differenzen von $\Phi_{i+1,k+1}$, nämlich die Größen:

$$\Delta_\xi \Phi_{i+1,k+1} = \Phi_{i+2,k+1} - \Phi_{i+1,k+1},$$

$$\Delta_\eta \Phi_{i+1,k+1} = \Phi_{i+1,k+2} - \Phi_{i+1,k+1},$$

und machen sie mit Hilfe der zweiten und dritten Gleichung (12) von den $\omega$ frei, so bekommen wir folgende „Figurengleichungen", die nach obiger Erklärung nicht mehr mißzuverstehen sind, wobei nur noch zu bemerken ist, daß die Figuren sich noch nicht unmittelbar so ergeben,

Fig. 8.

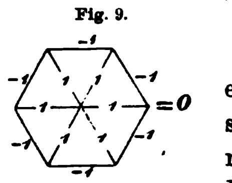


sondern erst dann, wenn man in den zunächst entstehenden Figuren wiederholt die für jedes Stabgebilde nach Art von Fig. 6 und 7 gültige Gleichung:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \vartheta_5 + \vartheta_6 = \vartheta_7 + \vartheta_8 + \vartheta_9 + \vartheta_{10} + \vartheta_{11} + \vartheta_{12},$$

bez. die Figurengleichung Fig. 9 berücksichtigt. Diese Gleichung ist der Ausdruck der Tatsache, daß unsere Grundspannungsverteilung das Hookesche Elastizitätsgesetz:

Fig. 9.

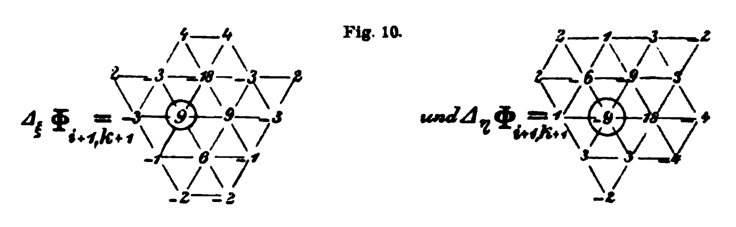


$$S = E \cdot \vartheta$$

erfüllt; diese Tatsache wiederum steht in einem ursächlichen Zusammenhange zu dem Bestehen der Differentialgleichung (10) für unser Polynom $P(\xi\eta)$. Für Leser, die meine Habilitationsschrift nicht kennen, muß dies ausdrücklich betont werden, da es sonst scheinen könnte, als würde die Voraussetzung, daß $P$ der Differentialgleichung (10) genügt, garnicht benutzt.

An Stelle der Dehnungen $\vartheta$ oder der Größen $s$ wollen wir jetzt in unsere Figurengleichungen die Werte $P_{ik}$ unseres Polynoms $P(\xi\eta)$

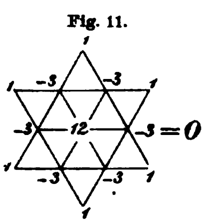
Fig. 10.



in den Knotenpunkten des Fachwerkes vermöge des durch die Gleichung (9) gegebenen Zusammenhanges einführen. Verfügen wir dabei über die dort willkürliche Konstante $C$ so, daß

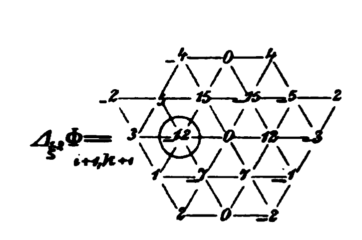
$$C = \frac{1}{E\sqrt{3}}$$

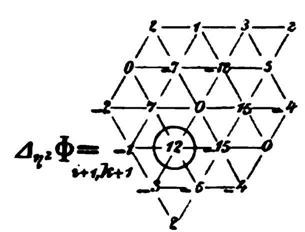
ist, so sparen wir das lästige Mitführen eines konstanten Faktors und erhalten aus der Fig. 8 die Fig. 10, in welcher der Knotenpunkt $i + 1$, $k + 1$ durch den um ihn gezogenen Kreis markiert ist — wie im folgenden immer — und wo im übrigen wiederholt die aus der Fig. 9 entstehende Gleichung der Fig. 11 berücksichtigt worden ist, die naturgemäß für einen jeden solchen „Sechszack" gültig ist.

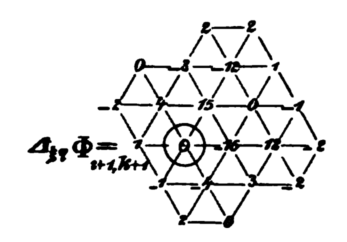

Fig. 11.

Natürlich sind diese Figuren, ganz analog der Fig. 8, aufzufassen als die algebraische Summe aus denjenigen Produkten, welche man erhält, wenn man die am einzelnen Knotenpunkte stehende Zahl mit dem Werte $P_{ik}$ multipliziert, den das Polynom in diesem Punkte hat.

Fig. 12.

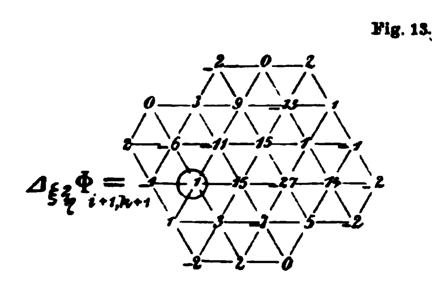


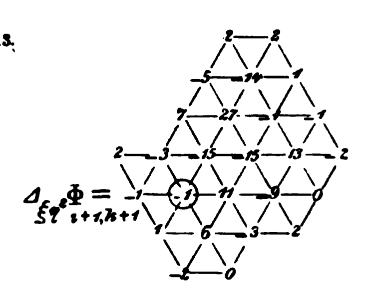




Um schließlich zu dem Differenzausdrucke der Gleichung (8) zu gelangen, müssen wir weitere höhere Differenzen von $\Phi_{i+1, k+1}$ bilden und

Fig. 13.

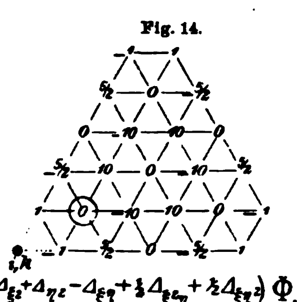




eben deshalb ist hier das Verfahren der Figurengleichungen von Nutzen Denn so lästig und unübersichtlich wegen der nicht zu vermeidenden

doppelten Indizes das Differenzbilden ist, wenn man analytisch zu Werke geht, so einfach und klar gestaltet es sich an den Figuren. Man hat immer nur in geeigneter Weise solche Figuren zu überlagern. Eine genauere Schilderung dürfte sich erübrigen; es möge genügen, noch die Zwischenresultate Fig. 12 und 13, und endlich noch das Schlußresultat 14 anzugeben.

Fig. 14.



Hier sind nun endlich noch alle Werte von $P_{i+m,\,k+n}$ durch den Wert $P_{ik}$ und dessen Differenzen zu ersetzen, was mit Hilfe des folgenden Schemas zu geschehen hat:

| | (10)–(01) | (20)–(02) | (30)–(03) | (21)–(12) | (40)–(04) | (31)–(13) | (50)–(05) | (41)–(14) | (32)–(23) | (51)–(15) | (42)–(24) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [10]—[01] | 1 | | | | | | | | | | |
| [20]—[02] | 2 | 1 | | | | | | | | | |
| [21]—[12] | 1 | 1 | | 1 | | | | | | | |
| [40]—[04] | 4 | 6 | 4 | | 1 | | | | | | |
| [31]—[13] | 2 | 3 | 1 | 3 | | 1 | | | | | |
| [50]—[05] | 5 | 10 | 10 | | 5 | | 1 | | | | |
| [32]—[23] | 1 | 2 | 1 | 3 | | 2 | | | 1 | | |
| [51]—[15] | 4 | 10 | 10 | 10 | 5 | 10 | 1 | 5 | | 1 | |
| [42]—[24] | 2 | 5 | 4 | 8 | 1 | 8 | | 2 | 4 | | 1 |

was so zu verstehen ist: Es ist:

$[mn]$ eine Abkürzung für $P_{i+m,\,k+n}$

$(mn)$ eine Abkürzung für $\varDelta_{\xi^m\eta^n} P_{ik}$

sodaß also beispielsweise:

$$P_{i+4,\,k} - P_{i,\,k+4} =$$
$$= \{4(\varDelta_\xi - \varDelta_\eta) + 6(\varDelta_{\xi^2} - \varDelta_{\eta^2}) + 4(\varDelta_{\xi^3} - \varDelta_{\eta^3}) + (\varDelta_{\xi^4} - \varDelta_{\eta^4})\} P_{ik} \quad \text{ist.}$$

Mit Hilfe dieses Schemas bekommen wir, wie man leicht nachrechnet, aus der Figurengleichung Fig. 14 die definitive Gleichung:

$$(13) \qquad (\varDelta_{\xi^2} + \varDelta_{\eta^2} - \varDelta_{\xi\eta} + \tfrac{1}{2}\varDelta_{\xi^2\eta} + \tfrac{1}{2}\varDelta_{\xi\eta^2})\,\Phi_{i+1,\,k+1} =$$
$$= [-(\varDelta_{\xi^3\eta} - \varDelta_{\xi\eta^3}) + \tfrac{5}{2}(\varDelta_{\xi^2\eta^2} - \varDelta_{\xi^2\eta^4})]\,P_{ik}.$$

Diese Gleichung beweist aber unsere Behauptung; denn nach Voraussetzung ist $P$ ein Polynom von nicht höherem als dem fünften Grade

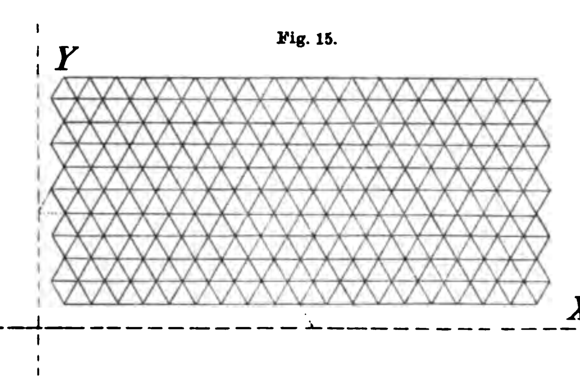
in $\xi$ und $\eta$; die sechsten und höheren Differenzen von $P$ und damit die rechte Seite der Gleichung (13) sind also gleich Null, also ist auch die linke Seite gleich Null, d. h. die Bedingung dafür, daß das übliche Näherungsverfahren die genauen Werte der Knotendrehwinkel liefert, wird durch unsere Spannungsfunktion $P$ tatsächlich erfüllt. Zusammenfassend haben wir nun folgendes Ergebnis:

*Setzt man in das Gleichungssystem* (9) *die Spannungsfunktion $F$ als ein Polynom in $x, y$ von nicht höherem Grade als dem fünften an, welches zugleich der Differentialgleichung $\nabla\nabla F = 0$ genügt, so definiert dieses Gleichungssystem völlig genau eine in einem elastisch-isotropen Fachwerke mögliche Grundspannungsverteilung. Die zugehörige Nebenspannungsverteilung bekommt man, ebenfalls völlig genau, wenn man das übliche Näherungsverfahren zur Bestimmung der Knotendrehwinkel benutzt.*

## II. Über die Nebenspannungen eines hochgradig statisch unbestimmten elastisch-isotropen Fachwerkbalkens.

**6.** *Allgemeine Erläuterungen zu den Tafeln I bis IV.* — Wir betrachten jetzt immer ein in der Weise der Fig. 15 abgegrenztes elastisch-isotropes Fachwerk, welches wir passend einen *Fachwerkbalken* nennen können. Das hinzugezeichnete rechtwinklige Koordinatensystem dient zur Orientierung der verschiedenen Spannungsfunktionen, als welche wir nacheinander ein Polynom zweiten, dritten, vierten und fünften Grades in $x$ und $y$ wählen, sodaß wir nach den vorigen Entwicklungen in allen Fällen in der Lage sind, die Manderlaschen Nebenspannungen mit Hilfe des üblichen Näherungsverfahrens genau zu ermitteln.

Fig. 15.




Die vier verschiedenen Belastungen, die sich so mit Berücksichtigung der Bemerkung von Seite 123 für unsern Balken ergeben, kann man, wie in meiner Habilitationsschrift näher ausgeführt ist, mit sehr guter Annäherung, wie folgt, charakterisieren:

Polynom 2. Gr.: Beanspruchung auf gleichförmige Dehnung; Taf. I
„ 3. Gr.: „ „ „ Biegung; Taf. II

Polynom 4. Gr.: Quasi-eingespannter Balken mit transversaler Last am freien Ende; Taf. III

„ 5. Gr.: Beanspruchung einer Längskante durch gleichförmigen Normaldruck; Taf. IV.

Bei Berechnung der Nebenspannungen sind die Randknotenpunkte zunächst genau so zu behandeln wie die andern, damit das übliche Näherungsverfahren an allen inneren Knotenpunkten des Balkens die genauen Werte liefert, und erst nachdem alle Nebenspannungen berechnet sind, hat man die überzähligen Stäbe zu entfernen. Man stört dabei dann nur das Gleichgewicht der Biegungsmomente an den Randknotenpunkten, während im Innern alles in Ordnung bleibt. Die mit den überzähligen Stäben fortgenommenen Biegungsmomente muß man sich, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, als von außen auf den betreffenden Randknotenpunkt wirkende Biegungsmomente vorstellen und die später zu beantwortende Frage ist: Was machen diese störenden Biegungsmomente, diese „Unstimmigkeiten am Rande des Balkens" hinsichtlich unserer numerischen Ergebnisse aus, inwiefern werden diese durch sie modifiziert?

Einstweilen tun wir so, als sei diese Frage in dem Sinne erledigt, daß wir uns um die Unstimmigkeiten garnicht zu bekümmern brauchen (was auch nahezu stimmt) und gehen demgemäß zu einer Beschreibung der Tafeln I bis IV über, wobei wir zweckmäßig das voranstellen, was sich gleichmäßig auf alle vier Tafeln bezieht.

An die Bedeutung der Größen $E$, $J$, $\varepsilon$, $\beta$ werde eben erinnert. Es ist:

$E$ der Elastizitätsmodul der Stäbe (in kg : cm²)

$J$ das in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes (in cm⁴)

$\varepsilon$ die Länge der Stäbe (in cm)

$\beta$ „ Breite „ „ (in cm)

$\varphi$ der Querschnitt der Stäbe (in cm²);

außerdem seien: $E'$, $J'$, $\varepsilon'$ usw. die Zahlenwerte obiger Größen, sodaß: $E = E'$ kg : cm² usw.

Jede der vier Tafeln zerfällt wesentlich in die Figuren $A$, $B$ und $C$. In diesen Figuren sind Zahlen hineingeschrieben, von denen einige unterstrichen sind, andere nicht. Dieser Unterschied bedeutet nichts weiter als daß *die unterstrichenen Zahlen negativ zu nehmen sind, die andern positiv*. Im übrigen macht man sich die Bedeutung der Zahlen am besten an einigen Musterbeispielen klar.

Auf Taf. II, Fig. A, finden wir (mehr als) einen Stab, an dem:

• 30+1 •

steht. Die Zahl 30 bedeutet zunächst folgendes: Ist unser Balken auf gleichförmige Biegung beansprucht, d. h. so, wie es die kleine Figur auf Taf. II erkennen läßt, so ist bei geeigneter Wahl der Größe der Belastung die Grundspannung dieses Stabes eine Druckspannung vom Betrage 30 kg : cm²:

$$S = -30 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Was die Zahl 1 bedeutet, sagen wir nachher.

Auf Taf. II, Fig. B, bietet ein Stab mit seinen beiden Knotenpunkten beispielsweise folgendes Bild:

(780) 140 (900)

Das bedeutet: Dem Grundspannungssystem der Fig. A entspricht für diesen Stab der im Uhrzeigersinne positiv gerechnete Stabdrehwinkel:

$$\omega = + \frac{140}{E'\sqrt{3}},$$

(wäre die 140 unterstrichen, so wäre $\omega$ negativ). Am linken Knotenpunkte steht die Zahl 780; das bedeutet: Der Knotendrehwinkel des linken Knotenpunktes beträgt:

$$\varphi = + \frac{780}{6E'\sqrt{3}}.$$

Auf Taf. II, Fig. C, stehen beispielsweise an einem Stabe die Zahlen 5 und 4:

•

•

Das bedeutet: Bei Zugrundelegung des Grundspannungssystemes der Fig. A findet folgendes statt:

1) Unser Stab überträgt auf den unteren, bez. oberen Knotenpunkt ein Drehmoment vom Betrage:

$$M_{\text{unten}} = \frac{100}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{J'}{\beta'} \cdot 5 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad M_{\text{oben}} = \frac{100}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{J'}{\beta'} \cdot 4 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

2) Diesen Drehmomenten entsprechen folgende größte Nebenspannungen an den Stabenden:

$$\sigma_0^{\text{unten}} = \pm \frac{100}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\beta'}{\varepsilon'} \cdot 5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \sigma_0^{\text{oben}} = \pm \frac{100}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\beta'}{\varepsilon'} \cdot 4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

3) Die größere der beiden Zahlen liefert natürlich die größte in dem Stabe auftretende Nebenspannung zu:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{100}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\beta'}{\varepsilon'} \cdot 5 \frac{kg}{cm^2}.$$

Eben diese größten Nebenspannungen sind dann auch in Fig. A eingetragen und zwar mit demjenigen Vorzeichen, welches der Grundspannung dieses Stabes zukommt. Damit ergibt sich endlich die Bedeutung der Zahl 1 im Zusammenhange mit der Zahl 30 in Fig. A: *Die größte Gesamtspannung eines in Fig.* A *durch den Zahlenkomplex:*

$$\underline{30 + 1}$$

*gekennzeichneten Stabes ist eine Druckspannung vom Betrage:*

$$\left(30 + \frac{100}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\beta'}{\varepsilon'} \cdot 1\right) \frac{kg}{cm^2}.$$

Selbstverständlich hat es seinen besonderen Grund, daß hier gerade der Koeffizient $\frac{100}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\beta'}{\varepsilon'}$ vorkommt. Bei wirklich ausgeführten hochgradig statisch unbestimmten Fachwerken ist nämlich das Verhältnis von Stabbreite zu Stablänge etwa 1 : 10, der Koeffizient also etwa gleich Eins. Für diesen Fall bedeuten dann die Zahlen der Figuren C *unmittelbar* die größten Nebenspannungen an den Stabenden in kg : cm² und die Figuren A gestatten *ohne weiteres* eine klare Übersicht über das gegenseitige Verhältnis von Grundspannungen, größten Nebenspannungen und größten Gesamtspannungen.

Die Figuren C geben einigermaßen ein Bild von der Verbiegung der Stäbe. Haben beide Zahlen eines Stabes gleiches Vorzeichen, so ist der Stab $S$-förmig verbogen, andernfalls $C$-förmig. Sind speziell beide Zahlen gleich, so liegt der Wendepunkt des $S$ in der Mitte des Stabes.

Da die Randknotenpunkte im Sinne der Bemerkungen von Seite 130 zunächst genau wie alle andern Knotenpunkte zu behandeln waren, zeigen die Figuren A Grundspannungen und die Figuren B Stabdrehwinkel auch für solche Stäbe, die nicht zum Balken gehören. In den Figuren C endlich bedeuten die Zahlen, die sich außerhalb des Balkens befinden, die weiter oben erwähnten störenden Biegungsmomente, die man von außen am Balken angreifen lassen muß, um auch am Rande Gleichgewicht herzustellen.

Leser, welche die Zahlen der Tafeln nachprüfen wollen, etwa daraufhin, ob die algebraische Summe der Biegungsmomente an den Knotenpunkten wirklich Null ist, werden hier vielfach kleine Un-

stimmigkeiten entdecken; diese rühren daher, daß alle Zahlen im Interesse der Übersichtlichkeit und größeren Einfachheit der Figuren stark abgerundet sind, nachdem zuvor — mit Rechenmaschine — alles genau gerechnet wurde. Obwohl so die einzelne Zahl einmal um $\pm \frac{1}{2}$ falsch sein kann, geht durch die Abrundung das Wesen der Sache wohl nicht verloren.

Nachdem gesagt ist, wie die Tafeln zu lesen sind, bleibt vielleicht übrig, noch einmal im Zusammenhange ihre Entstehung zu erklären. Zunächst wird die betreffende Spannungsfunktion aufgestellt. Sie heiße hier einfach $F(xy)$; ihre Werte im einzelnen geben wir nachher an. Aus der Spannungsfunktion bekommt man die Grundspannungen durch die Gleichungen (9), Seite 123, daraus und aus:

$$\text{Spannung} = E \cdot \text{Dehnung}, \quad \text{Dehnung } \vartheta = \sqrt{3} \cdot s$$

und den Gleichungen (11), (12), Seite 125, die Stabdrehwinkel und ihre Summen am einzelnen Knotenpunkte, daraus nach der Gleichung (6), Seite 121, die Knotendrehwinkel; daraus nach Gleichung (3), Seite 118, die Drehmomente und daraus endlich nach den Erklärungen unter f), Seite 118, die Nebenspannungen. —

7. *Einzelbesprechung der Tafeln* I *bis* IV. — a) *Der auf gleichförmige Dehnung beanspruchte Fachwerkbalken.* Taf. I. Dieser Fall liegt sehr einfach; um hier die Nebenspannungen zu finden, bedarf man kaum des Begriffes der Airyschen Spannungsfunktion und der Ergebnisse der vorliegenden Abhandlung. Empfiehlt es sich aber schon des Zusammenhanges wegen, ihn hier zu behandeln, so noch mehr aus einem andern Grunde. Es tritt uns nämlich hier in besonders einfacher Gestalt eine gewisse Eigentümlichkeit des Manderlaschen Ansatzes entgegen, der wir auch nachher begegnen und welche, wenn auch nur kurz, erörtert werden muß.

Als Spannungsfunktion kommt das Polynom 2. Grades:

$$F(xy) = y^2$$

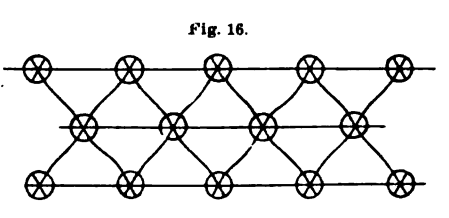
in Betracht. Die Gleichungen (9) liefern also bei geeigneter Verfügung über die Konstante $C$ die Spannungsverteilung:

$$S(xy) = 10, \quad T(xy) = 0, \quad V(xy) = 0.$$

In allen horizontalen Stäben herrscht also ein und dieselbe Grundspannung $\left(10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$, alle anderen Stäbe sind spannungsfrei. Bestimmen wir jetzt die Stabdrehwinkel, so sind diese für alle horizontalen Stäbe gleich Null, für die andern gleich einer, positiv oder negativ genommenen Konstanten, jenachdem die Stäbe nach rechts steigen oder fallen.

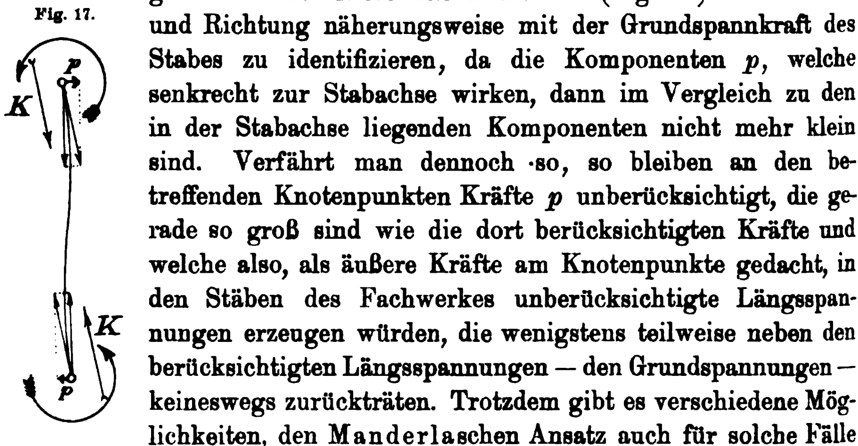
Die Summen der Stabdrehwinkel am einzelnen Knotenpunkt sind demnach Null, und so ergibt der Manderlasche Ansatz folgendes Bild von Nebenspannungen: In allen horizontalen Stäben herrscht keine Nebenspannung; alle andern Stäbe sind in derselben Weise $S$-förmig so verbogen, daß der Wendepunkt der $S$ in der Stabmitte liegt, an den beiden Enden also gleiche Drehmomente auf die Knoten übertragen werden (Fig. 16).

Fig. 16.



Die erwähnte Eigentümlichkeit des Manderlaschen Ansatzes zeigt sich nun im vorliegenden Falle darin, daß er für die schrägliegenden Stäbe Nebenspannungen liefert, welche die Grundspannungen dieser Stäbe (Null) beträchtlich überragen, und daß dieses Ergebnis Vertrauen verdient, obwohl anderseits der Manderlasche Ansatz im allgemeinen die Annahme enthält, daß die Nebenspannung eines Stabes im Verhältnis zu seiner Grundspannung klein ist. Ist nämlich dieses Verhältnis nicht klein, so hat es zunächst gar keinen Sinn, die an einem Stabe angreifenden resultierenden Kräfte $K$ (Fig. 17) nach Größe und Richtung näherungsweise mit der Grundspannkraft des Stabes zu identifizieren, da die Komponenten $p$, welche senkrecht zur Stabachse wirken, dann im Vergleich zu den in der Stabachse liegenden Komponenten nicht mehr klein sind. Verfährt man dennoch so, so bleiben an den betreffenden Knotenpunkten Kräfte $p$ unberücksichtigt, die gerade so groß sind wie die dort berücksichtigten Kräfte und welche also, als äußere Kräfte am Knotenpunkte gedacht, in den Stäben des Fachwerkes unberücksichtigte Längsspannungen erzeugen würden, die wenigstens teilweise neben den berücksichtigten Längsspannungen — den Grundspannungen — keineswegs zurückträten. Trotzdem gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Manderlaschen Ansatz auch für solche Fälle zu retten; einmal die allgemeine Möglichkeit eines sukzessiven Näherungsverfahrens, worauf wir aber hier nicht einzugehen brauchen, und dann besondere Möglichkeiten, die in den besonderen Umständen des einzelnen Falles begründet liegen. Auf diese können wir uns nun in allen vier Fällen stützen. So schneidet z. B. im vorliegenden Falle der gleichförmigen Dehnung der Manderlasche Ansatz sehr gut ab, weil wenigstens an allen inneren Knotenpunkten des Balkens die Kräfte $p$ sich gegenseitig vollständig aufheben, also auch keine störenden Längsspannungen erzeugen können. An den Randknotenpunkten ist dies freilich nicht der

Fig. 17.



Fall; hier ist aber zu bedenken, daß, unter $G$ eine größere Grundspannung verstanden, sich die Größenordnung der Längsspannungen, die durch Kräfte $p$ erzeugt werden können, auf einen Bruchteil von $\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right)^2 \cdot G$, etwa auf $0{,}002\ G$ bis $0{,}005\ G$ abschätzen läßt; da nun an allen Stellen unseres Balkens solche größere Grundspannungen vorhanden sind (wenn auch nur in den horizontalen Stäben), wird auch an allen Stellen des Balkens der Manderlasche Ansatz zuverlässige Ergebnisse liefern.

Wie sieht es nun mit den Unstimmigkeiten der Biegungsmomente am Rande aus? Es sind keine vorhanden, denn die bei der Abgrenzung des Balkens am Rande fortgenommenen Stäbe enthalten Biegungsmomente, welche teils an sich verschwinden, teils sich gegenseitig aufheben, sodaß sich auch die übrig bleibenden Biegungsmomente gegenseitig aufheben müssen.

b) *Der auf gleichförmige Biegung beanspruchte Fachwerkbalken.* Taf. II.

Die Art der Belastung ist aus der kleinen Figur von Taf. II zu erkennen; ihr entspricht als Spannungsfunktion das Polynom dritten Grades:

$$F(xy) = (y - 6\varrho)^3, \quad \text{wo } \varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \varepsilon$$

und, bei geeigneter Verfügung über die Konstante $C$ der Gleichung (9), die Spannungsverteilung:

$$S(xy) = \frac{10\,(y - 6\varrho)}{\varrho}, \quad T(xy) = 0, \quad V(xy) = 0;$$

die Grundspannungen in den schräg liegenden Stäben verschwinden also wieder, die andern sind linear in $y$, in der horizontalen Symmetrieachse des Balkens ist die Grundspannung Null (neutrale Linie), von dort aus nimmt sie proportional dem Abstande von der Symmetrieachse zu, in der oberen Hälfte herrscht Zug, in der unteren Druck. Die Stabdrehwinkel und die Knotendrehwinkel findet man als lineare Funktionen in $x$ und $y$; die Biegungsmomente an den Knotenpunkten, bzw. die Nebenspannungen an den Stabenden hängen nur von $y$ ab; es brauchte daher in Fig. C (und Fig. A) nur ein schmaler Vertikalstreifen des Fachwerkes abgebildet zu werden.

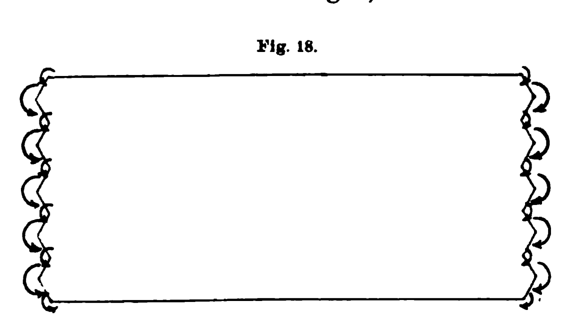
Die horizontalen Stäbe verbiegen sich alle $C$-förmig, alle anderen Stäbe $S$-förmig.

Bezüglich der unter a) erwähnten Eigentümlichkeit des Manderlaschen Ansatzes gilt hier dasselbe wie dort, etwa mit folgender Modifikation: Die Kräfte $p$ heben sich hier auch an den inneren Knoten-

punkten nicht vollständig auf, aber doch nahezu; außerdem kommt noch als günstiges Moment in Betracht, daß größere Grundspannungen als dort vorhanden sind.

Unstimmigkeiten der Biegungsmomente am Rande sind hier vorhanden, freilich nicht an den horizontalen, wohl aber an den zackigen Rändern, und zwar zeigen die störenden Biegungsmomente folgendes Bild (Fig. 18), wo sich die größeren zu den kleineren Biegungsmomenten wie 3 : 1 verhalten, wie auch die Fig. C auf Taf. II erkennen läßt. Wir werden nachher zeigen, daß diese Störungen ganz unbedenklich sind, obwohl die störenden Momente keineswegs klein sind gegen die für das Balkeninnere errechneten Biegungsmomente.

Fig. 18.



c) *Der quasi-eingespannte und am freien Ende transversal belastete Fachwerkbalken.* Taf. III.

„Quasi-eingespannt" nennen wir diesen Balken, weil er am linken Ende zwar nicht wirklich eingespannt ist, weil aber die Kraftverteilung dort etwa so ist, wie sie bei einer Einspannung sein würde, falls am rechten Ende die in der kleinen Figur von Taf. III angegebene resultierende Kraft angreift.

Die Spannungsfunktion ist hier das Polynom vierten Grades:

$$F(xy) = y^2 (20\varepsilon - x)(y - 18\varrho), \quad \text{wo } \varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\varepsilon.$$

Die Gleichungen (9) liefern bei geeigneter Wahl von $C$ die Grundspannungsverteilung:

$$S(xy) = \frac{2}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{(39\varepsilon - 2x)(y - 6\varrho)}{\varepsilon^2}$$

$$T(xy) = -V(xy) = -\frac{1}{45} \cdot \frac{51\varepsilon^2 + 12y(11\varrho - y)}{\varepsilon^2};$$

sie ist in meiner Habilitationsschrift eingehender beschrieben.

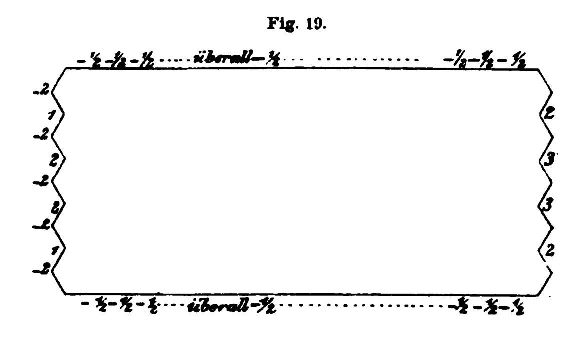
Aus Symmetriegründen brauchte in den Zeichnungen nur eine Hälfte des Balkens bezüglich seiner horizontalen Symmetrieachse berücksichtigt zu werden. Bei der Spiegelung an dieser sind in Fig. A alle Vorzeichen zu vertauschen, während sie in den Figuren B und C beizubehalten sind.

Fast alle Stäbe werden $S$-förmig verbogen.

Bezüglich der Kräfte $p$ an den Knotenpunkten gilt das unter b) Gesagte.

Die Unstimmigkeiten am Rande sind von der Art der Fig. 19. Die Werte $-\frac{1}{2}$ an den horizontalen Rändern, die hier angegeben sind, sind in der Fig. C der starken Abrundung der Zahlen zum Opfer gefallen. Daß die störenden Momente sich in ihrer Gesamtheit nicht gegenseitig aufheben, liegt nur daran, daß die von den Kräften $p$ herrührenden Momente vernachlässigt werden; bei den früheren Fällen konnte diese Unstimmigkeit nicht in Erscheinung treten, weil sich dort aus Symmetriegründen die störenden Momente und die Momente der $p$ für sich genommen aufheben mußten. Mit diesen Dingen haben wir uns nachher irgendwie abzufinden.

Fig. 19.




d) *Der Fachwerkbalken unter gleichförmigem Normaldruck auf eine Gurtung.* Taf. IV.

Die Art der Belastung ist aus den kleinen Figuren auf Taf. IV zu erkennen; die Kräfte an den Zickzackrändern sind einfach in ihre Resultante zusammengezogen.

Die Spannungsfunktion ist (frei nach Maxwell) folgendes Polynon fünften Grades:

$$F(xy) = y^2[10x(20\varepsilon - x)(18\varrho - y) - 480\varrho^2 y + 60\varrho y^2 - 2y^3],$$

wo

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\varepsilon,$$

selbstverständlich bezogen auf das Koordinatensystem der Fig. 15.

Die Ausdrücke für $S(xy)$, $T(xy)$ und $V(xy)$, welche man hieraus vermöge der Gleichungen (9) ableiten kann, sind wenig übersichtlich, ihre Aufstellung mag daher unterbleiben. Für die numerische Rechnung ist es zweckmäßig, zunächst für alle Knotenpunkte die Werte von $F$ *numerisch* nach obiger Gleichung zu bestimmen und dann die Operationen der Gleichungen (9) gleich mit den so gewonnenen Zahlen vorzunehmen. Man findet dann die Grundspannungsverteilung verhältnismäßig schnell; erwähnt sei, daß sie in meiner Habilitationsschrift in einem Kräfteplane anschaulich niedergelegt ist.

Die Symmetrie des Falles ist so, daß in den Zeichnungen nur die eine Hälfte des Balkens hinsichtlich seiner vertikalen Symmetrieachse

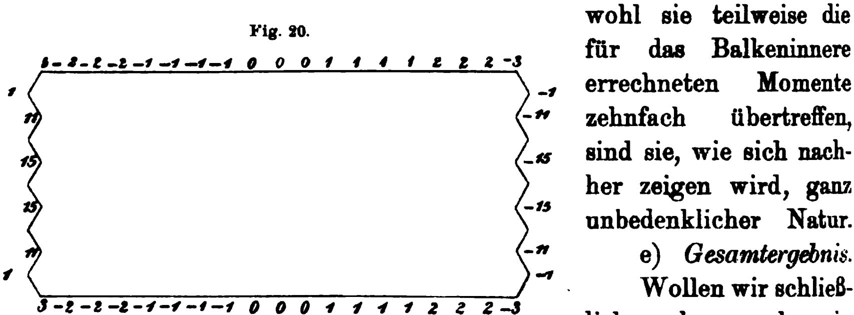
zu berücksichtigen war; bei der Spiegelung an dieser sind in Fig. A alle Vorzeichen beizubehalten, während sie in Fig. B und C zu vertauschen sind.

Auch hier bemerken wir wieder fast durchweg ein $S$-förmiges Verbiegen der Stäbe.

Bezüglich der Kräfte $p$ vergleiche man das unter b) Gesagte.

Die störenden Momente am Rande sind in Fig. 20 wiedergegeben; infolge der Symmetrie des Falles heben sie sich gegenseitig auf. Obwohl sie teilweise die für das Balkeninnere errechneten Momente zehnfach übertreffen, sind sie, wie sich nachher zeigen wird, ganz unbedenklicher Natur.

Fig. 20.




e) *Gesamtergebnis.* Wollen wir schließlich noch versuchen, in knapper Form ein Gesamtergebnis der ganzen Untersuchung anzugeben, so werden wir vielleicht so sagen können:

*Beträgt in einem hochgradig statisch unbestimmten Fachwerkbalken der betrachteten Art das Verhältnis von Stabbreite zu Stablänge etwa 1:10, wie es in Wirklichkeit zutrifft, so ist damit zu rechnen, daß die durch Knotensteifigkeit entstehenden Nebenspannungen etwa 10 bis 20 v. H. der größten Grundspannungen ausmachen können und ferner damit, daß vielfach gerade auf diejenigen Stäbe die stärkeren Nebenspannungen kommen, welche durch Grundspannungen weniger stark in Anspruch genommen sind. Die feste Vernietung dieser Fachwerke hat also die Wirkung, daß die Spannungen über das Fachwerk gleichmäßiger verteilt sind als bei Vorhandensein reibungsloser Scharniere in den Knotenpunkten.*

8. *Die Unstimmigkeiten am Rande des Fachwerkbalkens.* — Zum Schlusse der ganzen Untersuchung müssen wir uns nun noch über die Wirkung jener störenden Momente klar werden, welche von außen an den Randknotenpunkten des Balkens angreifen und durchaus keine unbeträchtlichen Werte besitzen. Wenn wir nachweisen können, daß die störenden Momente nur in den dem Rande zunächst gelegenen Stäben nennenswerte Biegungsspannungen erzeugen, ihre Wirkung aber stark abflaut, sowie wir uns ins Innere des Balkens begeben, so dürfen wir sagen: Unsere errechneten Nebenspannungen sind im wesentlichen richtig, nur in nächster Nähe des Randes stimmen sie nicht. Wenn es dann weiterhin noch gelingen sollte, wenigstens schätzungsweise an-

zugeben, wie die errechneten Werte in nächster Nähe des Randes abzuändern sind, so hätten wir damit ein völlig befriedigendes Ergebnis gewonnen.

Demgemäß hätten wir uns jetzt der Frage zuzuwenden: Welche Biegungsmomente werden in unserm fest vernieteten Fachwerkbalken erzeugt, wenn an seinen Randknotenpunkten keine äußeren Kräfte (Belastung) angreifen, sondern nur äußere Drehmomente, Drehmomente nach Art der Fig. 18, 19, 20? Dabei sieht man sofort, daß diese Frage hinsichtlich der Drehmomente der Fig. 19 verfehlt ist, da dieselben gar kein Gleichgewichtssystem bilden; hier müßte man eigentlich das System der damals vernachlässigten Kräfte $p$ noch als äußere Kräfte hinzufügen, um zu einer vernünftigen Fragestellung zu kommen. Wenn wir aber zur Lösung der obigen Fragen den Manderlaschen Ansatz benutzen wollen, so können wir den Widerspruch ruhig stehen lassen, da der Manderlasche Ansatz ohnehin alle Kräfte $p$ vernachlässigt, ein daraus resultierender Widerspruch also nicht stören kann. Wir haben dann, genauer zu reden, folgenden Ansatz zu machen:

Eine Belastung greift nicht an; mithin sind alle Grundspannungen gleich Null, also auch alle Stabdrehwinkel und Funktionen $\Phi$. Der durch die Gleichung (3) gegebene Zusammenhang zwischen Drehmomenten, Knotendrehwinkeln und Stabdrehwinkeln nimmt also hier die einfachere Gestalt an:

$$(14) \qquad M_1 = -\frac{2EJ}{\varepsilon}(2\varphi_1 + \varphi_2), \quad M_2 = -\frac{2EJ}{\varepsilon}(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

die unbekannten Knotendrehwinkel $\varphi$ bestimmen sich dann aus der Bedingung, daß die Summe der Drehmomente an allen inneren Knotenpunkten Null sein muß, an allen Randknotenpunkten das dort angreifende störende Moment zu Null ergänzen muß. Die damit gestellte Aufgabe kennzeichnet sich als eine Randwertaufgabe für eine Differenzengleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, welche durchaus keinen inneren Widerspruch enthält, wenn die störenden Momente sich nicht gegenseitig aufheben.

Ob aber dieser Ansatz überhaupt geeignet ist, unsere oben gestellten Fragen richtig zu beantworten, ist eine andere Frage; wenn alle Grundspannungen Null sind, möchte die konsequente Vernachlässigung der Kräfte $p$ — solche Kräfte werden sich ja natürlich wieder einstellen — bedenklich scheinen; sie ist es sicher auch insofern, als die berechneten Werte nicht genau die richtigen sein werden. Das aber dürfen wir annehmen, daß die *Größenordnung* der Drehmomente $M$ bei unserm Ansatze richtig herauskommt, daß also insbesondere die Wirkung

eines äußeren Drehmomentes nach dem Inneren des Balkens zu *wirklich* stark abflauen wird, falls dies *bei unserm Ansatze* herauskommen sollte.

Aber es ist uns noch eine weitere Vereinfachung vonnöten, wenn wir zu einem Ziele gelangen wollen. Bei dem heutigen Stande der Differenzenrechnung dürfte es nicht möglich sein, die oben gekennzeichnete Randwertaufgabe befriedigend zu lösen. Wir müssen vielmehr durchaus unsere Differenzengleichung irgendwie auf eine oder mehrere solche zurückführen, die eine einzige unabhängige Veränderliche enthalten. Dies dürfte sich auf folgende Art bewerkstelligen lassen.

Wenn in den Fällen $a$ und $b$ der Fig. 21 die Wirkung der äußeren Drehmomente $M$ und $-M$ sich nicht merklich in das Innere des Fachwerkes fortpflanzt, so wird dasselbe der Fall sein für die äußeren Drehmomente, welche in den Fig. 18 bis 20 links und rechts an unserm Balken angreifen; es dürfte wohl gestattet sein, in dieser Hinsicht den Balken einfach so aufzufassen, als wenn er aus lauter solchen horizontalen Fachwerkstreifen, wie unsere Fig. a und b sie zeigen, zusammengesetzt wäre. Analoges dürfte für den Vertikalstreifen der Fig. c gelten, in welcher die oben angreifenden Momente $M$ unten irgendwie durch ein Moment $-2M$ aufgehoben werden; wir setzen lauter solche Vertikalstreifen nebeneinander und bekommen damit — wollen wir annehmen — den Balken von Fig. 19 (und 20) hinsichtlich der Wirkungsweise der an der oberen Gurtung angreifenden störenden Momente.



Fig. 21.

Nun wollen wir endlich noch annehmen, es genüge, von den drei Fällen der Fig. 21 einen einzigen zu untersuchen, etwa den Fall $a$, und stellen uns demnach folgende Aufgabe: An den Knotenpunkten $A$ und $B$ des Fachwerkes der Fig. 22 (mit $2n$ inneren Knotenpunkten) wirken die äußeren Drehmomente $M$ und $-M$; welche Drehmomente werden dabei nach unserm modifizierten Manderlaschen Ansatze von den einzelnen Stäben auf die Knotenpunkte übertragen?

Wir können von vornherein die zutreffende Annahme einführen,

daß an der oberen und unteren Gurtung die gleichen Knotendrehwinkel vorkommen. Nennen wir diese dann:

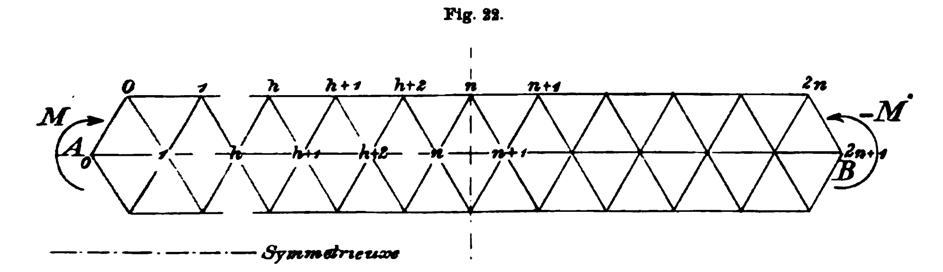
$$\psi_0 \psi_1 \psi_2 \dots \psi_h \dots \psi_{2n},$$

diejenigen der Knotenpunkte auf der horizontalen Mittellinie des Fachwerks:

$$\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_h \dots \varphi_{2n+1},$$

rechnen wir ferner eine Koordinate $x$ von den Knotenpunkten 0 aus nach rechts, sodaß, wenn die Stablänge Eins ist, $x$ im Knotenpunkte $h$ den Wert $h$ hat, so gehen unsere Gleichungen (4) und (5), welche das

Fig. 22.




Gleichgewicht der Biegungsmomente ausdrücken, über in folgende zwei simultane Differenzengleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$:

$$\varphi_h + 12\varphi_{h+1} + \varphi_{h+2} + 2\psi_h + 2\psi_{h+1} = 0,$$
$$\varphi_{h+1} + \varphi_{h+2} + \psi_h + 8\psi_{h+1} + \psi_{h+2} = 0$$

mit den Randbedingungen:

$$(15)\qquad \begin{aligned} 6\varphi_0 + \varphi_1 + 2\psi_0 &= M, \\ \varphi_0 + \varphi_1 + 6\psi_0 + \psi_1 &= 0, \\ \psi_n &= 0, \\ \varphi_n + \varphi_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Um diese Differenzengleichungen zu integrieren, eliminieren wir zunächst aus ihnen eine der beiden Unbekannten, einerlei welche; für die andere bleibt dann die Differenzengleichung vierter Ordnung übrig:

$$\chi_h + 18\chi_{h+1} + 94\chi_{h+2} + 18\chi_{h+3} + \chi_{h+4} = 0,$$

wo $\chi$ also nach Belieben $\varphi$ oder $\psi$ bedeutet. Das mit vier willkürlichen Konstanten behaftete allgemeine Integral dieser Gleichung können

wir bekanntlich[1]) hinschreiben, sobald wir die vier Wurzeln Gleichung:

$$z^4 + 18z^3 + 94z^2 + 18z + 1 = 0$$

kennen. Diese sind aber:

$$\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),\quad \varrho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta),\quad \frac{1}{\varrho}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$\frac{1}{\varrho}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta),$$

wo:

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{48 + \sqrt{1980}} - \sqrt{44 + \sqrt{1980}}\,\right] = 0{,}105,$$
$$\cos\vartheta = -\frac{9}{\sqrt{48 + \sqrt{1980}}},\quad \vartheta = 180^0 \pm 20^0 39'$$

ist. Wir haben damit die Funktionen $\varphi$ und $\psi$ in der Form:

$$\varphi(x) = \left[a\varrho^x + b\left(\frac{1}{\varrho}\right)^x\right]\cos\vartheta x + \left[a'\varrho^x + b'\left(\frac{1}{\varrho}\right)^x\right]\sin\vartheta x,$$
$$\psi(x) = \left[A\varrho^x + B\left(\frac{1}{\varrho}\right)^x\right]\cos\vartheta x + \left[A'\varrho^x + B'\left(\frac{1}{\varrho}\right)^x\right]\sin\vartheta x,$$

wo die Konstanten $ABA'B'$ so durch die Konstanten $aba'b'$ au zudrücken sind, daß unsere beiden ursprünglichen simultanen Differenz gleichungen befriedigt werden, und die Konstanten $aba'b'$ alsdann a den Randbedingungen sich ergeben. Wir brauchen diese umständlich Rechnungen hier nicht durchzuführen, sondern können uns mit folgend Abschätzung begnügen. Aus den letzten beiden Randbedingungen (1! folgt, daß $a\varrho^n$, $a'\varrho^n$, $A\varrho^n$, $A'\varrho^n$ mit $b\left(\frac{1}{\varrho}\right)^n$, $b'\left(\frac{1}{\varrho}\right)^n$, $B\left(\frac{1}{\varrho}\right)^n$, $B'\left(\frac{1}{\varrho}\right)^n$ vo derselben Größenordnung sind. Da nun ungefähr $\varrho = 1:10$, so ergib sich damit, daß links von der vertikalen Symmetrieachse unseres Fach werkes die Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ wesentlich durch die Gliede mit dem Faktor $\varrho^x$, rechts davon wesentlich durch die mit Faktor $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^x$ bestimmt sind, sodaß für die Reihenfolgen der:

$$\psi_0\psi_1 \ldots \psi_n,\ \psi_{n+1} \ldots \psi_{2n} \text{ und der } \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_n,\ \varphi_{n+1} \ldots \varphi_{2n+1}$$

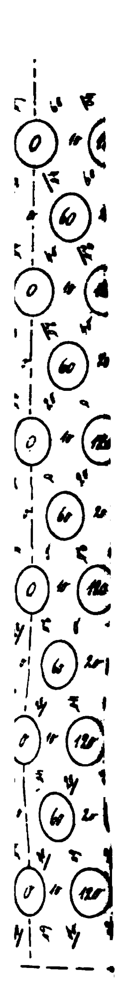
die Reihenfolgen der Größenordnungen etwa die folgenden werden:

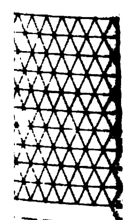
$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \ldots\ \frac{1}{10^{n-1}},\ \frac{1}{10^n},\ \frac{1}{10^{n-1}},\ \ldots\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1$$

und

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \ldots\ \frac{1}{10^{n-1}},\ \frac{1}{10^n},\ \frac{1}{10^n},\ \frac{1}{10^{n-1}},\ \ldots\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1.$$

1) Für das folgende vergl. A. A. Markoff: Differenzenrechnung. Aut. deutsche Übers. von Th. Friesendorff und E. Prümm. Leipzig 1896, S. 164 ff.



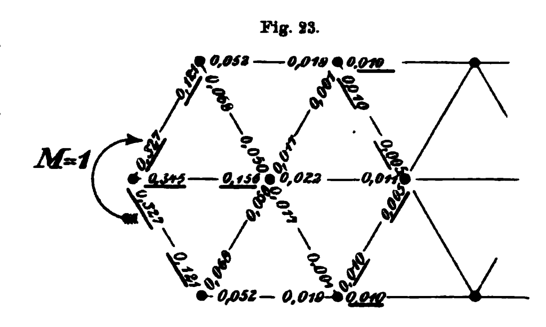


A: Darstellun
B: Darstellun
C: Darstellun

ıd die Grund

Hierin liegt aber der gewünschte Nachweis dafür, daß die äußeren Momente $M$ nur in nächster Nähe des linken und rechten Randes merkliche Biegungsmomente an den Stabenden erzeugen. Ein Zahlenbeispiel mit $M = 1$ und $n = 5$ möge dies noch besser illustrieren (Fig. 23). Die Zahlen an den Stabenden bedeuten direkt die von den Stabenden auf die Knotenpunkte übertragenen Drehmomente; unterstrichene Zahlen sind negativ zu nehmen. Die in der Figur nicht angegebenen Drehmomente sind bereits so klein, daß sie bei der gewählten Zahl von Dezimalstellen mit Null ganz oder nahezu zusammenfallen.

Fig. 23.




Schätzungsweise können wir der Figur noch entnehmen, wie man in den Tafeln I bis IV die Drehmomente in nächster Nähe des Randes etwa abzuändern hat: Man verteile jedes störende Moment gleichmäßig auf die in dem betreffenden Knotenpunkte zusammenstoßenden Stabenden und erteile dann noch die Hälfte des einzelnen Anteiles den anderen Enden der betreffenden Stäbe.

Aachen, den 11. September 1905.

# Spannungen und Formänderungen rotierender Kugelschalen.

Von Alfons Leon in Wien.

## I.

Im Anschluß an eine frühere Untersuchung (diese Zeitschrift, 52. Bd. S. 164) soll nun eine Hohlkugel als Zahlenbeispiel berechnet werden.

Aus den Oberflächenbedingungen erhielten wir die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad \left. \frac{dG}{dr} + \frac{\Theta}{2K(1+\Theta)} L - \frac{\Theta \gamma w^2}{4K(1+\Theta) g} r^2 = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i},$$

$$\text{(II)} \qquad \left. \frac{dH}{dr} + \frac{\Theta}{2K(1+\Theta)} M + \frac{\Theta \gamma w^2}{4K(1+\Theta) g} r^2 = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i},$$

$$\text{(III)} \qquad \left. 2H + r\frac{dJ}{dr} - J = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i},$$

mit deren Hilfe sich die folgenden entwickeln ließen:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \left. \frac{1+3\Theta}{2K(1+\Theta)} C - \frac{2D}{r^3} - \frac{(3+5\Theta)\gamma w^2}{10K(1+\Theta) g} r^2 = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i},$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \left. \frac{E}{r^4} - \frac{7+19\Theta}{168K(1+\Theta)} A r^3 - \frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{112K(1+\Theta) g} r^3 - \frac{(1+2\Theta)B}{4K(1+\Theta) r^2} = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}, \text{[1]}$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \left. Fr - \frac{1+2\Theta}{2K(1+\Theta)} A r^3 + \frac{(3+2\Theta)\gamma w^2}{4K(1+\Theta) g} r^3 + \frac{(7+9\Theta)B}{6K(1+\Theta) r^2} = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}.$$

Aus der Doppelgleichung (I′) ergeben sich die Werte für $C$ und $D$:

$$C = \frac{(3+5\Theta)(r_a^5 - r_i^5)\gamma w^2}{5(1+3\Theta)(r_a^3 - r_i^3) g}, \tag{54}$$

$$D = \frac{(3+5\Theta)(r_a^2 - r_i^2) r_a^3 r_i^3 \gamma w^2}{20K(1+\Theta)(r_a^3 - r_i^3) g}. \tag{55}$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (II′) und (III′) $E$ und $F$, so bekommt man:

$$0 = 2(7+19\Theta)(r_a^7 - r_i^7)A + 3(3+7\Theta)(r_a^7 - r_i^7)\frac{\gamma w^2}{g} + 84(1+2\Theta)(r_a^2 - r_i^2)B,$$

$$0 = 6(1+2\Theta)(r_a^2 - r_i^2)A - 3(3+2\Theta)(r_a^2 - r_i^2)\frac{\gamma w^2}{g} + 2(7+9\Theta)\frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^3 r_i^3} B.$$

---

1) In dieser Gleichung wurde im oben erwähnten Aufsatze der Koeffizient von $A$ verdruckt.

Somit sind die Konstanten $A$ und $B$ gegeben durch die Gleichungen:

$$(56)\quad A = -\frac{(3+7\Theta)(7+9\Theta)(r_a^7-r_i^7)(r_a^3-r_i^3)+42(3+2\Theta)(1+2\Theta)(r_a^2-r_i^2)r_a^3r_i^3}{(7+9\Theta)(7+19\Theta)(r_a^7-r_i^7)(r_a^3-r_i^3)-126(1+2\Theta)^2(r_a^2-r_i^2)^2r_a^3r_i^3}\cdot\frac{3\gamma w^2}{2g},$$

$$(56)\quad B = \frac{15(3+8\Theta)(1+\Theta)(r_a^7-r_i^7)(r_a^2-r_i^2)r_a^3r_i^3}{(7+9\Theta)(7+19\Theta)(r_a^7-r_i^7)(r_a^3-r_i^3)-126(1+2\Theta)^2(r_a^2-r_i^2)^2r_a^3r_i^3}\cdot\frac{\gamma w^2}{g}.$$

Hat man $A$ und $B$ bestimmt, so kann man $E$ und $F$ in einfacher Weise finden; aus (II') und (III') folgt:

$$(58)\quad E = \frac{r_a^2}{4K(1+\Theta)}\cdot\left\{\frac{r_a^5}{84}\left[2(7+19\Theta)A+3(3+7\Theta)\frac{\gamma w^2}{g}\right]+(1+2\Theta)B\right\},$$

$$(59)\quad F = \frac{1}{2K(1+\Theta)}\cdot\left\{\frac{r_a^2}{2}\left[2(1+2\Theta)A-(3+2\Theta)\frac{\gamma w^2}{g}\right]-\frac{(7+9\Theta)B}{3r_a^3}\right\},$$

und in diesen beiden Gleichungen sind nur mehr $E$ und $F$ unbekannte Größen. Zur Überprüfung der Rechnung dienen dann die den vorstehenden analogen Gleichungen:

$$(58')\quad E = \frac{r_i^2}{4K(1+\Theta)}\cdot\left\{\frac{r_i^5}{84}\left[2(7+19\Theta)A+3(3+7\Theta)\frac{\gamma w^2}{g}\right]+(1+2\Theta)B\right\},$$

$$(59')\quad F = \frac{1}{2K(1+\Theta)}\cdot\left\{\frac{r_i^2}{2}\left[2(1+2\Theta)A-(3+2\Theta)\frac{\gamma w^2}{g}\right]-\frac{(7+9\Theta)B}{3r_i^3}\right\}.$$

Nun lösen wir die Gleichungen (26), (27) und (28) nach $G$, $H$ und $J$ auf und erhalten:

$$(60)\quad G = -\frac{E}{5r^4}+\frac{D}{3r^2}+\frac{(5+6\Theta)B}{36K(1+\Theta)r^2}+\frac{C}{6K(1+\Theta)}r-\frac{F}{15}r+$$
$$+\frac{A}{21K(1+\Theta)}r^3-\frac{2\gamma w^2}{35K(1+\Theta)g}r^3,$$

$$(61)\quad H = \frac{3E}{5r^4}-\frac{(5+6\Theta)B}{12K(1+\Theta)r^2}+\frac{F}{5}r-\frac{A}{7K(1+\Theta)}r^3+\frac{\gamma w^2}{14K(1+\Theta)g}r^3,$$

$$(62)\quad J = -\frac{2E}{5r^4}-\frac{B}{6K(1+\Theta)r^2}+\frac{F}{5}r-\frac{(7+10\Theta)A}{42K(1+\Theta)}r^3+\frac{\gamma w^2}{28K(1+\Theta)g}r^3.$$

Daher ist

$$(60')\quad \frac{dG}{dr} = \frac{4E}{5r^5}-\frac{2D}{3r^3}-\frac{(5+6\Theta)B}{18K(1+\Theta)r^3}+\frac{C}{6K(1+\Theta)}-\frac{F}{15}+$$
$$+\frac{A}{7K(1+\Theta)}r^2-\frac{6\gamma w^2}{35K(1+\Theta)g}r^2,$$

$$(61')\quad \frac{dH}{dr} = -\frac{12E}{5r^5}+\frac{(5+6\Theta)B}{6K(1+\Theta)r^3}+\frac{F}{5}-\frac{3A}{7K(1+\Theta)}r^2+\frac{3\gamma w^2}{14K(1+\Theta)g}r^2,$$

$$(62')\quad \frac{dJ}{dr} = \frac{8E}{5r^5}+\frac{B}{3K(1+\Theta)r^3}+\frac{F}{5}-\frac{(7+10\Theta)A}{14K(1+\Theta)}r^2+\frac{3\gamma w^2}{28K(1+\Theta)g}r^2.$$

Somit lauten die Formeln für die radiale und tangentiale Verrückung wie folgt:

$$(63)\quad \Delta r = -\frac{E}{5r^4} + \frac{D}{3r^2} + \frac{(5+6\Theta)B}{36K(1+\Theta)r^2} + \frac{C}{6K(1+\Theta)}r - \frac{F}{15}r +$$

$$+ \frac{A}{21K(1+\Theta)}r^3 - \frac{2\gamma w^2}{35K(1+\Theta)g}r^3 +$$

$$+ \left[\frac{3E}{5r^4} - \frac{(5+6\Theta)B}{12K(1+\Theta)r^2} + \frac{F}{5}r - \frac{A}{7K(1+\Theta)}r^3 + \frac{\gamma w^2}{14K(1+\Theta)g}r^3\right]\sin^2\varphi,$$

$$(64)\quad \Delta t = \left[-\frac{2E}{5r^4} - \frac{B}{6K(1+\Theta)r^2} + \frac{F}{5}r - \frac{(7+10\Theta)A}{42K(1+\Theta)}r^3 + \frac{\gamma w^2}{28K(1+\Theta)g}r^3\right]\sin\varphi\cos\varphi.$$

Man kann nun auch die Art der Kurven angeben, nach denen sich die Spannungen verteilen. Bezeichnen $a, b, c \ldots$ Koeffizienten, die abhängig sind von den Dimensionen, den Elastizitätskonstanten, der Dichte und Winkelgeschwindigkeit der Kugelschale, so gehorchen die Normalspannungen dem Gesetze

$$\sigma = \frac{a}{r^5} + \frac{b}{r^3} + c + dr^2 + \left(\frac{e}{r^5} + \frac{f}{r^3} + g + hr^2\right)\sin^2\varphi,$$

während die Schubspannung die Form

$$\tau = \left(\frac{i}{r^5} + \frac{k}{r^3} + m + nr^2\right)\sin\varphi\cos\varphi$$

annimmt.

Setzt man in die Gleichung (14) die Werte aus (17) und (19) ein, so bekommt man:

$$\eta = C - \frac{Ar^2}{3} - \frac{B}{3r^3} + \left[Ar^2 + \frac{B}{r^3}\right]\sin^2\varphi,$$

sodaß man mit Hilfe der Gleichung (11) die kubische Dilatation erhält:

$$(65)\quad v = \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left\{-\frac{B}{3r^3} + C - \frac{A}{3}r^2 - \frac{\gamma w^2}{2g}r^2 + \left[\frac{B}{r^3} + Ar^2 + \frac{\gamma w^2}{2g}r^2\right]\sin^2\varphi\right\}.$$

Schreiben wir allgemein

$$(66)\qquad \Theta v = Q + P\sin^2\varphi,$$

wobei $Q$ und $P$ Funktionen von $r$ sind, deren Bedeutung aus der Gleichung (65) hervorgeht, und setzen wir sowohl diesen Wert, als auch die in den Gleichungen (21) und (22) stehenden Ausdrücke, in die vier ersten Gleichungen (1), (2), (3) und (4) ein, so kommt:

$$(67)\qquad \sigma_r = -2K\left[\frac{dG}{dr} + Q + \left(\frac{dH}{dr} + P\right)\sin^2\varphi\right],$$

$$(68)\qquad \sigma_t = -2K\left[\frac{G+J}{r} + Q + \left(\frac{H-2J}{r} + P\right)\sin^2\varphi\right],$$

$$(69)\qquad \sigma_p = -2K\left[\frac{G}{r} + Q + \left(\frac{H-J}{r} + P\right)\sin^2\varphi\right],$$

$$(70)\qquad \tau = -K\left[\frac{2H-J}{r} + \frac{dJ}{dr}\right]\sin\varphi\cos\varphi.$$

Es liege eine Hohlkugel vor, deren äußerer Radius $r_a = 20$ (cm) und deren innerer $r_i = 10$ (cm) sei. Der Elastizitätsmodul $E$ sei 2 400 000 (kgcm$^{-2}$) und das mit $m$ bezeichnete Verhältnis zwischen Längsdilatation und Querkontraktion gleich 3. Diesen Werten entspricht $K = 900\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $\Theta = 1$, weil bekanntlich

$$K = \frac{m}{2(m+1)} E = \frac{(1+2\Theta)E}{2(1+3\Theta)}$$

und

$$\Theta = \frac{1}{m-2}$$

ist.

Die Werte für die sechs Konstanten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ und $F$ sind in diesem Falle die folgenden:

$$\begin{cases} C = \dfrac{1240}{7} \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{kgcm}^{-2}) = 177{\cdot}14 \ldots \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{kgcm}^{-2}), \\ D = \dfrac{8}{105} \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{cm}^3) = 0{\cdot}07619 \ldots \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{cm}^3), \\ B = \dfrac{127 \,.\, 165 \,.\, 300\,000}{217 \,.\, 83} \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{kgcm}) = 349\,037 \ldots \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{kgcm}), \\ A = -\dfrac{5025}{5146} \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{kgcm}^{-4}) = -0{\cdot}9765 \ldots \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{kgcm}^{-4}), \\ E = \dfrac{16\,500}{14 \,.\, 83} \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{cm}^5) = 15{\cdot}2495 \ldots \dfrac{\gamma w^2}{g} (\text{cm}^5), \\ F = -\dfrac{1397}{25\,200 \,.\, 83} \dfrac{\gamma w^2}{g} = -0{\cdot}0006679 \ldots \dfrac{\gamma w^2}{g}. \end{cases}$$

Daher ist:

$$\begin{cases} G = \dfrac{1}{581}\left[-\dfrac{1650}{r^4} + \dfrac{49{\cdot}1798}{r^2} + 0{\cdot}0354 r - 0{\cdot}0000333 r^3\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}, \\ H = \dfrac{1}{581}\left[\dfrac{4950}{r^4} - \dfrac{103{\cdot}26}{r^2} - 0{\cdot}0776 r + 0{\cdot}0000681 r^3\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}, \\ J = \dfrac{1}{581}\left[-\dfrac{3300}{r^4} - \dfrac{18{\cdot}776}{r^2} - 0{\cdot}0776 r + 0{\cdot}000139 r^3\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}, \\ \dfrac{dG}{dr} = \dfrac{1}{581}\left[\dfrac{6600}{r^5} - \dfrac{98{\cdot}360}{r^3} + 0{\cdot}0354 - 0{\cdot}000100 r^2\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}, \\ \dfrac{dH}{dr} = \dfrac{1}{581}\left[-\dfrac{19\,800}{r^5} + \dfrac{207{\cdot}1}{r^3} - 0{\cdot}0776 + 0{\cdot}000214 r^2\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}, \\ \dfrac{dJ}{dr} = \dfrac{1}{581}\left[\dfrac{13\,200}{r^5} + \dfrac{37{\cdot}553}{r^3} - 0{\cdot}0776 + 0{\cdot}000417 r\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}, \\ Q = \dfrac{1}{64\,839\,600\,000}\left[-\dfrac{2\,095\,500\,000}{r^3} + 3\,190\,520 - 3143 r^2\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}, \\ P = \dfrac{1}{64\,839\,600\,000}\left[\dfrac{6\,286\,500\,000}{r^3} - 8582 r^2\right]\dfrac{\gamma w^2}{g}. \end{cases}$$

Nun entwickeln wir die folgende Tabelle:

Tabelle I.[1])

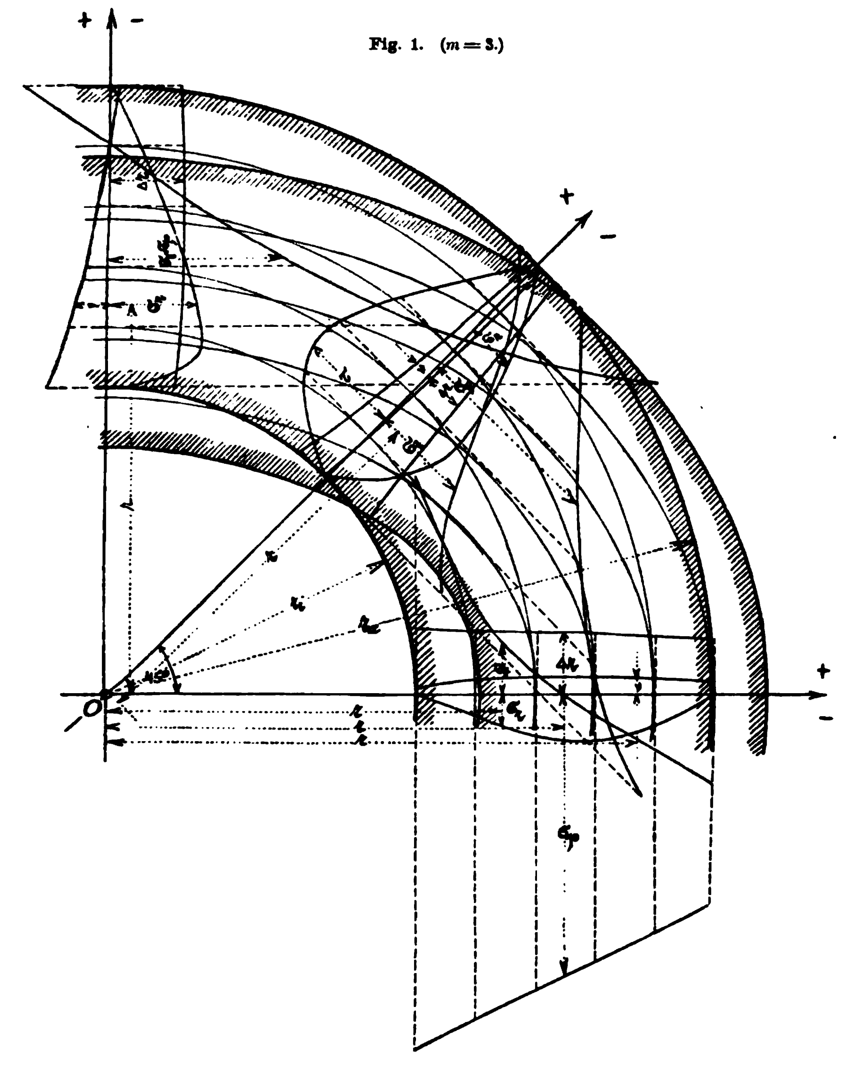
| $r$ | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | | cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G$ | 0·00111 | 0·00107 | 0·00104 | 0·00102 | 0·000990 | 0·000951 | | cm |
| $H$ | —0·00214 | —0·00222 | —0·00223 | —0·00222 | —0·00218 | —0·00212 | | cm |
| $J$ | —0·00198 | —0·00169 | —0·00153 | —0·00137 | —0·00116 | —0·000871 | | cm |
| $\frac{dG}{dr}$ | —0·0000120 | —0·0000160 | —0·0000132 | —0·0000135 | —0·0000177 | —0·0000258 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | — |
| $\frac{dH}{dr}$ | —0·0000837 | —0·0000113 | 0·00000520 | 0·0000152 | 0·0000288 | 0·0000408 | | — |
| $\frac{dJ}{dr}$ | 0·000230 | 0·0000985 | 0·0000729 | 0·0000878 | 0·000122 | 0·000169 | | — |
| $Q$ | 0·0000120 | 0·0000235 | 0·0000279 | 0·0000289 | 0·0000279 | 0·0000258 | | — |
| $P$ | 0·0000837 | 0·0000370 | 0·00000939 | —0·0000102 | —0·0000263 | —0·0000408 | | — |
| | | | | $\varphi = 0^0$ | | | | |
| $\varDelta r$ | 0·00111 | 0·00107 | 0·00104 | 0·00102 | 0·000990 | 0·000951 | | cm |
| $\nu$ | 0·0000120 | 0·0000235 | 0·0000279 | 0·0000289 | 0·0000279 | 0·0000258 | | — |
| $\sigma_r$ | 0 | — 13·5 | — 26·5 | — 27·7 | — 18·4 | 0 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | $kgcm^{-2}$ |
| $\sigma_t$ | 135·0 | 50·7 | 12·8 | — 12·6 | — 33·2 | — 53·6 | | $kgcm^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | —221 | —203 | —184 | —167 | —149 | —132 | | $kgcm^{-2}$ |
| | | | | $\varphi = 45^0$ | | | | |
| $\varDelta r$ | 0·000040 | —0·000040 | —0·000075 | —0·000090 | —0·000100 | —0·000109 | | cm |
| $\varDelta t$ | —0·00099 | —0·000845 | —0·000765 | —0·000685 | —0·000580 | —0·000435 | | cm |
| $\nu$ | 0·0000538 | 0·0000420 | 0·0000326 | 0·0000238 | 0·0000148 | 0·0000054 | | — |
| $\sigma_r$ | 0 | — 36·6 | — 39·6 | — 32·2 | —20·6 | 0 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | $kgcm^{-2}$ |
| $\sigma_t$ | —104 | — 69·6 | — 49·0 | — 32·7 | —16·6 | 0·09 | | $kgcm^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | —282 | —196 | —147 | —110 | —74·6 | —39·1 | | $kgcm^{-2}$ |
| $\tau$ | 0 | 58·8 | 61·4 | 46·8 | 25·1 | 0 | | $kgcm^{-2}$ |
| | | | | $\varphi = 90^0$ | | | | |
| $\varDelta r$ | —0·00103 | —0·00115 | —0·00119 | —0·00120 | —0·00119 | —0·00117 | | cm |
| $\nu$ | 0·0000957 | 0·0000605 | 0·0000373 | 0·0000187 | 0·0000016 | —0·0000150 | | — |
| $\sigma_r$ | 0 | — 59·8 | — 52·7 | —36·7 | —22·9 | 0 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | $kgcm^{-2}$ |
| $\sigma_t$ | —343 | —190 | —111 | —52·8 | 0·13 | 53·8 | | $kgcm^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | —343 | —190 | —111 | —52·8 | 0·13 | 53·8 | | $kgcm^{-2}$ |

Es ist merkwürdig, daß $\frac{dG}{dr}$ zunächst sinkt, dann steigt, um wieder zu fallen. Alle Werte in der Tabelle sind noch mit $\frac{\gamma w^2}{g}$ zu multi-

1) Zur Auswertung der Zahlen wurde ein Rechenschieber benutzt.

plizieren. Nehmen wir an, die Kugel mache in der Sekunde 20 Umdrehungen, so ist $w = 20 \cdot 2\pi = 125{\cdot}7\ (\mathrm{cm}^{-1})$; ist ferner $\gamma = 0{\cdot}0078$

Fig. 1. $(m = 3.)$



(kgcm$^{-3}$) und $g = 980\ (\mathrm{cmsec}^{-2})$, so ist $\frac{\gamma w^2}{g} = 0{\cdot}1229\ (\mathrm{kgcm}^{-4})$. Somit ist für $\varphi = 0^0$ und $r = r_i$, beziehungsweise $r = r_a$

$$\varDelta r = 0{\cdot}000136\ (\mathrm{cm}) \quad \text{bezw.} \quad 0{\cdot}000117\ (\mathrm{cm}),$$
$$v = 0{\cdot}00000147 \quad „ \quad 0{\cdot}00000317,$$
$$\sigma_t = 16{\cdot}6\ (\mathrm{kgcm}^{-2}) \quad „ \quad -\ 6{\cdot}59\ (\mathrm{kgcm}^{-2}),$$
$$\sigma_p = -\ 27{\cdot}2\ (\mathrm{kgcm}^{-2}) \quad „ \quad -\ 16{\cdot}2\ (\mathrm{kgcm}^{-2}).$$

Für $\varphi = 90^0$ bekommt man hingegen:

$$\begin{aligned} \Delta r &= -\ 0{\cdot}000127\ (\text{cm}) \quad \text{bezw.} \quad -\ 0{\cdot}000144\ (\text{cm}), \\ v &= \quad 0{\cdot}0000118 \qquad\quad\ \text{„} \qquad -\ 0{\cdot}00000184, \\ \sigma_t = \sigma_\varphi &= -\ 41{\cdot}2\ (\text{kgcm}^{-2}) \qquad \text{„} \qquad 6{\cdot}61\ (\text{kgcm}^{-2}), \end{aligned}$$

Die in Tabelle I enthaltenen Werte sind in Fig. 1 zeichnerisch dargestellt. Zu jedem $r$ kann man die dazu gehörigen Spannungen und Verrückungen abgreifen. Außerdem ist die Lage der Oberfläche der Hohlkugel nach der Formänderung gezeichnet. *Die kubische Ausdehnung erreicht bei diesem Beispiele an den Polen der inneren Begrenzungsfläche den größten Wert. Die reduzierte Spannung ist am inneren Äquator am größten. Es ist daher zu erwarten, daß bei genügend großer Tourenzahl an diesen Stellen Neigung zum Bruch auftritt.*

Für $E = 2\,400\,000\ (\text{kgcm}^{-2})$ und $m = 4$, also für $K = 960\,000\ (\text{kgcm}^{-2})$ und $\Theta = \frac{1}{2}$ nehmen die Konstanten die folgenden Werte an:

$$\left\{\begin{aligned} C &= \frac{1364}{7} \cdot \frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{kgcm}^{-2}) = 194{\cdot}8571\,\frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{kgcm}^{-2}), \\ D &= \frac{11}{168} \cdot \frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{cm}^3) = 0{\cdot}065476\,\frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{cm}^3), \\ B &= \frac{45\,.\,16\,.\,12\,700\,000}{25\,219} \cdot \frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{kgcm}) = 362\,584\,\frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{kgcm}), \\ A &= -\frac{51\,797}{2\,.\,25\,219} \cdot \frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{kgcm}^{-4}) = -\,1{\cdot}02694\,\frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{kgcm}^{-4}), \\ E &= \frac{310\,000}{25\,219} \cdot \frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{cm}^5) = 12{\cdot}2923\,\frac{\gamma w^2}{g}\,(\text{cm}^5), \\ F &= -\frac{452\,755}{3\,.\,9600\,.\,25\,219} \cdot \frac{\gamma w^2}{g} = -\,0{\cdot}00062337\,\frac{\gamma w^2}{g}. \end{aligned}\right.$$

## II.

Es sollen nun auch die Formeln entwickelt werden, wenn die Werte für $r_a$ und $r_i$ sich wenig voneinander unterscheiden. Für eine dünne elastische Schale ist $r = r_a = r_i = R$ zu setzen. Man erhält:

$$\left\{\begin{aligned} C &= \frac{(3 + 5\Theta) R^2 \gamma w^2}{3(1 + 3\Theta) g}, \\ D &= \frac{(3 + 5\Theta) R^5 \gamma w^2}{30 K (1 + \Theta) g}, \\ A &= -\frac{3(9 + 19\Theta) \gamma w^2}{10(1 + 3\Theta) g}, \\ B &= \frac{2(3 + 8\Theta) R^5 \gamma w^2}{5(1 + 3\Theta) g}, \\ E &= \frac{(1 + 2\Theta)(3 + 8\Theta) R^7 \gamma w^2}{14 K (1 + \Theta)(1 + 3\Theta) g}, \\ F &= -\frac{(7 + 9\Theta)(3 + 8\Theta) R^2 \gamma w^2}{6 K (1 + \Theta)(1 + 3\Theta) g}. \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Aus den Gleichungen (26), (27) und (28) ergeben sich die Werte für $G$, $H$ und $J$.

$$(72)\quad \begin{cases} G = \dfrac{(1+2\Theta)R^3\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}, \\ H = -\dfrac{(2+5\Theta)R^3\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}, \\ J = -\dfrac{R^3\gamma w^2}{2Kg}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (17), (18) und (19) folgt:

$$(73)\quad \begin{cases} M = -\dfrac{(3+5\Theta)R^2\gamma w^2}{2(1+3\Theta)g}, \\ N = -\dfrac{(3+7\Theta)R^2\gamma w^2}{K(1+3\Theta)g}, \\ L = \dfrac{(3+5\Theta)R^2\gamma w^2}{2(1+3\Theta)g}. \end{cases}$$

Die Gleichungsgruppe (25) gibt die folgenden Ausdrücke:

$$(74)\quad \begin{cases} \dfrac{dG}{dr} = -\dfrac{\Theta R^2\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}, \\ \dfrac{dH}{dr} = \dfrac{\Theta R^2\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}, \\ \dfrac{dJ}{dr} = \dfrac{(3+7\Theta)R^2\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}. \end{cases}$$

Aus (14) und (15) erhält man:

$$\eta = \frac{(3+5\Theta)R^2\gamma w^2}{2(1+3\Theta)g}(1-\sin^2\varphi),$$

$$\beta = -\frac{(3+7\Theta)R^2\gamma w^2}{K(1+3\Theta)g}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Somit ist

$$(75)\quad \nu = \frac{R^2\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}(1-\sin^2\varphi) = \frac{R^2\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}\cos^2\varphi = \frac{\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}\varrho^2.$$

Die kubische Dilatation ist somit proportional dem Quadrate des Kosinus der geographischen Breite. Für $\varphi = 0$ erreicht sie den größten Wert gleich $\frac{R^2\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}$. An den Polen ist sie Null; da außerdem an diesen Stellen $\sigma_t = \sigma_p$ ist, so sind diese Punkte spannungslos.

Wir erhalten ferner:

$$(76)\quad \Delta r = \frac{\gamma w^2 R^3}{2K(1+3\Theta)g}[(1+2\Theta)-(2+5\Theta)\sin^2\varphi],$$

$$(77)\quad \Delta t = -\frac{\gamma w^2 R^3}{2Kg}\sin\varphi\cos\varphi.$$

War der ursprüngliche Abstand eines Punktes der Membran von der Drehungsachse gleich $\varrho$, so ist er jetzt $\varrho + \Delta\varrho$, (siehe Fig. 2), wobei

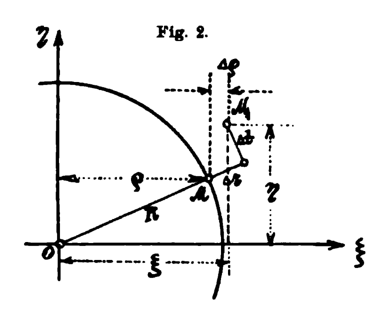


Fig. 2.

$$(78) \qquad \Delta\varrho = \Delta r \cos\varphi - \Delta t \sin\varphi = \frac{(1+2\Theta)\gamma w^2 \varrho^3}{2K(1+3\Theta)g} = \frac{\gamma w^2 \varrho^3}{Eg}.$$

*Somit ist die Verrückung in der zur Drehungsachse normalen Richtung proportional der dritten Potenz der ursprünglichen Entfernung und verkehrt proportional dem Elastizitätsmodul E; von der sogenannten Poissonschen Konstanten m ist diese Größe nicht abhängig.*

Aus (21), (22) und (74) folgt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta r)}{\partial r} = -\dfrac{\Theta R^2 \gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}(1-\sin^2\varphi), \\[2ex] \dfrac{\partial(\Delta r)}{\partial\varphi} = -\dfrac{(2+5\Theta)R^3\gamma w^2}{K(1+3\Theta)g}\sin\varphi\cos\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial(\Delta t)}{\partial r} = \dfrac{(3+7\Theta)R^2\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}\sin\varphi\cos\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial(\Delta t)}{\partial\varphi} = -\dfrac{\gamma w^2 R^3}{2Kg}(1-2\sin^2\varphi). \end{cases}$$

Somit erhalten wir auch die Formeln für die Spannungen:

$$(79) \quad \begin{cases} \sigma_r = 0, \\ \sigma_t = 0, \\ \sigma_p = -\dfrac{R^2\gamma w^2}{g}(1-\sin^2\varphi) = -\dfrac{R^2\gamma w^2}{g}\cos^2\varphi = -\dfrac{\gamma w^2}{g}\varrho^2 \text{ (Fig. 2)}, \\ \tau = 0. \end{cases}$$

Die Verrückungen und Spannungen sind proportional der Dichte und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit; erstere wachsen mit dem Kubus, letztere mit dem Quadrate des Radius der Membran. Die radiale Verrückung ist Null, wenn $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+2\Theta}{2+5\Theta}}$ ist. Für $\Theta = 1$ ist $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ und $\varphi = \pm 40^0\,54'$. Für $\Theta = \frac{1}{2}$ ist $\sin\varphi = \pm\frac{2}{3}$ und $\varphi = \pm 41^0\,49'$. An den Polen ist $\Delta r = -\frac{\gamma w^2}{2Kg}R^3$ und am Äquator erhält man $\Delta r = \frac{(1+2\Theta)\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}R^3 = \frac{\gamma w^2}{Eg}R^3$. Die Differenz zwischen der Länge der Drehungsachse und der eines Äquatordurchmessers ist während der Drehung gleich $\frac{(2+5\Theta)\gamma w^2}{2K(1+3\Theta)g}R^3 = \frac{(2K+E)\gamma w^2}{2KEg}R^3$. Die

Verschiebung gegen die Pole erreicht für $\varphi = 45^0$ den größten Wert gleich $-\frac{\gamma w^2}{4Kg}R^3$ und ist gerade halb so groß, wie die radiale Bewegung der Pole.

*In der Richtung des Meridians treten überhaupt keine elastischen Kräfte auf*[1]; somit sind die Pole spannungslos, wie wir an anderer Stelle schon ersehen konnten. *Die Parallelkreisspannung ist proportional dem Quadrate des Kosinus der geographischen Breite. Der Äquator ist somit am stärksten beansprucht. Die Spannungen sind unabhängig von den Elastizitätskonstanten.*

Nun ist die Form der Membran nach der Formänderung zu untersuchen. Der Punkt $M$ kommt nach $M_1$. Aus der Fig. 2 ergeben sich die Gleichungen:

$$\xi = (R + \Delta r)\cos\varphi - \Delta t \sin\varphi,$$

$$\eta = (R + \Delta r)\sin\varphi + \Delta t \cos\varphi.$$

Somit ist

$$\xi = \cos\varphi\left[R + \frac{(1+2\Theta)R^3\gamma w^2\cos^2\varphi}{2K(1+3\Theta)g}\right],$$

$$\eta = \sin\varphi\left[R - \frac{R^3\gamma w^2}{2Kg} + \frac{(1+2\Theta)R^3\gamma w^2\cos^2\varphi}{2K(1+3\Theta)g}\right].$$

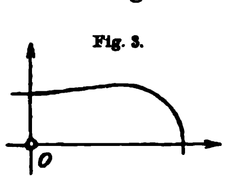
Dies ist die parametrische Darstellung der gesuchten Fläche. $\varphi$ ist der Parameter, dessen Elimination keine grundsätzlichen Schwierigkeiten verursachen würde. *Schon jetzt ist aber klar, daß die Membran während der Drehung kein Rotationsellipsoid sein kann.* Auf ähnliche Weise ließe sich auch die Oberfläche einer Vollkugel darstellen; die durch die Formeln (53) gegebenen Verrückungen sind ja ähnlich den durch die Gleichungen (76) und (77) dargestellten.

---

1) Denkt man sich einen Schnitt durch die Kugelschale normal zur Achse, so kann man die meridionale (tangentiale) Spannung zerlegt denken in eine in der Richtung der Achse wirkende, und eine, die normal darauf gerichtet ist. Da aber jeder Teil eines Körpers wieder als ein Körper zu betrachten ist, auf welchen sich die allgemeinen Sätze des Gleichgewichts anwenden lassen, so muß, da keine äußeren und keine Massenkräfte in axialer Richtung wirksam sind, die Summe aller axialen Komponenten über den ganzen Querschnitt genommen, Null sein, also auch die Spannung selbst. Bei der Behandlung des elastischen Gleichgewichtes einer dünnen Kugelschale, in welcher die Temperatur in besonderer Weise von zwei Variablen abhängig ist, hat J. Stefan die tangentiale Spannung als konstant längs des ganzen Meridians bezeichnet. Diese Konstante muß aber nach dem soeben Gesagten den Wert Null haben. (Sitzungsber. d. Kais. Akad. in Wien, 1882. S. 565.)

Solange die Formänderungen gering sind, ist die Form des ursprünglich von einer Kugelfläche begrenzten Körpers von einem Ellipsoid wenig verschieden. Mit zunehmender Drehungsgeschwindigkeit nimmt er aber die Form der Fig. 3 an. Man darf allerdings nicht vergessen, daß den Grundformeln der Elastizitätstheorie die Vorstellung zugrunde liegt, daß die Gestaltsänderungen klein sein sollen im Vergleich zu den Abmessungen des Körpers.

Fig. 3.




*1. Zahlenbeispiel.* — Es sei $R = 20$ (cm), $E = 2\,400\,000$ (kgcm$^{-2}$), $m = 3$, $K = 900\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $\Theta = 1$.

Somit wird

$$\left\{\begin{aligned} \Delta r &= \frac{1}{900}[3 - 7\sin^2\varphi]\frac{\gamma w^2}{g}\ (\mathrm{cm}), \\ \Delta t &= -\frac{4}{900}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\gamma w^2}{g}\ (\mathrm{cm}), \\ v &= \frac{1}{18\,000}(1 - \sin^2\varphi)\frac{\gamma w^2}{g}, \\ \sigma_p &= -400(1 - \sin^2\varphi)\frac{\gamma w^2}{g}\ (\mathrm{kgcm}^{-2}). \end{aligned}\right.$$

Für verschiedene Werte von $\varphi$ erhalten wir die folgende Tabelle:

Tabelle II.

| $\varphi$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | | Dimension |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta r$ | 0·003333 | 0·001389 | —0·0005555 | —0·002500 | —0·004444 | | cm |
| $\Delta t$ | 0 | —0·001924 | —0·002222 | —0·001924 | 0 | $\cdot\frac{\gamma w^2}{g}$ | cm |
| $v$ | 0·00005555 | 0·00004167 | 0·00002778 | 0·00001389 | 0 | | — |
| $\sigma_p$ | —400 | —300 | —200 | —100 | 0 | | kgcm$^{-2}$ |

Ist $\frac{\gamma w^2}{g} = 0{\cdot}1229$ (kgcm$^{-4}$), so erhält man für $\varphi = 0^0$, $45^0$ und $90^0$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta r =$ 0·0004096 (cm) | bezw. | — 0·00006827 (cm) | und | —0·0005461 (cm), |
| $\Delta t =$ 0 (cm) | „ | — 0·0002731 (cm) | „ | 0 (cm), |
| $v =$ 0·000006827 | „ | 0·000003414 | „ | 0, |
| $\sigma_p =$ — 49·16 (kgcm$^{-2}$) | „ | —24·58 (kgcm$^{-2}$) | „ | 0 (kgcm$^{-2}$) |

*2. Zahlenbeispiel.* — Es sei $R = 20$ (cm), $E = 2\,400\,000$ (kgcm$^{-2}$), $m = 4$, $K = 960\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $\Theta = \frac{1}{2}$. Dann ist

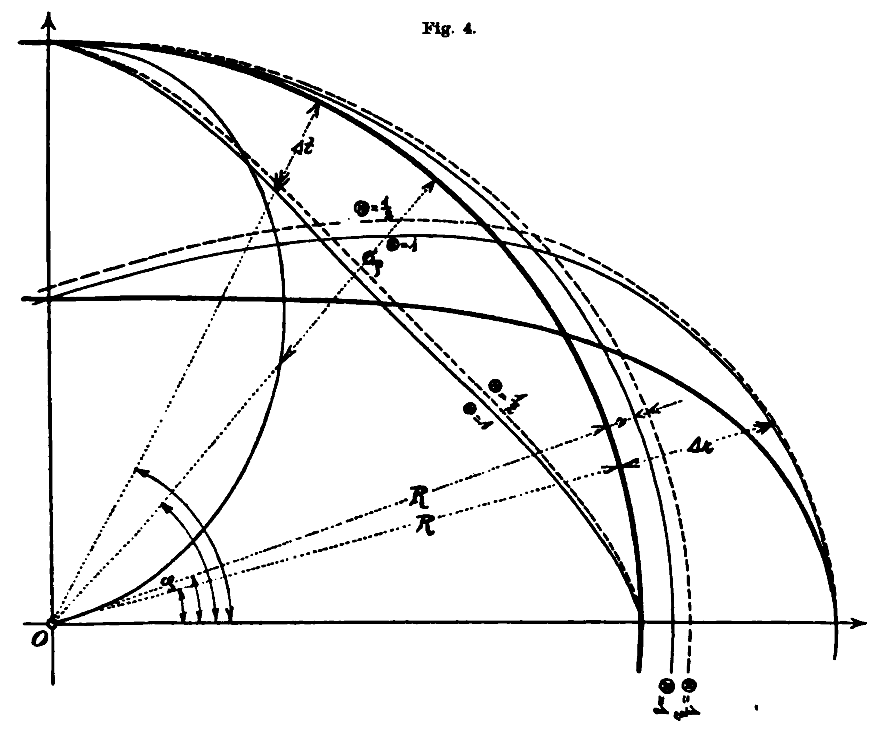
$$\left\{\begin{aligned}\Delta r &= \frac{1}{1200}\left[4 - 9\sin^2\varphi\right]\frac{\gamma w^2}{g}\ (\mathrm{cm}),\\ \Delta t &= -\frac{1}{240}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\gamma w^2}{g}\ (\mathrm{cm}),\\ \nu &= \frac{1}{12\,000}(1 - \sin^2\varphi)\frac{\gamma w^2}{g},\\ \sigma_p &= -400(1 - \sin^2\varphi)\frac{\gamma w^2}{g}\ (\mathrm{kgcm}^{-2}).\end{aligned}\right.$$

Die Faktoren von $\frac{\gamma w^2}{g}$ sind für verschiedene $\varphi$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle III.

| $\varphi$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | | Dimension |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta r$ | 0·003333 | 0·001458 | —0·0004167 | —0·002292 | —0·004167 | $\cdot\frac{\gamma w^2}{g}$ | cm |
| $\Delta t$ | 0 | —0·001804 | —0·002083 | —0·001804 | 0 | | cm |
| $\nu$ | 0·00008333 | 0·00006249 | 0·00004167 | 0·00002083 | 0 | | — |
| $\sigma_p$ | —400 | —300 | —200 | —100 | 0 | | kgcm⁻² |

Fig. 4.



Nimmt man, wie in den früheren Fällen, $\frac{\gamma w^2}{g}$ gleich 0·1229 (kgcm$^{-4}$) an, so erhält man für $\varphi = 0^0$, $45^0$ und $90^0$ die folgenden Werte:

$\Delta r = 0{\cdot}0004096$ (cm) bezw. $-0{\cdot}00005121$ (cm) und $-0{\cdot}0005121$ (cm),

$\Delta t =$ 0 (cm) „ $-0{\cdot}0002560$ (cm) „ 0 (cm),

$v = 0{\cdot}00001024$ „ $0{\cdot}000005121$ „ 0.

Die Fig. 4 gibt die hier gefundenen Resultate graphisch wieder. Die beiden stark ausgezogenen Linien geben die Lage der Membran vor und während der Drehung an. Die für $\Theta = 1$ gültigen Linien sind voll, die für $\Theta = \frac{1}{2}$ gültigen hingegen gestrichelt ausgezogen. Trägt man von $O$ aus den Winkel $\varphi$ auf, so kann man die zu diesem Winkel gehörigen Spannungen und Formänderungen abgreifen. Die negativen Größen sind zwischen dem Mittelpunkte $O$ und dem Kreisbogen aufgetragen, die positiven auf der entgegengesetzten Seite.

III.

Es liege eine Vollkugel vor, deren Radius $R = 20$ (cm) sei. Der Elastizitätsmodul sei mit 2 400 000 (kgcm$^{-2}$) und $m$ mit 3 angenommen. Es ist also, wie im ersten Zahlenbeispiele $K = 900\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $\Theta = 1$. Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (43) bis (49) bekommt man:

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta r &= \frac{1}{23\,400\,000}[1080 - 1{\cdot}1 r^2 + 2(r^2 - 1100)\sin^2\varphi]\, r\frac{\gamma w^2}{g}\ \text{(cm)},\\
\Delta t &= \frac{1}{46\,800\,000}(-4400 + 7r^2)\, r \sin\varphi\cos\varphi\frac{\gamma w^2}{g}\ \text{(cm)},\\
v &= \frac{1}{3\,600\,000}\left[160 - \frac{1}{13}(4 + \sin^2\varphi)r^2\right]\frac{\gamma w^2}{g},\\
\sigma_r &= -\frac{1}{26}(10{\cdot}6 - 11\sin^2\varphi)(400 - r^2)\frac{\gamma w^2}{g}\ \text{(kgcm}^{-2}\text{)},\\
\sigma_t &= -\frac{1}{26}[0{\cdot}8(r^2 - 200) + 11(400 - r^2)\sin^2\varphi]\frac{\gamma w^2}{g}\ \text{(kgcm}^{-2}\text{)},\\
\sigma_p &= -\frac{1}{13}(2120 - 3{\cdot}1 r^2 - 2r^2\sin^2\varphi)\frac{\gamma w^2}{g}\ \text{(kgcm}^{-2}\text{)},\\
\tau &= \frac{11}{26}(400 - r^2)\sin\varphi\cos\varphi\frac{\gamma w^2}{g}\ \text{(kgcm}^{-2}\text{)}.
\end{aligned}\right.$$

Für verschiedene $r$ erhält man die folgende Zusammenstellung:

Tabelle IV.

| | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | | cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\varphi = 0^0$ | | | | |
| r | 0 | 0·0001816 | 0·0003452 | 0·0004726 | 0·0005459 | 0·0005470 | | cm |
| | 0·00004444 | 0·00004308 | 0·00003898 | 0·00003214 | 0·00002256 | 0·00001026 | | — |
| . | —163·07 | —156·55 | —136·98 | —104·37 | — 58·71 | 0 | $\cdot\frac{\gamma w^2}{g}$ | kgcm$^{-2}$ |
| | 6·15 | 5·66 | 4·19 | 1·72 | — 1·72 | — 6·15 | | kgcm$^{-2}$ |
| , | —163·1 | —159·3 | —147·8 | —128·7 | —102·0 | —67·7 | | kgcm$^{-2}$ |
| | | | | $\varphi = 45^0$ | | | | |
| r | 0 | —0·00000369 | —0·00000903 | —0·0000176 | —0·0000312 | —0·0000513 | | cm |
| t | 0 | —0·000183 | —0·000338 | —0·000435 | —0·000446 | —0·000342 | | cm |
| ' | 0·00004444 | 0·00004291 | 0·00003829 | 0·00003059 | 0·00001984 | 0·000005983 | | — |
| r | — 78·46 | — 75·40 | — 65·91 | — 50·22 | —28·23 | 0 | $\cdot\frac{\gamma w^2}{g}$ | kgcm$^{-2}$ |
| t | — 78·46 | — 75·57 | — 66·89 | — 60·12 | —32·18 | —6·15 | | kgcm$^{-2}$ |
| p | —163·1 | —156·8 | —138·0 | —106·6 | —62·65 | —6·15 | | kgcm$^{-2}$ |
| r | 84·62 | 81·23 | 71·08 | 54·08 | 30·46 | 0 | | kgcm$^{-2}$ |
| | | | | $\varphi = 90^0$ | | | | |
| lr | 0 | —0·0001890 | —0·0003632 | —0·000508 | —0·0006079 | —0·0006496 | | cm |
| v | 0·00004444 | 0·00004274 | 0·00003761 | 0·00002906 | 0·00001704 | 0·000001794 | | — |
| r | 6·15 | 5·91 | 5·16 | 3·94 | 2·21 | 0 | $\cdot\frac{\gamma w^2}{g}$ | kgcm$^{-2}$ |
| t | —163·1 | —156·8 | —138·0 | —106·6 | —62·5 | —6·15 | | kgcm$^{-2}$ |
| p | —163·1 | —156·8 | —138·0 | —106·6 | —62·5 | —6·15 | | kgcm$^{-2}$ |

Ist $\frac{\gamma w^2}{g} = 0·1229$ (kgcm$^{-4}$), so bekommt man für $\varphi = 0$ und $r = 0$, beziehungsweise $r = R = 20$ (cm):

$$\Delta r = 0 \text{ (cm)}, \quad \text{bezw.} \quad 0·0000672 \text{ (cm)},$$
$$v = 0·00000546, \quad „ \quad 0·00000126,$$
$$\sigma_r = -20·0 \text{ (kgcm}^{-2}), \quad „ \quad 0 \text{ (kgcm}^{-2}),$$
$$\sigma_t = 0·76 \text{ (kgcm}^{-2}), \quad „ \quad -0·76 \text{ (kgcm}^{-2}),$$
$$\sigma_p = -20·0 \text{ (kgcm}^{-2}), \quad „ \quad -8·32 \text{ (kgcm}^{-2}).$$

Für $\varphi = 90^0$ und $r = R$ ist

$$\Delta r = -0·0000798 \text{ (cm)},$$
$$v = 0·0000022,$$
$$\sigma_t = \sigma_p = -0·76 \text{ (kgcm}^{-2}).$$

Ist hingegen $E = 2\,400\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $m = 4$, so kann man die folgende Tabelle entwickeln:

Tabelle V.

| $r$ | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | | cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\varphi = 0°$ | | | | |
| $\Delta r$ | 0 | 0·000250 | 0·000480 | 0·000674 | 0·000810 | 0·000870 | | cm |
| $v$ | 0·0000611 | 0·0000594 | 0·0000543 | 0·0000505 | 0·0000341 | 0·0000190 | | — |
| $\sigma_r$ | —154·3 | —149·0 | —129·6 | — 98·8 | — 55·6 | 0 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_t$ | 15·35 | 14·13 | 10·44 | 4·30 | — 4·30 | —15·35 | | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | —154·3 | —152·0 | —141·8 | —126·1 | —104·2 | —76·0 | | kgcm$^{-2}$ |
| | | | | $\varphi = 45°$ | | | | |
| $\Delta r$ | 0 | 0·0000219 | 0·0000400 | 0·0000504 | 0·0000545 | 0·0000328 | | cm |
| $\Delta t$ | 0 | —0·000172 | —0·000317 | —0·000407 | —0·000416 | —0·000316 | | cm |
| $v$ | 0·0000611 | 0·0000590 | 0·0000530 | 0·0000436 | 0·0000301 | 0·0000127 | | — |
| $\sigma_r$ | — 69·49 | — 66·67 | — 58·38 | — 44·48 | —25·02 | 0 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_t$ | — 69·49 | — 67·33 | — 60·83 | — 50·00 | —34·84 | —15·35 | | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | —154·3 | —149·9 | —137·0 | —115·2 | —84·8 | —45·7 | | kgcm$^{-2}$ |
| $\tau$ | 84·85 | 81·45 | 71·27 | 54·30 | 30·54 | 0 | | kgcm$^{-2}$ |
| | | | | $\varphi = 90°$ | | | | |
| $\Delta r$ | 0 | —0·000152 | —0·000293 | —0·000411 | —0·000496 | —0·000527 | | cm |
| $v$ | 0·0000611 | 0.0000589 | 0·0000503 | 0·0000414 | 0·0000261 | 0·00000639 | | — |
| $\sigma_r$ | 15·35 | 14·74 | 11·90 | 9·83 | 5·53 | 0 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_t$ | —154·3 | —148·8 | —132·1 | —104·3 | —65·4 | —15·35 | | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | —154·3 | —148·8 | —132·1 | —104·3 | —65·4 | —15·35 | | kgcm$^{-2}$ |

Die Fig. 5 und 6 geben die Tabellen IV und V zeichnerisch wieder. Man kann mit Hilfe der Kurven für $\Delta r$ und $\Delta t$ die Oberfläche des Körpers während der Drehung, sowie die Lage ursprünglich konzentrischer Kugelschalen konstruieren. Vergleicht man die beiden Abbildungen untereinander, so kann man sich ein Urteil über den Einfluß der Größe $m$ verschaffen.

*Der Mittelpunkt der Kugel wird am stärksten beansprucht*; dort ist eine reduzierte Spannung und auch die kubische Ausdehnung am größten.

Alle Punkte mit gleicher kubischer Ausdehnung liegen auf Scharen homothetischer, an den Polen abgeplatteter Rotationsellipsoide, deren Meridianellipsen die Gleichung $C = \frac{x^2}{3+7\Theta} + \frac{y^2}{2(1+3\Theta)}$ haben (in rechtwinkligen Koordinaten), wobei $r^2 = x^2 + y^2$ und $C$ eine Konstante ist. Das Achsenverhältnis ist $\sqrt{\frac{3+7\Theta}{2(1+3\Theta)}}$, somit für $\Theta = 1$ . . .

$\sqrt{1\cdot25} = 1\cdot1180$, und für $\Theta = \frac{1}{2}$ ..... $\sqrt{1\cdot30} = 1\cdot1402$. Die Flächen mit konstanter Parallelkreisspannung $\sigma_p$ sind ebenfalls konzentrische

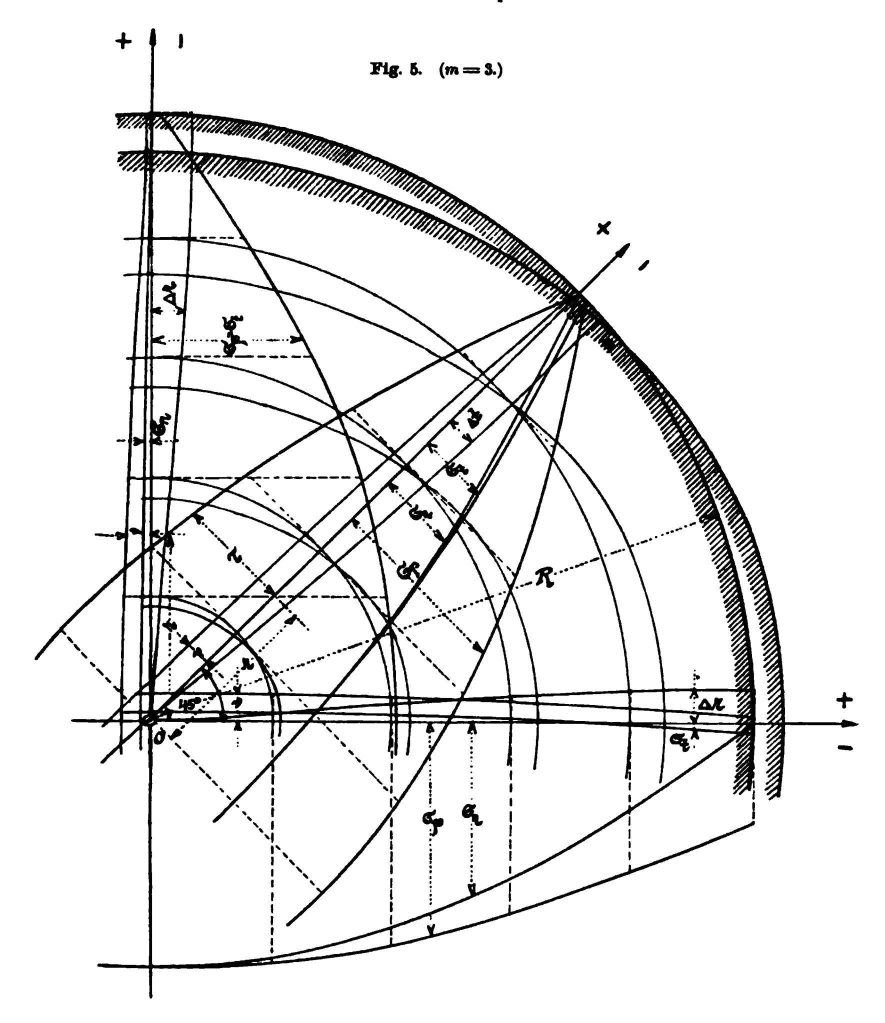


Fig. 5. ($m = 3$.)

Rotationsellipsoide. Die Gleichung $C(x^2 + y^2) = [R^2 - (x^2 + y^2)]xy$ kennzeichnet die Art der Meridiankurve des Drehungskörpers, dessen Punkte gleiche Schubspannungen besitzen.

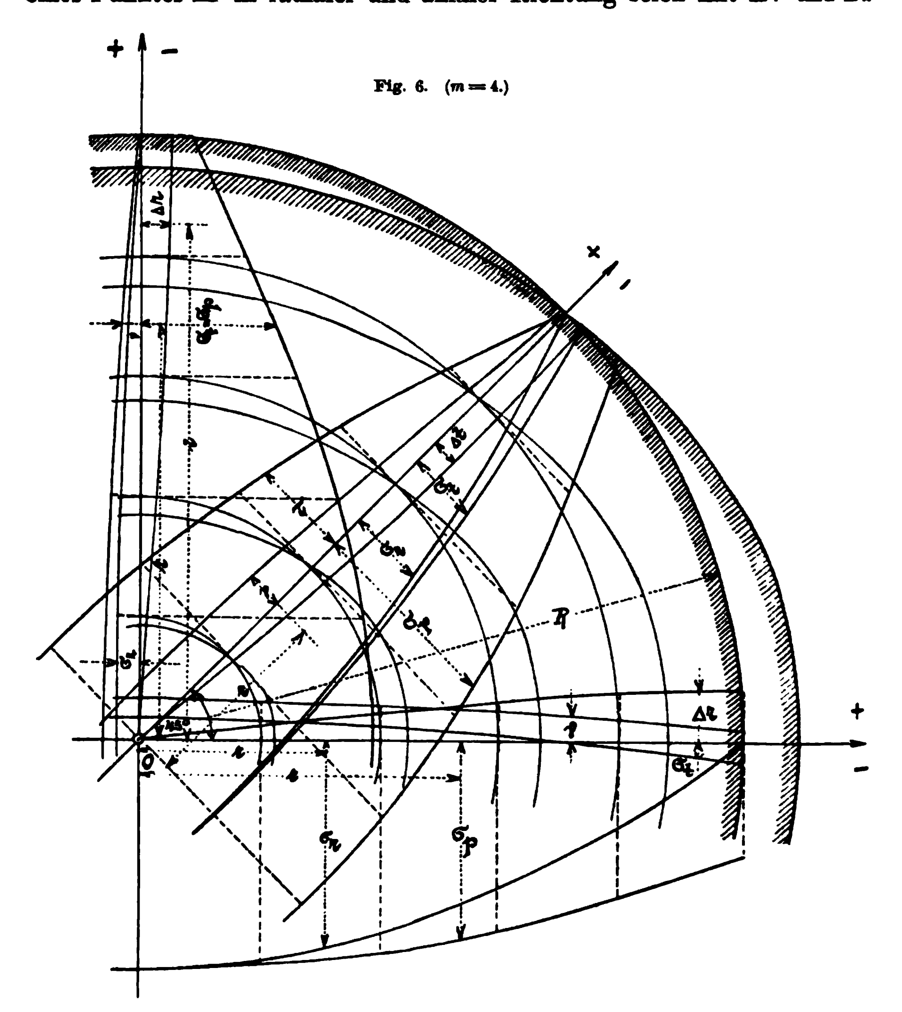
## IV.

„Il faut penser à côté." (Sourian.)

Wir wollen die hier erhaltenen Formeln vergleichen mit denjenigen, welche für den Zylinder gültig sind. Der Untersuchung liege ein

halbpolares Koordinatensystem zugrunde (Fig. 7). Die Verrückungen eines Punktes $M$ in radialer und axialer Richtung seien mit $\Delta r$ und $\Delta x$

Fig. 6. ($m = 4$.)



bezeichnet, entsprechend seinen Koordinaten $r$ und $x$. Bekanntlich lauten dann die Formeln für die Spannungen wie folgt:

$$
(80) \qquad \begin{cases}
\sigma_r = -2K\left[\dfrac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \Theta\nu\right], \\
\sigma_p = -2K\left[\dfrac{\Delta r}{r} + \Theta\nu\right], \\
\sigma_a = -2K\left[\dfrac{\partial(\Delta x)}{\partial x} + \Theta\nu\right], \\
\tau = -K\left[\dfrac{\partial(\Delta r)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\Delta x)}{\partial r}\right],
\end{cases}
$$

wobei $v$ die kubische Dilatation ist, welche, ausgedrückt durch die Verrückungen, gegeben ist durch den Ausdruck

$$v = \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}.$$

Fig. 7.

Es ist $\sigma_r$ die radiale, $\sigma_a$ die axiale, $\sigma_p$ die normal zu diesen Richtungen wirkende Spannung.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$(81)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(r\sigma_r)}{r\partial r} - \dfrac{\sigma_p}{r} + \dfrac{\partial\tau}{\partial x} - \dfrac{\gamma w^2}{g} r = 0, \\ \dfrac{\partial\sigma_a}{\partial x} + \dfrac{\partial(r\tau)}{r\partial r} = 0. \end{cases}$$

Für einen *unendlich langen* Hohlzylinder ist $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = C_0$ und $\tau = 0$ zu setzen. Die Spannungen und relativen Längenänderungen sind nur von $r$ abhängig, sodaß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{cases} \sigma_r = -2K\left[(1+\Theta)\dfrac{d(\Delta r)}{dr} + \Theta\dfrac{\Delta r}{r} + \Theta C_0\right], \\ \sigma_p = -2K\left[\Theta\dfrac{d(\Delta r)}{dr} + (1+\Theta)\dfrac{\Delta r}{r} + \Theta C_0\right], \\ \sigma_a = -2K\left[\Theta\dfrac{d(\Delta r)}{dr} + \Theta\dfrac{\Delta r}{r} + (1+\Theta)C_0\right], \end{cases}$$

$$(82)\qquad \frac{d(r\sigma_r)}{r\,dr} - \frac{\sigma_p}{r} = \frac{\gamma w^2}{g} r.$$

Setzt man diese Werte für $\sigma_r$ und $\sigma_p$ in die Gleichung (82) ein, so bekommt man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration den folgenden Ausdruck liefert:

$$\Delta r = -\frac{\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g} r^3 + C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

$C_1$ und $C_2$ sind die Integrationskonstanten. Somit ist

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g} r^2 + C_1 + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{3\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g} r^2 + C_1 - \frac{C_2}{r^2}.$$

Die Formeln für die Spannungen lauten nun:

$$\sigma_r = -2K\left[-\frac{(3+4\Theta)\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g}r^2 + (1+2\Theta)C_1 + \Theta C_0 - \frac{C_2}{r^2}\right],$$

$$\sigma_p = -2K\left[-\frac{(1+4\Theta)\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g}r^2 + (1+2\Theta)C_1 + \Theta C_0 + \frac{C_2}{r^2}\right],$$

$$\sigma_a = -2K\left[-\frac{4\Theta\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g}r^2 + 2\Theta C_1 + (1+\Theta)C_0\right].$$

Aus den Bedingungen, daß einerseits die radiale Spannung an der inneren und äußeren Mantelfläche den Wert Null annehmen, andrerseits ein Querschnitt des Hohlzylinders im Gleichgewichte sich befinden muß, somit $\int_{r=r_i}^{r=r_a} 2\pi r\sigma_a dr = 0$ ist, erhält man die Konstanten $C_0$, $C_1$ und $C_2$. Es ist

$$C_1 = \frac{(3+\Theta)(1+2\Theta)(r_a^2+r_i^2)\gamma w^2}{16K(1+\Theta)(1+3\Theta)g},$$

$$C_2 = \frac{(3+4\Theta)r_a^2 r_i^2\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g},$$

$$2C_1 + C_0 = \frac{(3+5\Theta)(r_a^2+r_i^2)\gamma w^2}{8K(1+\Theta)(1+3\Theta)g}.$$

Diese Werte sind nun in die obenstehenden Gleichungen für die radiale Verrückung und für die Spannungen einzusetzen:

$$(84)\left\{\begin{aligned}
\Delta r &= \frac{\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g}\left[-r^3 + \frac{(3+\Theta)(1+2\Theta)(r_a^2+r_i^2)}{1+3\Theta}r + \frac{(3+4\Theta)r_a^2 r_i^2}{r}\right],\\
v &= \frac{\gamma w^2}{8K(1+\Theta)g}\left[-2r^2 + \frac{(3+5\Theta)(r_a^2+r_i^2)}{1+3\Theta}\right],\\
\sigma_r &= -\frac{(8+4\Theta)\gamma w^2}{8(1+\Theta)g}\left[-r^2 + (r_a^2+r_i^2) - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}\right],\\
\sigma_p &= -\frac{(3+4\Theta)\gamma w^2}{8(1+\Theta)g}\left[-\frac{1+4\Theta}{3+4\Theta}r^2 + (r_a^2+r_i^2) + \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}\right],\\
\sigma_a &= -\frac{\Theta\gamma w^2}{4(1+\Theta)g}\left[-2r^2 + (r_a^2+r_i^2)\right].
\end{aligned}\right.$$

Die Spannungen sind somit unabhängig vom Schubmodul. Für $r_a = 20$ (cm), $r_i = 10$ (cm), $K = 900\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $\Theta = 1$ erhält man:

Tabelle VI.

| $r$ | 10 | 20 | | cm |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta r$ | 0·001458 | 0·001250 | $\cdot\frac{\gamma w^2}{g}$ | cm |
| $v$ | 0·00005556 | 0·00001389 | | — |
| $\sigma_p$ | — 862·5 | — 137·5 | | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_a$ | — 37·5 | 37·5 | | kgcm$^{-2}$ |

Vergleichen wir diese Werte mit den für $\varphi = 0$, also für die Äquatorebene einer Hohlkugel gültigen (Tabelle I), so bemerken wir, daß für den Hohlzylinder die Verrückungen größer sind, was auch zu erwarten war. Hier wie dort ist die Verrückung für $r = r_i$ größer als für $r = r_a$. Die Ursache dieser Erscheinung ist klar; die Spannungen $\sigma_\varphi$ bewirken beträchtliche Querkontraktionen. Es ist $\sigma_p$ am Außenmantel sehr wenig verschieden von der bei der Hohlkugel erhaltenen Größe; $\sigma_a$ hingegen, welchem bei der Kugelschale dem Werte $\sigma_t$ entspricht, zeigt in beiden Fällen ein entgegengesetztes Verhalten.

Die größte Beanspruchung eines langen rotierenden Hohlzylinders findet längs der Erzeugenden des Innenmantels statt.

Etwas einfacher ist die Ableitung für eine *dünne* rotierende Scheibe, da in diesem Falle $\sigma_a = \tau = 0$ zu setzen ist, sodaß man schreiben kann:

$$\frac{d(\Delta x)}{dx} = -\frac{\Theta}{1+\Theta}\left[\frac{d(\Delta r)}{dr} + \frac{\Delta r}{r}\right].$$

Es wird hiermit

$$\sigma_r = -\frac{2K}{1+\Theta}\left[\Theta\frac{\Delta r}{r} + (1+2\Theta)\frac{d(\Delta r)}{dr}\right],$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{2K}{1+\Theta}\left[(1+2\Theta)\frac{\Delta r}{r} + \Theta\frac{d(\Delta r)}{dr}\right].$$

Setzt man diese Werte in die Gleichgewichtsbedingung ein, so erhält man durch zweimalige Integration die radiale Verrückung

$$\Delta r = -\frac{(1+\Theta)\gamma w^2}{16K(1+2\Theta)g}r^3 + C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

$C_1$ und $C_2$ sind die Integrationskonstanten. Somit gehen die Gleichungen für die Spannungen in die folgenden über:

$$\sigma_r = -\frac{2K}{1+\Theta}\left[-\frac{(3+7\Theta)(1+\Theta)\gamma w^2}{16K(1+2\Theta)g}r^2 + (1+3\Theta)C_1 - (1+\Theta)\frac{C_2}{r^2}\right],$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{2K}{1+\Theta}\left[-\frac{(1+5\Theta)(1+\Theta)\gamma w^2}{16K(1+2\Theta)g}r^2 + (1+3\Theta)C_1 + (1+\Theta)\frac{C_2}{r^2}\right].$$

Soll die radiale Spannung $\sigma_r$ am inneren und äußeren Umfange verschwinden, so müssen die Konstanten die folgenden Werte annehmen:

$$(83a)\quad \begin{cases} (1+3\Theta)C_1 = \dfrac{(1+\Theta)(3+7\Theta)(r_a^2+r_i^2)\gamma w^2}{16K(1+2\Theta)g}, \\ (1+\Theta)C_2 = \dfrac{(1+\Theta)(3+7\Theta)r_a^2 r_i^2 \gamma w^2}{16K(1+2\Theta)g}. \end{cases}$$

Somit erhalten wir:

$$(84a)\quad \begin{cases} \Delta r = \frac{(1+\Theta)(3+7\Theta)\gamma w^2}{16K(1+2\Theta)g}\left[-\frac{r^3}{3+7\Theta}+\frac{r_a^2+r_i^2}{1+3\Theta}r+\frac{r_a^2 r_i^2}{(1+\Theta)r}\right], \\ v = \frac{\gamma w^2}{8K(1+2\Theta)g}\left[-2r^2+\frac{3+7\Theta}{1+3\Theta}(r_a^2+r_i^2)\right], \\ \sigma_r = -\frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{8(1+2\Theta)g}\left[-r^2+(r_a^2+r_i^2)-\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}\right], \\ \sigma_p = -\frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{8(1+2\Theta)g}\left[-\frac{(1+5\Theta)}{3+7\Theta}r^2+(r_a^2+r_i^2)+\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}\right]. \end{cases}$$

Die Spannungen sind wieder unabhängig vom Schubmodul $K$. In diesen Formeln, sowie in den Gleichungen (84) ist die Form von $\sigma_p$ eine eigentümliche, von $\sigma_r$ verschiedene. Für $r = r_a$ und $r = r_i$ bekommen wir sowohl aus der Formel (84a), als auch aus der Formel (84) denselben Wert für $\Delta r$, nämlich

$$\Delta r_a = \frac{r_a \gamma w^2}{8K(1+3\Theta)g}[(1+\Theta)r_a^2+(3+7\Theta)r_i^2], \quad \text{bezw.}$$

$$\Delta r_i = \frac{r_i \gamma w^2}{8K(1+3\Theta)g}[(1+\Theta)r_i^2+(3+7\Theta)r_a^2].$$

Man kann also sagen: *Die beiden Mantelflächen rotierender Hohlzylinder, die denselben Querschnitt haben, kommen während der Drehung in dieselben Lagen, mag der Körper sehr kurz oder sehr lang sein.*

Wir wollen auch für diesen Fall die Spannungen und Verrückungen für $r = r_i$ und $r = r_a$ rechnen, wobei wieder $r_a = 20$ (cm), $r_i = 10$ (cm), $K = 900\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $\Theta = 1$ gesetzt werden soll. Man erhält:

Tabelle VII.

| $r$ | 10 | 20 | | cm |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta r$ | 0·001458 | 0·001250 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | cm |
| $v$ | 0·00004861 | 0·00002083 | | — |
| $\sigma_p$ | — 350 | — 150 | | kgcm$^{-2}$ |

Wenn $r_i$ und $r_a$ wenig voneinander verschieden sind, so gehen die Formeln (84) und (84a) in die folgenden über:

$$(84_1)\quad \begin{cases} \Delta r = \frac{(1+2\Theta)\gamma w^2 r^3}{2K(1+3\Theta)g} = \frac{\gamma w^2 r^3}{Eg}, \\ v = \frac{\gamma w^2 r^2}{2K(1+3\Theta)g}, \\ \sigma_r = 0, \\ \sigma_p = -\frac{\gamma w^2}{g}r^2, \\ \sigma_a = 0. \end{cases}$$

Diese Formeln stimmen überein mit den mit (78) und (79) bezeichneten. Somit kann man sagen: *Jedes Element einer kugelförmigen Membran ist gerade so beansprucht, wie ein Element einer zylindrischen, die mit derselben Winkelgeschwindigkeit sich dreht und deren Halbmesser so groß ist, wie der des durch diesen Punkt gelegten Parallelkreises. Jeder Parallelkreis deformiert sich gerade so, wie der Querschnitt einer zylindrischen Membran vom gleichen Radius.* Diese Sätze folgen übrigens schon aus der Tatsache, daß in der Richtung eines Meridians einer dünnen Kugelschale keine Spannung auftritt.

Man kann die Formel für die Spannung $\sigma_p$ aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_p - \frac{\gamma w^2}{g} r^2 = 0$$

sofort erhalten, wenn man $\sigma_r = 0$ setzt.

Wenn $r_i = 0$ ist, so nehmen die Formeln (84) und (84a) die folgenden Gestalten an:

$$(84_2) \quad \begin{cases} \Delta r = \dfrac{\gamma w^2}{16K(1+\Theta)g}\left[-r^2 + \dfrac{(1+2\Theta)(3+\Theta)r_a^2}{1+3\Theta}\right]r, \\[2ex] v = \dfrac{\gamma w^2}{8K(1+\Theta)g}\left[-2r^2 + \dfrac{3+5\Theta}{1+3\Theta}r_a^2\right], \\[2ex] \sigma_r = -\dfrac{(3+4\Theta)\gamma w^2}{8(1+\Theta)g}(-r^2 + r_a^2), \\[2ex] \sigma_p = -\dfrac{\gamma w^2}{8(1+\Theta)g}[-(1+4\Theta)r^2 + (3+4\Theta)r_a^2], \\[2ex] \sigma_a = -\dfrac{\Theta\gamma w^2}{4(1+\Theta)g}(-2r^2 + r_a^2). \end{cases}$$

$$(84a_2) \quad \begin{cases} \Delta r = \dfrac{(1+\Theta)\gamma w^2}{16K(1+2\Theta)g}\left[-r^2 + \dfrac{(3+7\Theta)r_a^2}{1+3\Theta}\right]r, \\[2ex] v = \dfrac{\gamma w^2}{8K(1+2\Theta)g}\left[-2r^2 + \dfrac{3+7\Theta}{1+3\Theta}r_a^2\right], \\[2ex] \sigma_r = -\dfrac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{8(1+2\Theta)g}(-r^2 + r_a^2), \\[2ex] \sigma_p = -\dfrac{\gamma w^2}{8(1+2\Theta)g}[-(1+5\Theta)r^2 + (3+7\Theta)r_a^2]. \end{cases}$$

Für $r_a = 20$ (cm), $K = 900\,000$ (kgcm$^{-2}$) und $\Theta = 1$, erhalten wir die folgenden Tabellen.

Tabelle VIII.

| $r$ | 0 | 10 | 20 | | cm |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varDelta r$ | 0 | 0·0003820 | 0·0005555 | | cm |
| $v$ | 0·00005556 | 0·00004167 | 0 | | — |
| $\sigma_r$ | — 175 | — 131·25 | 0 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | — 175 | — 143·75 | — 50 | | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_a$ | — 50 | — 25 | 50 | | kgcm$^{-2}$ |

Die axialen Spannungen sind nicht unbeträchtlich.

Tabelle IX.

| $r$ | 0 | 10 | 20 | | cm |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varDelta r$ | 0 | 0·0004167 | 0·0005555 | | cm |
| $v$ | 0·00004630 | 0·00003704 | 0·00000926 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | — |
| $\sigma_r$ | — 166·7 | — 125 | 0 | | kgcm$^{-2}$ |
| $\sigma_p$ | — 166·7 | — 141·7 | — 66·7 | | kgcm$^{-2}$ |

Der Unterschied zwischen den Spannungen $\sigma_r$ und $\sigma_p$ in einem sehr kurzen und einem unendlich langen sich gleichmäßig drehenden Zylinder ist nicht bedeutend. Vergleicht man die hier erhaltenen Werte mit den in Tabelle IV stehenden, so ergibt sich die folgende interessante Zusammenstellung:

Tabelle X.

| | Kugel Äquator-ebene | Unendlich langer Zylinder | Scheibe | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varDelta r$ | 0·0005470 | 0·0005555 | 0·0005555 | | für $r = r_a$ |
| $v$ | 0·00004444 | 0·00005556 | 0·00004630 | | für $r = 0$ |
| $v$ | 0·00001026 | 0 | 0·00000926 | | für $r = r_a$ |
| $\sigma_r$ | — 163·07 | — 175·00 | — 166·67 | $\cdot \frac{\gamma w^2}{g}$ | für $r = 0$ |
| $\sigma_p$ | — 67·7 | — 50 | — 66·7 | | für $r = r_a$ |
| $\sigma_t$ bezw. $\sigma_a$ | 6·15 | — 50 | 0 | | für $r = 0$ |
| $\sigma_t$ bezw. $\sigma_a$ | — 6·15 | 50 | 0 | | für $r = r_a$ |

Der Zeichenwechsel in den beiden letzten Reihen ist beachtenswert.[1])

1) Es gibt ein oblonges Drehungsellipsoid, dessen Achsen sich verhalten wie $1 : \sqrt{\frac{4\Theta(1+3\Theta)}{(1+\Theta)(3+7\Theta)}}$ (für $\Theta = 1$ wie $1 : 1·118$) bei welchem die Normalspannung $\sigma_a$ parallel zur Drehungsachse für alle Punkte gleich Null ist. (Sur l'équilibre d'élasticité d'un corps tournant. Note de M. L. Lecornu, C. R. 123,

## V.

Die Aufgabe, die Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohlkugel zu finden, ist ein Sonderfall des viel allgemeineren Problems der Beanspruchung einer Hohlkugel durch beliebige Massen- und Oberflächenkräfte, welches durch Entwicklung in unendliche Reihen nach trigonometrischen oder Kugelfunktionen gelöst werden kann. Schon Lamé bestimmte die Lösung für beliebige Kräfte, die auf die Oberfläche wirken, und änderte sie sodann dahin ab, daß sie auch benützt werden kann, wenn gewisse Massenkräfte wirksam sind. (Sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques, Liouvilles Journal XIX, 1854, S. 69 ff.) Auf einem von dem Laméschen verschiedenen Wege, ohne Benutzung von Polarkoordinaten, hat Thomson die Lösungen angegeben. (W. Thomson und P. G. Tait, Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim.) Beide verwendeten Kugelfunktionen, ersterer doppelt unendliche, letzterer einfach unendliche Reihen. Für das allgemeine Wärmespannungsproblem einer vollen Kugel hat Borchardt die Lösung in endlicher Form gegeben. (Abh. d. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1873, Untersuchungen über die Elastizität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme, S. 9 ff.) Eine neue Lösung der allgemeinen Aufgabe durch bestimmte Integrale hat V. Cerrutti gegeben. (Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per date forze applicate sulla superficie. Il nuovo Cimento, 1892, III. 32. S. 231 ff.)

In unserem Sonderfalle wurden die Funktionen, durch welche die Formänderungen dargestellt sind, zum Teil angenommen. Erst die Möglichkeit die Konstanten zu bestimmen, ergab die Zulässigkeit der Annahmen. Somit ist diese Aufgabe zum Teile eine umgekehrte, denn gewöhnlich sind die Kräfte gegeben und daraus direkt die Spannungen und Formänderungen zu bestimmen.

Wien, den 1. Oktober 1905.

---

1896, S. 96—99.) Dieser Körper scheidet die Drehungsellipsoide, welche man sich zwischen Kugel und unendlich langem Zylinder vorstellen kann, in zwei Teile. Bei den stärker oblongen erscheinen die axialen Spannungen der Äquatorebene in der Nähe des Kugelmittelpunktes negativ und in der Nähe der Oberfläche positiv; bei minder oblongen ist es umgekehrt, und für das erwähnte Ellipsoid sind sie überall Null.

# Über die Berechnung der Summen diskontierter Zahlen für eine nach dem Makehamschen Gesetz fortschreitende Sterbetafel.

Von M. LERCH in Freiburg (Schweiz).

Bedeutet $l_x$ die Anzahl der Lebenden zum Alter $x$ einer Sterbetafel, oder vielmehr eine jener Zahl proportionale Größe, so läßt sich zufolge eines Satzes von Makeham $l_x$ in der Gestalt

$$l_x = s^x g^{c^x} = s^x e^{-\gamma c^x} \tag{1}$$

darstellen, wobei die Konstanten $s$, $g$, $c$ den Bedingungen genügen

$$0 < g < 1, \quad 0 < s < 1, \quad c > 1; \quad \gamma = -\log g > 0.$$

Namentlich gibt es eine Sterbetafel mit den Werten[1])

$$s = \frac{1}{1{,}006615}, \quad g = 0{,}999052, \quad c = 1{,}09648.$$

Die Schreibweise log bedeutet immer die natürlichen Logarithmen, dagegen werden die Dezimallogarithmen durch Log angedeutet. In den Formeln der Versicherungstheorie kommen die sogenannten diskontierten Zahlen der Lebenden, d. h. die Zahlen

$$\delta_x = \frac{l_x}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x}, \qquad (p = \text{Prozentsatz}),$$

und ihre Summen vor.

Bedient man sich der Bezeichnung

$$\varrho = \frac{s}{1 + \frac{p}{100}} \qquad (\text{sodaß also } 0 < \varrho < 1), \tag{2}$$

so sind die uns interessierenden Größen nach (1)

$$\delta_x = \varrho^x g^{c^x}, \quad S_a = \delta_a + \delta_{a+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^{a+n} g^{c^{a+n}}, \tag{3}$$

wobei noch ausdrücklich bemerkt werden mag, daß die Versicherungstechnik nicht mit den Summen $S_a$ selbst, sondern mit Differenzen

1) Entnommen dem Werke Dormoy, Théorie math. des assurances sur la vie. Paris, 1878; p. 123.

$S_a - S_\tau$ ($\tau - 1$ die letzte in der Sterbetafel vertretene Zahl), operiert.

Für die oben erwähnte Sterbetafel und wohl auch für die anderen ist, solange $p \leqq 10$, das Produkt $c\varrho$ größer als Eins. Dies hat, wie sogleich gezeigt werden soll, die Konvergenz der Reihe

$$\Phi(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{a-\nu}(1 - g^{c^{a-\nu}}) \tag{4}$$

zur Folge. In der Tat folgt aus dem Mittelwertsatz

$$1 - e^{-x} = xe^{-\vartheta x}, \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

für $x = \gamma c^{a-\nu}$

$$1 - g^{c^{a-\nu}} = 1 - e^{-\gamma c^{a-\nu}} = \gamma c^{a-\nu} e^{-\vartheta \gamma c^{a-\nu}},$$

und folglich

$$\varrho^{a-\nu}(1 - g^{c^{a-\nu}}) = \gamma (c\varrho)^a \Theta \left(\frac{1}{c\varrho}\right)^\nu, \qquad (0 < \Theta < 1),$$

woraus die Konvergenz von (4) wegen $c\varrho > 1$ ersichtlich ist.

Die Reihe spalten wir nun in zwei Teile, jenachdem $a - \nu \geqq 0$ oder $a - \nu < 0$ ist. In dem ersten endlichen Teil setze ich $a - \nu = \mu$, im zweiten Teile dagegen $\nu = a + \mu$, sodaß die Voraussetzung gemacht wird, daß $a$ eine ganze Zahl ist. So kommt

$$\Phi(a) = \sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^\mu (1 - g^{c^\mu}) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \varrho^{-\mu}(1 - g^{c^{-\mu}}).$$

Der erste Teil läßt sich nun schreiben

$$\sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^\mu - \sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^\mu g^{c^\mu} = \frac{1 - \varrho^a}{1 - \varrho} - \sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^\mu g^{c^\mu},$$

und unsere Gleichung nimmt nach Addition der Größe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \varrho^\mu g^{c^\mu}$$

folgende Gestalt an:

$$\Phi(a) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \varrho^\mu g^{c^\mu} = \sum_{\mu=a}^{\infty} \varrho^\mu g^{c^\mu} + \frac{1 - \varrho^a}{1 - \varrho} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \varrho^{-\mu}(1 - g^{c^{-\mu}}).$$

Führt man daher die Bezeichnung

$$K = \frac{1}{1 - \varrho} - \sum_{\mu=0}^{\infty} \varrho^\mu g^{c^\mu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{-\nu}(g^{c^{-\nu}} - 1) \tag{5}$$

ein, so folgt die Beziehung

$$S_a = \sum_{\mu=a}^{\infty} \varrho^\mu g^{c^\mu} = \frac{\varrho^a}{1-\varrho} + \Phi(a) - K, \tag{6}$$

in welcher die Größe $K$ vom Alter $a$ unabhängig ist. Die hier auf der rechten Seite auftretende Größe $\Phi(a)$ ist zwar durch die Reihe (4) vollständig definiert, jedoch nur im Sinne der Logik, da die Reihe nur schwach konvergiert. Wir müssen uns daher eine andere Darstellung von $\Phi(a)$ verschaffen. Dies gelingt in äußerst einfacher Weise vermittels der elementaren Formel

$$1 - e^x = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Setzt man darin $x = -\gamma c^{a-\nu}$ und summiert über $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, so kommt

$$\Phi(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\gamma^\mu}{\mu!} \varrho^{a-\nu} c^{\mu a - \mu\nu}.$$

Die Doppelreihe auf der rechten Seite ist nun absolut konvergent, da die Summe der absoluten Beträge ihrer Glieder den Wert

$$\sum_{\nu} \varrho^{a-\nu} \left(e^{\gamma c^{a-\nu}} - 1\right)$$

hat; dadurch ist die Umkehrbarkeit der Summationsordnung dargetan, und wir erhalten durch Ausführung der Summation in Bezug auf $\nu$ die gewünschte Entwicklung

$$\Phi(a) = \varrho^a \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{(\gamma c^a)^\mu}{\mu!(c^\mu \varrho - 1)}. \tag{7}$$

Die Größen $\gamma c^a$ sind für jüngere Jahrgänge ziemlich klein, z. B. im Falle der eingangs erwähnten Sterbetafel

$$\gamma = 0{,}000948, \quad \operatorname{Log} \gamma = 0{,}97681 - 4, \quad \operatorname{Log} c = 0{,}04,$$

also für $a = 30$ und $a = 50$

$$\gamma c^{30} = 0{,}015002, \quad \gamma c^{50} = 0{,}0948,$$

und die Größe $\Phi(a)$ läßt sich mit Hilfe von (7) mit seltener Bequemlichkeit herstellen.

Für $a = 75$ haben wir dagegen

$$\gamma c^{75} = 0{,}948,$$

die Benutzung von (7) ist also nicht mehr so bequem wie für kleinere Alterszahlen, immerhin aber noch möglich.

Handelt es sich um die Berechnung von temporären Leibrenten, so kommen bloß die Differenzen $S_a - S_b$ in Betracht; die Formel (6) liefert dann

$$S_a - S_b = \frac{\varrho^a - \varrho^b}{1 - \varrho} + \Phi(a) - \Phi(b),$$

und man kann diesbezügliche Rechnungen lediglich mit Hilfe der Entwicklung (7) ausführen, falls $b \leqq 75$, und die Kenntnis der Konstanten $K$ ist nicht erforderlich.

---

Die vorhergehenden Betrachtungen bewegen sich in den elementarsten Grenzen und sind auch denjenigen zugänglich, die nur mit allereinfachsten Vorkenntnissen versehen sind. Die nachfolgenden Ausführungen setzen dagegen die Kenntnis der Gammafunktion voraus, welche die Berechnung der Größe $K$ in überraschend bequemer Weise ermöglicht.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir jedoch zeigen, wie man sich mit Hilfe des Zahlwertes $K$ die Größe $\Phi(\tau)$ verschaffen kann, wobei $\tau$ die erste in der Sterbetafel nicht mehr vertretene Alterszahl bedeutet.

Man verschafft sich zunächst durch direkte Rechnung den Wert

$$S_\tau = \sum_{\mu=\tau}^{\infty} \varrho^\mu g^\mu,$$

was durch Benutzung einer nur geringen Zahl von Gliedern bewerkstelligt werden kann. Nachher bedient man sich der aus (6) folgenden Formel

$$\Phi(\tau) = S_\tau + K - \frac{\varrho^\tau}{1 - \varrho}$$

zur Berechnung von $\Phi(\tau)$.

Zur Bestimmung der Größe $K$ führt eine Relation, die ich im ersten Bande der Abhandlungen (Rozpravy) der Prager Akademie auf S. 147 aufgestellt habe und die sich leicht verifizieren läßt; sie lautet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s + nti) e^{2nu\pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}} e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}. \tag{8}$$

Wir bedürfen derselben für reelle $u$ und für reelle positive $t$; der reelle Teil von $s$ muß positiv sein, wenn die rechte Seite konvergieren soll. Da diese Voraussetzung zur Konvergenz der linken Seite nicht erforderlich ist, so erhalten wir eine auch für negative $s$ gültige Gleichung,

wenn wir die rechte Seite passend umformen. Derjenige Teil der unendlichen Reihe rechts, der von den Werten $n = -1, -2, -3, \ldots$ stammt, d. h.

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-e^{-\frac{2\pi}{t}(m+u)}} e^{-\frac{2s\pi}{t}(m+u)},$$

kann in der Tat wie folgt geschrieben werden

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(e^{-e^{-\frac{2\pi}{t}(m+u)}}-1\right)e^{-\frac{2s\pi}{t}(m+u)}+\frac{e^{-\frac{2s\pi}{t}u}}{e^{\frac{2s\pi}{t}}-1},$$

und dieser letzte Ausdruck konvergiert, sobald nur der reelle Teil von $s+1$ positiv bleibt.

Wir haben alsdann die Relation

$$(8^*)\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}}+\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2s\pi}{t}(m+u)}\left(e^{-e^{-\frac{2\pi}{t}(m+u)}}-1\right)\\ &\qquad+\frac{e^{-\frac{2s\pi}{t}u}}{e^{\frac{2s\pi}{t}}-1}=\frac{t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma(s+nti)e^{2nu\pi i},\end{aligned}\right.$$

(reeller Teil von $s+1>0$).

Machen wir nun die Annahmen

$$\frac{2s\pi}{t}=\log\varrho,\quad \frac{2\pi}{t}=\log c,\quad u=-\frac{\log\gamma}{\log c},$$

so wird

$$\frac{2\pi}{t}(s+1)=\log(c\varrho)>0,$$

also die Bedingung erfüllt, und da alsdann

$$e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}=\gamma c^{n},\quad e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}=\varrho^{n+\frac{\log\gamma}{\log c}},$$

so nimmt unsere Beziehung (8*) die Form

$$\log c\cdot\varrho^{\frac{\log\gamma}{\log c}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\varrho^{n}e^{-\gamma c^{n}}+\sum_{m=1}^{\infty}\varrho^{-m}\left(e^{-\gamma c^{-m}}-1\right)+\frac{1}{\varrho-1}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{\log\varrho}{\log c}+\frac{2n\pi i}{\log c}\right)e^{-2n\pi i\frac{\log\gamma}{\log c}}$$

an. Der in eckigen Klammern auf der linken Seite stehende Ausdruck ist nun aber genau $-K$, und wir erhalten

$$K = -\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}\,\Gamma\left(\frac{\log\varrho}{\log c}\right) + \chi, \tag{9}$$

wenn mit $\chi$ die Größe

$$-\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}\sum_n{}'\,\Gamma\left(\frac{\log\varrho}{\log c} + \frac{2n\pi i}{\log c}\right)e^{-2n\pi i\frac{\log\gamma}{\log c}} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{10}$$

angedeutet wird. Nun ist aber in unserem Beispiel

$$-\frac{\log\gamma}{\log c} = 75{,}58,$$

und nehmen wir

$$\varrho = \frac{1}{1{,}04}$$

an, so kommt

$$\frac{\varrho^{75,58}}{\log c} < 1,$$

ein Umstand, der den Schluß gestattet, daß der Faktor

$$\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}$$

die Einheit nicht stark übertreffen wird. Wenn wir daher beachten, daß die Reihe (10) so stark wie eine geometrische konvergiert, so wird es hinreichen zu zeigen, daß die Größen

$$\Gamma\left(s + \frac{2n\pi i}{\log c}\right) = \frac{\Gamma\left(1 + s + \frac{2n\pi i}{\log c}\right)}{s + \frac{2n\pi i}{\log c}}$$

so klein sind wie $e^{-96n}$, also die Vernachlässigung von $\chi$ die ersten vierzig Stellen des Resultats nicht beeinträchtigen kann. Man hat nun

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u}\,\Gamma(u+1), \quad u = \frac{\log\varrho}{\log c},$$

also

$$K = -\Gamma\left(\frac{\log c\varrho}{\log c}\right)\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log\varrho}, \tag{9*}$$

und dies ist positiv. Das Argument der $\Gamma$-Funktion ist hier nun positiv und kleiner als Eins, und der Logarithmus derselben ist den bekannten Tafeln zu entnehmen.

---

Mit den vorliegenden Ausführungen ist der eigentliche Zweck der Abhandlung erreicht. Wir wollen jedoch den aus denselben folgenden Kaufwert der praenumerando zu beziehenden mit dem Alter $a$ beginnenden Leibrente vom jährlichen Betrage Eins mit dem Kaufwert der sogenannten stetigen Leibrente

$$\bar{R}_a = \frac{1}{\delta_a}\int_a^\tau \delta_x dx = \frac{1}{\varrho^a g^{c^a}}\int_a^\tau \varrho^x g^{c^x} dx$$

vergleichen. Diese Leibrente wird zwar postnumerando bezogen, jedoch werden die Raten verzinst. Indem wir die bisherige Bezeichnung

$$g = e^{-\gamma}$$

beibehalten, setzen wir in dem Integral

$$\gamma c^x = z, \quad x \log c = \log z - \log \gamma,$$

und erhalten

$$\int_a^\infty \varrho^x e^{-\gamma c^x} dx = \frac{\varrho^{-\frac{\log \gamma}{\log c}}}{\log c}\int_{\gamma c^a}^\infty e^{-z} z^{\frac{\log \varrho}{\log c} - 1} dz.$$

Bedienen wir uns der durch die Arbeiten von Prym, Hermite und Bourguet eingebürgerten Bezeichnung

$$(11) \qquad Q(s, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1} dx,$$

$$(11^1) \qquad P(s, \omega) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\omega^{s+n}}{n!(s+n)},$$

sodaß

$$(11^2) \qquad P(s) + Q(s) = \Gamma(s)$$

ist, so läßt sich unser Resultat schreiben

$$(12) \qquad \int_a^\infty \varrho^x e^{-\gamma c^x} dx = \frac{\varrho^{-\frac{\log \gamma}{\log c}}}{\log c} Q\left(\frac{\log \varrho}{\log c}, \gamma c^a\right)$$

und die stetige Leibrente $\bar{R}_a$ wird durch folgende Gleichung bestimmt sein:

$$(12^*) \qquad \bar{R}_a \varrho^a e^{-\gamma c^a} = \frac{\varrho^{-\frac{\log \gamma}{\log c}}}{\log c}\left[Q\left(\frac{\log \varrho}{\log c}, \gamma c^a\right) - Q\left(\frac{\log \varrho}{\log c}, \gamma c^\tau\right)\right].$$

Bis zum Alter $a = 75$ ist $\gamma c^a$ kleiner als Eins, und hier wird für

$s = \frac{\log \varrho}{\log c}$, $\omega = \gamma c^{\alpha}$ die Reihe $P(s, \omega)$ schnell konvergieren. Die Berechnung von $Q(s, \omega)$ also auf $\Gamma(s) - P(s, \omega)$ reduziert.

Dagegen ist $\gamma c^{100} = 9{,}48$ und die Bestimmung der Größe $Q(s, \gamma c^{\tau})$ wird auf anderem Wege bewerkstelligt werden müssen. Dazu eignet sich z. B. die halbkonvergente Entwicklung[1])

$$Q(1-s, z) = u \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-z}}{(mu+z)^s} - \frac{ue^{-z}}{2z^s} - \frac{e^{-z}}{z^s} \sum_{\nu=1,2,3\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu u^{2\nu}}{(2\nu)!} G(z, s)_\nu,$$

in welcher die Hilfsgröße $u$ gleich Eins gesetzt werden kann, und wobei

$$G(z, s)_1 = 1 + \frac{s}{z}, \quad G(z, s)_2 = 1 + \frac{3s}{z} + \frac{3s(s+1)}{z^2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{z^3},$$

$$G(z, s)_\nu = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \frac{s(s+1)\cdots(s+\alpha-1)}{z^\alpha}.$$

Im vorliegenden Falle begeht man ungefähr den Fehler $\frac{1}{10^{10}}$, wenn man in der halbkonvergenten Reihe bloß die zwei Glieder $\nu = 1$ und $\nu = 2$ berücksichtigt. Schreibt man hier also das Resultat mit dieser Annäherung, so kommt

$$Q(1-s, z) = e^{-z-1}\left[\frac{1}{(z+1)^s} + \frac{e^{-1}}{(z+2)^s} + \frac{e^{-2}}{(z+3)^s} + \cdots\right] + \frac{e^{-z}}{2z^s}$$
$$- \frac{e^{-z}}{z^s}\left(\frac{G_1}{12} - \frac{G_2}{720}\right),$$

und man wird die unendliche Reihe bloß auf zwei, drei Stellen zu bestimmen haben, um sieben Dezimalstellen zu bekommen.

Übrigens liefert eine bekannte Eulersche Formel die Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{(n+z)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^{n-1}(z+1)^{-s}}{(e-1)^n}, \qquad (\Delta z = 1),$$

mit welcher sich die Rechnung schnell vollzieht.

Noch bequemer wäre die konvergente Entwicklung[2])

$$Q(1-s, \omega) = e^{-\omega}\left(\frac{c_0}{\omega^s} + c_1 \Delta \omega^{-s} + c_2 \Delta^2 \omega^{-s} + \cdots\right), \qquad (\Delta \omega = 1),$$

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_2 = \tfrac{1}{2}, \quad c_3 = \tfrac{1}{3}, \quad c_4 = \tfrac{1}{6}, \quad c_5 = \tfrac{7}{60}, \ \ldots$$

Nach diesen Bemerkungen über die Bestimmung der stetigen Leibrente gehen wir über zu der gewöhnlichen vom Alter $a$ an beginnenden Leibrente $R_a$, deren Kaufwert

$$R_a = \frac{S_a - S_\tau}{\delta_a}$$

1) Vergl. meinen Aufsatz im Crelleschen Journal Bd. 130, S. 64.

2) Vergl. Crelles Journal, Bd. 128, S. 218.

lautet. Wendet man die Maclaurinsche Summenformel an, um den Zähler, d. h.

$$\sum_{a}^{\tau-1} \varrho^{n} e^{-\gamma c^{n}}$$

zu ermitteln, so gelangt man nach ziemlich umständlichen Betrachtungen zur näherungsweisen Abschätzung der Differenz $R_a - \bar{R}_a$, welche auf sechs bis sieben Stellen genau ist:

$$\begin{aligned} R_a - \bar{R}_a = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\varrho^{\tau-a} e^{-\gamma(c^{\tau}-c^{a})} + \tfrac{1}{12}(\gamma \log c \cdot c^{a} - \log \varrho) \\ - \tfrac{1}{12}(\gamma \log c \cdot c^{\tau} - \log \varrho)\varrho^{\tau-a} e^{-\gamma(c^{\tau}-c^{a})} \\ + \tfrac{1}{720}\big[(\gamma \log c \cdot c^{a} - \log \varrho)^{3} - 3(\gamma \log c \cdot c^{a} - \log \varrho)\gamma c^{a} \log^{2} c \\ + \gamma c^{a} \log^{3} c\big]. \end{aligned}$$

Sie verdient jedoch wenig Beachtung, indem die oben mitgeteilten Ausdrücke für $R_a$ und $\bar{R}_a$ diese Größe mit viel höherer Genauigkeit zu bestimmen gestatten.

Freiburg (Schweiz), den 5. Juli 1905.

---

# Die Gewölbetheorie im Lichte der Methode der kleinsten Produkte.

Von S. Wellisch in Wien.

Bezeichnet in einem Gewölbe von einem Meter Breite und rechteckigem Querschnitte

$2s$ die Bogenlänge,
$\mathfrak{M}$ das Scheitelmoment,
$\mathfrak{H}$ den Horizontalschub,
$F_0 F_1 F_2$ ... die Flächen der Querschnitte 0, 1, 2, 3, ... beziehungsweise deren Höhen,
$M_0 M_1 M_2$ ... die Biegungsmomente
$P_0 P_1 P_2$ ... die Normalpressungen
$J_0 J_1 J_2$ ... die Trägheitsmomente
$B_0 B_1 B_2$ ... die Belastungen
} in bezug auf die einzelnen Querschnitte
$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2$ ... die Neigungswinkel der Querschnitte mit der Vertikalen
$a_0 a_1 a_2$ ... die Hebelarme des Horizontalschubes und
$b_0 b_1 b_2$ ... die von der Belastung herrührenden statischen Momente für die einzelnen Querschnitte,

so sind die Biegungsmomente und Normalpressungen, ausgedrückt in Funktionen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$:

$$(1)\quad \begin{cases} M_0 = \mathfrak{M} - a_0\mathfrak{H} + b_0 \\ M_1 = \mathfrak{M} - a_1\mathfrak{H} + b_1 \\ M_2 = \mathfrak{M} - a_2\mathfrak{H} + b_2 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} P_0 = \cos\alpha_0 \cdot \mathfrak{H} + \sin\alpha_0 \cdot B_0 \\ P_1 = \cos\alpha_1 \cdot \mathfrak{H} + \sin\alpha_1 \cdot B_1 \\ P_2 = \cos\alpha_2 \cdot \mathfrak{H} + \sin\alpha_2 \cdot B_2 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

oder wenn

$$\begin{array}{lcl} \cos\alpha_0 = a_0' & \text{und} & \sin\alpha_0 \cdot B_0 = b_0' \\ \cos\alpha_1 = a_1' & & \sin\alpha_1 \cdot B_1 = b_1' \\ \cos\alpha_2 = a_2' & & \sin\alpha_2 \cdot B_2 = b_2' \\ \cdots & & \cdots \end{array}$$

gesetzt wird, in allgemeiner Form:

$$M = \mathfrak{M} - a\mathfrak{H} + b$$
$$P = \quad a'\mathfrak{H} + b'.$$

Es lautet bei Vernachlässigung der Schubkräfte die zur Berechnung der beiden Unbekannten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ dienende Minimumsbedingung:

$$(3)\quad \int_0^s \frac{M^2}{J} ds + \int_0^s \frac{P^2}{F} ds = \min;$$

die Quotienten $\frac{M}{P} = v$ stellen die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten dar, und es berechnen sich die Kantenpressungen mit Hilfe der Formel:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 \pm \frac{6v}{F}\right),$$

worin das obere Zeichen für die innere Leibung, das untere Zeichen für den Gewölberücken gilt.

Unter gegebenen Belastungsverhältnissen tritt die günstigste Materialbeanspruchung dann ein, wenn die Form und Dimensionierung des Gewölbes so gewählt ist, daß $\sigma_i$ für die innere Leibung und $\sigma_a$ für die äußere Leibung einander gleich werden. Es trifft dies dann zu, wenn für jeden Querschnitt $v = 0$ ist, d. h. wenn die Mittellinie des Druckes mit der Gewölbeachse zusammenfällt. Da in diesem idealen Falle die Normalpressungen in den Schwerpunkten der Querschnitte, also ohne

einen Hebelarm angreifen, so kann in keinem Querschnitte ein Biegungsmoment auftreten, sodaß für jeden beliebigen Querschnitt die statische Beziehung besteht:

$$\mathfrak{M} - a\mathfrak{H} + b = 0.$$

Für ein zu konstruierendes Gewölbe kann das Pfeilverhältnis, sowie das Verhältnis der Scheitelstärke zur Kämpferstärke durch wiederholtes Probieren den dem idealen Falle entsprechenden Verhältnissen beliebig nahe gebracht werden; da man aber in der Praxis bei diesen umständlichen und zeitraubenden Versuchen gewöhnlich mit einer annähernden Erreichung des idealen Falles sich begnügt, so wird die Mittellinie des Druckes je nach dem Grade dieser Annäherung mehr oder weniger von der Gewölbeachse abweichen, und es werden sich in den einzelnen Querschnitten Biegungsmomente einstellen, die wohl selten einen beträchtlichen, im allgemeinen aber einen von Null verschiedenen Wert erlangen werden. Hierbei wird sich nach dem „Prinzip des kleinsten Widerstandes" im Zustande des Gleichgewichtes die Drucklinie der Gewölbeachse so nahe als möglich anschmiegen, *sodaß die Biegungsmomente in ihrer Gesamtheit zu einem Minimum werden.* Man kann daher zur Berechnung der beiden Unbekannten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ aus der überschüssigen Anzahl von Bedingungsgleichungen (1) bei konstantem Bogenquerschnitt ohne weiteres die „Methode der kleinsten Quadrate" heranziehen.

Hat man aber bei *konstantem* Querschnitte einfach die Summe der Quadrate der Momente zu einem Minimum zu machen, so ist bei *variablem* Querschnitte vorerst die Reduktion auf eine einheitliche Querschnittsfläche vorzunehmen, was bei Betrachtung einer *unendlichen* Anzahl von Querschnitten theoretisch dadurch geschieht, daß die Quadrate der statischen Momente durch die entsprechenden Trägheitsmomente dividiert werden. Da aber in der Praxis die Unterteilung des zu untersuchenden Gewölbeschenkels in eine *endliche* Anzahl von Abschnitten erfolgt, so hat man nicht die reinen reziproken Werte der Trägheitsmomente, sondern in Gemäßheit der Simpsonschen Näherungsformel die mit dem Koeffizienten $c$ der Simpsonschen Regel multiplizierten reziproken Werte der Trägheitsmomente $J$ zu nehmen und diese wie gewöhnliche Gewichte $p$ zu behandeln. Während es sohin bei konstanter Bogenstärke genügt, die einfache Summe der Quadrate der Biegungsmomente zu einem Minimum zu machen, ist bei veränderlicher Bogenstärke die Summe der mit bestimmten Gewichtszahlen $p = \frac{c}{J}$ multiplizierten Quadrate dieser Momente auf ein kleinstes Maß zu bringen.

Wird allgemein die Summe der mit den Reduktionsgewichten $\frac{c}{J}$ multiplizierten Quadrate der Biegungsmomente (1), nämlich

$$\left[\frac{c}{J} MM\right] = \left[\frac{c}{J} (\mathfrak{M} - a\mathfrak{H} + b)^2\right]$$

nach den beiden Unbekannten differenziert, und werden beide Differentialquotienten gleich Null gesetzt, so erhält man die Normalgleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \left[\frac{c}{J} M\right] = \left[\frac{c}{J}\right]\mathfrak{M} - \left[\frac{ac}{J}\right]\mathfrak{H} + \left[\frac{bc}{J}\right] = 0 \\ \left[\frac{ac}{J} M\right] = \left[\frac{ac}{J}\right]\mathfrak{M} - \left[\frac{aac}{J}\right]\mathfrak{H} + \left[\frac{abc}{J}\right] = 0 \end{cases}$$

woraus die Unbekannten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ durch Eliminieren sich berechnen lassen.

Sollen zur Bestimmung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ auch die Normalpressungen Berücksichtigung finden, so hat man die Minimumsbedingung mit Zuziehung der Bedingungsgleichungen (2), sowie der Reduktionsfaktoren $p = \frac{c}{F}$ entsprechend zu ergänzen und erhält auf diese Weise als gleichwertig mit (3):

$$\left[\frac{c}{J} MM\right] + \left[\frac{c}{F} PP\right] = \min.$$

Da die Gleichungen (2) die Unbekannte $\mathfrak{M}$ nicht enthalten, so erleidet nur die zweite Gleichung von (4) eine Abänderung, sodaß zur Bestimmung der beiden Unbekannten die Normalgleichungen sich ergeben:

$$(5)\quad \begin{cases} \left[\frac{c}{J}\right]\mathfrak{M} - \left[\frac{ac}{J}\right]\mathfrak{H} + \left[\frac{bc}{J}\right] = 0 \\ \left[\frac{ac}{J}\right]\mathfrak{M} - \left[\frac{aac}{J} + \frac{a'a'c}{F}\right]\mathfrak{H} + \left[\frac{abc}{J} - \frac{a'b'c}{F}\right] = 0. \end{cases}$$

Diese Normalgleichungen gehen aber auch unmittelbar hervor aus den von Castigliano aufgestellten Sätzen von den Differentialquotienten der Arbeit, womit dargetan ist, daß das „Prinzip der kleinsten Arbeit" oder das *mechanische Minimumsprinzip* im engsten Zusammenhange steht mit dem *geometrischen Minimumsprinzip* des Ausgleichungsproblems, daß somit für die geometrische Auffassung von Naturvorgängen den Fundamentalregeln der Methode der kleinsten Quadrate eine allgemeine Bedeutung zuzusprechen ist.

Die geschichtliche Entwicklung des „Drucklinienproblems", auf das Coulomb im Jahre 1773 zum ersten Male aufmerksam machte, hat nun folgenden Verlauf genommen:

Moseley bezeichnet (1837) in einem stabilen Gewölbe unter allen statisch möglichen Stützlinien diejenige als die tatsächlich eintretende, welche den kleinsten Horizontalschub in der Scheitelfuge erzeugt.

Hagen behauptet (1844), daß bei der günstigsten Beanspruchung diejenige Stützlinie sich einstellt, bei welcher an allen gefährlichen Stellen die Vertikalprojektion ihres kleinsten Abstandes von der inneren oder äußeren Leibung die gleiche wird.

Culmann findet (1866) diejenige Drucklinie als die wirkliche, welche sich der Gewölbeachse in der Art am meisten nähert, daß der Druck in den am stärksten beanspruchten Fugenkanten ein Minimum wird.

Winkler erklärt (1867) bei konstanter Gewölbedicke diejenige Stützlinie nahezu als die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Mittellinie ein Minimum ist.

Föppl bezeichnet (1880) den Winklerschen Satz — abgesehen von den zu seiner Beweisführung erforderlichen Vernachlässigungen, die ihn bei sehr flachen und verhältnismäßig starken Gewölben nicht anwendbar erscheinen lassen — als den interessantesten und elegantesten Satz, der bisher über das Gleichgewicht der Gewölbe aufgestellt wurde.

Tolkmitt faßt (1899) die Untersuchungen dahin zusammen, daß diejenige Stützlinie, welche die Mittellinie des Gewölbes nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleicht, um so richtiger erscheint, je größer das Pfeilverhältnis und je kleiner die Dicke des Gewölbes ist.

Das Endergebnis unserer eigenen Betrachtungen kann in folgendem formuliert werden:

*In einem Gewölbe von konstantem Querschnitt nimmt die Stützlinie zur Bogenachse jene Lage ein, welche sie im Sinne der einfachen Methode der kleinsten Quadrate ausgleicht, in einem Gewölbe von variablem Querschnitt folgt sie jedoch den verallgemeinerten Regeln der erweiterten Methode der kleinsten Quadrate oder der sogenannten „Methode der kleinsten Produkte“*, wie sie vom Verfasser in dem Buche: „Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme“, Wien 1904, ausführlich behandelt worden ist. (Siehe auch des Verfassers Abhandlungen: „Der Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Produkte“ in der „Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen“, Wien 1905 und „Über das natürliche Erhaltungsprinzip“ in dieser Zeitschrift Bd. 52, 1905, S. 202.)

Wien, im Oktober 1905.

# Über die kubische Dilatation und ihre Beziehung zur Beanspruchung isotroper elastischer Körper.

Von Dr. R. Girtler in Wien.

Die kubische Dilation $\nu$ befolgt, wie Lamé in seinen „Leçons sur la théorie de l'élasticité“ zuerst nachgewiesen hat, die Laplacesche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = \nabla^2 \nu = 0 \tag{1}$$

unter den Voraussetzungen, daß erstens ein isotroper Körper vorliegt, zweitens die auf ihn wirkenden Massenkräfte dem Newtonschen Gravitationsgesetze folgen und schließlich elastisches Gleichgewicht herrscht. Die Oberflächenkräfte können also beliebiger Art und in beliebiger Weise über die Oberfläche des Körpers verteilt sein. Sind $u$, $v$, $w$ die Komponenten der Verrückung eines beliebig gewählten Punktes unseres Körpers für die Längeneinheit parallel zu den Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystemes, so wird, wenn dieselben samt ihren ersten Ableitungen endliche und stetige Funktionen der Koordinaten $x$, $y$, $z$ des betrachteten Punktes sind, auch $\nu$ eine samt ihren ersten Ableitungen endliche und stetige Funktion bedeuten, denn

$$\nu = u + v + w;$$

trifft letzteres zu, so muß unter den Voraussetzungen der Gültigkeit der Gleichung (1) folgender Satz bestehen:

*Das Extrem der kubischen Dilatation kann bei einer beliebigen Angriffsweise der Oberflächenkräfte nur an der Oberfläche des Körpers auftreten.*

Um das zu beweisen, bedürfen wir zweier Sätze aus der Potentialtheorie, in der ja die Laplacesche Gleichung auch eine bedeutsame Rolle spielt; denn sie ist es, die auch für das Potential von Kräften zwischen ponderablen, magnetischen und elektrischen Massen, für das Geschwindigkeitspotential bei stationär strömenden Flüssigkeiten, für die Temperaturverteilung bei einem stationären Wärmezustand eines isotropen Körpers und für die Verteilung galvanischer Ströme in einem Leiter charakteristisch ist.

Die fraglichen zwei Sätze lauten:

1. Jede Funktion $\varphi$, welche der Laplaceschen Gleichung genügt und in einem bestimmten Raumbereiche samt ihren ersten Ableitungen

endlich und stetig ist, kann als das Potential einer auf der Begrenzungsfläche dieses Raumes liegenden, nach einem bestimmten Gesetze verteilten unendlich dünnen Schichte wägbarer Masse vorgestellt werden; die Verteilung dieser unendlich dünnen Schichte ist auf der Oberfläche nur auf eine einzige Weise möglich, wenn die Werte $\varphi$ für die Oberfläche gegeben sind.[1])

2. Das Potential von Massen kann nur innerhalb dieser Massen einen extremen Wert annehmen.[1])

Die kubische Dilatation $v$ kann nun als solche Funktion $\varphi$ betrachtet werden, wie sie im Satz 1 erwähnt wird; für $v$ sind nämlich alle Voraussetzungen erfüllt wie sie dieser Satz fordert, denn wir haben eingangs dieselben Beschränkungen für $v$ namhaft gemacht, die für $\varphi$ verlangt werden. Es ist nur noch notwendig zu erwähnen, daß die der Funktion $v$ entsprechende Massenverteilung an der Oberfläche des in Betracht gezogenen Körpers deswegen nur auf eine Art möglich ist, weil jedes elastische Problem bei gegebenen Massen- und Oberflächenkräften eindeutige Lösungen für die Dilatationen $u$, $v$, $w$ eines jeden Punktes besitzt; es sind also die linearen Dilatationen, somit auch die kubischen Dilatationen an der Oberfläche des Körpers in jedem Punkte eindeutig gegeben.

Nach Satz 2 kann das Extrem der Funktion $\varphi$ nur innerhalb der Massen, das ist in unserem Falle nur an der Oberfläche stattfinden. Daher kann auch die kubische Dilatation nur an der Oberfläche extreme Werte erlangen. Damit ist der vorangestellte Satz bewiesen.

Was also die Oberflächenkräfte für Größen und Angriffspunkte besitzen mögen, stets tritt im Gleichgewichtszustande bei einem isotropen Körper das Maximum der kubischen Dilatation an der Oberfläche auf, wenn nur $u$, $v$, $w$ samt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig sind und die Massenkräfte ein Potential haben. Die beiden letzten Bedingungen sind aber insbesondere bei technischen Problemen immer erfüllt, denn bei ihnen ist die Massenkraft für gewöhnlich die Schwerkraft. Es tritt also wenigstens theoretisch bei technischen Konstruktionen ein Maximum von $v$ stets an der Oberfläche auf.

Sind die den Körper angreifenden Kräfte gegeben, so kann man sich die einzelnen Angriffspunkte der Oberflächenkräfte solange auf der Oberfläche gegenseitig verschoben denken, bis die für die Dimensionierung höchst wichtige sogenannte ungünstigste Laststellung eintritt, das ist jene, für die im Bereich des Körpers das Maximum der

1) Mathieu, Theorie des Potentiales.

Beanspruchung sich zeigt. Als Maß dieser Beanspruchung gilt in Deutschland jetzt allgemein die größte Hauptdilatation $\lambda_1$, obwohl durch Experimente festgestellt wurde, daß diese Anschauung falsch ist. Man könnte durch den Satz vom Maximum der kubischen Dilatation verführt werden, zu glauben, daß das Maßgebende für die Beurteilung der Bruchgefahr die kubische Dilatation selbst sei, besonders weil der Bruch des Materiales bei den Festigkeitsversuchen *zuerst* an der Oberfläche aufzutreten und sich erst später in das Innere des Körpers fortzupflanzen *scheint*. Es gibt Belastungsfälle (z. B. Fall der reinen Biegung), bei welchen der Bruch wirklich zuerst an der Oberfläche beginnt. Wenn man das aber bei einfachen Druckproben zu beobachten glaubt, so liegt der Grund darin, daß eine einfache Druckbelastung, derzufolge alle Spannungen normal zum Querschnitt gleich groß sind und der Bruch daher längs eines ganzen Querschnittes auf einmal auftreten sollte, schwer zu verwirklichen ist Die Vermutung, daß die kubische Dilatation allein schon zur Beurteilung der Bruchgefahr hinreiche, wird aber völlig dadurch hinfällig, daß nach ihr bei einer reinen Schubbeanspruchung, bei welcher die zwei auftretenden Hauptdilatationen entgegengesetzt gleich sind, bei keiner noch so großen Belastung ein Bruch eintreten könnte, da die kubische Dilatation in diesem Falle im ganzen Bereiche des Körpers Null ist. Als allgemeines Kriterium der Beanspruchung ist die kubische Dilatation also nicht zu brauchen. In neuerer Zeit glaubt man aus Versuchen den Schluß ziehen zu dürfen, daß die Summe aus der größten und kleinsten, also von *zwei* Hauptdilatationen $\lambda_1 + \lambda_3$, als dieses Kriterium zu betrachten sei. Ich bin dem entgegen der Ansicht, daß die kubische Dilatation in dem mathematischen Ausdrucke für die Beanspruchung enthalten sein sollte, weil in ihr erstens alle *drei* Hauptdilatationen ($\nu = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$) vertreten sind, und weil zweitens jene Belastungsfälle, bei welchen der Bruch auch theoretisch an der Oberfläche beginnen muß (z. B. zusammengesetzte Festigkeit aus Biegung und Zug) und die Beanspruchung wirklich dort an der Oberfläche ihren Höchstwert besitzt, wo die kubische Dilatation ihn hat, auf ein allgemeines Gesetz hinzuweisen scheinen, in welchem außer der kubischen Dilatation auch noch *andere* von der Deformation abhängige Glieder eine Rolle spielen. Ich halte daher unter allen bisher gemachten Annahmen die von E. Beltrami[1]), welcher das Potential der elastischen Kräfte für die Volumeinheit in einem Punkt als dieses Ge-

---

1) Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici, Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII (1885), p. 704—714; vgl. auch Beiblätter zu den Annalen der Physik, Jahrg. 1885, S. 555.

setz in Vorschlag brachte, für die richtigste. Das Potential der elastischen Kräfte kann in der Form

$$f = -\varkappa(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Theta\nu^2) \tag{2}$$

geschrieben werden, worin $\varkappa$, $\Theta$ die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ die Hauptdilatationen vorstellen. In der Gleichung (2) kommt die kubische Dilatation neben den oben erwähnten anderen Gliedern $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ vor; Beltramis Ansicht hat aber außerdem den Vorzug, daß man ihr deswegen von vornherein leicht beistimmen wird, weil es sehr glaubhaft ist zu sagen, ein Körperelement ist umso mehr angestrengt, je mehr Arbeit verbraucht wurde, um es zu deformieren.

Zum Schlusse möchte ich noch hervorheben, daß der Satz über das Maximum der kubischen Dilatation Analoga auf anderen Gebieten der Physik besitzt. So kann man sagen, daß bei einer stationären Wärmeströmung in einem isotropen Körper die Temperatur nur an der Oberfläche des Körpers extreme Werte haben kann, wenn sie samt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig im Bereiche des Körpers ist.

Wien, am 2. Oktober 1905.

# Kleinere Mitteilungen.

## Logarithmisches Papier.

Für Zeichenpapier, das mit einem Liniennetz logarithmischer Einteilung bedruckt ist, wurde in dieser Zeitschrift Bd. 46 (1901), S. 254 eine belgische Bezugsquelle angegeben. Neuerdings habe ich durch die Freundlichkeit des Herrn F. Paschen in Tübingen ein ähnliches, aus England stammendes Papier kennen gelernt, das die Bezeichnung „Human's Patent Logarithmic Coordinate Sheets“ führt und von der Firma S. C. & P. Harding, 2 & 3 Hind Court, Fleet Street, London, bezogen werden kann. Die Längeneinheit beträgt 12,5 cm, wie bei den oberen Skalen eines gewöhnlichen Rechenschiebers französischer oder deutscher Herkunft. Rechts auf dem Rande stehen erläuternde Bemerkungen über den Gebrauch des Papiers. Der Preis ist auffallend hoch, *M* 2,60 für den Bogen (nach Mitteilung von Herrn Paschen). Warum entschließt sich keine deutsche Firma, logarithmisches Papier in den Handel zu bringen? An Gelegenheit zu seiner Verwendung würde es dem Ingenieur, dem Physiker, dem Mathematiker nicht fehlen. R. Mehmke.

## Anfrage.

**P. S., H.** Wie lassen sich bei einer graphisch gegebenen Funktion aus der darstellenden Kurve graphisch (oder mechanisch) die ersten Koeffizienten der *Entwicklung nach Zylinderfunktionen* bestimmen?

# Bücherschau.

**J. F. Encke, Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — P. A. Hansen, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen.** Herausgegeben von J. Bauschinger. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 141. kl. 8°. 162 S. Leipzig 1903. Pr. 2,50 M.

In diesem Buche setzt Herr Bauschinger die von ihm mit J. H. Lamberts Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen (vgl. diese Ztschr. Bd. 49, S. 388) begonnene Herausgabe der für die Bahnbestimmung der Himmelskörper wichtigen Quellenschriften fort und dehnt sie auf zwei Arbeiten aus, die eine neue Darstellung und Herleitung der Gaußschen Methode versuchen und namentlich nach der praktischen rechnerischen Seite hin Verbesserungen einführen. Insbesondere gilt letztere Bemerkung von der Enckeschen Abhandlung, die zuerst 1851 im Berliner Jahrbuch für 1854 erschien und das Resultat aller Untersuchungen und Erfahrungen Enckes

bietet. Weniger durch enge Anlehnung an die Praxis als vielmehr durch meisterhafte Analyse zeichnet sich die Schrift Hansens [in den Verhdl. d. K. S. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl., Bd. 15 (1863)] aus. Eine vergleichende Würdigung läßt Bauschinger beiden Arbeiten in den wertvollen „Anmerkungen" angedeihen. Insbesondere aber wird es der Astronom begrüßen, daß der Herausgeber in einem „Anhang" das aus Tietjens Aufsatz im Berliner Jahrbuch für 1879 hervorgegangene übersichtliche und rechenflüchtige Formelschema zur Bahnbestimmung mitteilt, das man „jetzt als das sicherste und kaum mehr verbesserungsfähige wird anerkennen müssen."

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

---

**G. W. Littlehales, A new and abridged method of finding the locus of geographical position and the compass error.** Phil. soc. of Washington, Bull., Vol. 14. 8°. 14 S. u. 3 Tafeln. Washington 1903.

Die Ortsbestimmungen auf See, die heutigen Tages vielfach nach der von Marcq St. Hilaire ausgearbeiteten Höhenmethode ausgewertet werden, erfordern die für den Seemann immerhin lästige Berechnung der Gestirnshöhe aus geographischer Breite, Stundenwinkel und Deklination. Zur Umgehung dieser Rechnung sind schon zahlreiche Vorschläge aufgetaucht, die teils eine Tabulierung anstreben, teils das Problem graphisch lösen wollen. Auf graphische Tafeln läuft auch der hier von Littlehales gemachte Vorschlag hinaus, der übrigens einige Ähnlichkeit mit dem 1873 von C. Braun konstruierten „Trigonometer" aufweist (vgl. Berichte von dem erzbischöflichen Haynaldschen Observat. zu Kalocsa, p. 142, Münster i. W. 1886). Littlehales verlangt einfach die Ablesung der gesuchten Zenitdistanz und des Azimutes in einer stereographischen Projektion der Himmelssphäre. Zur Erzielung der erforderlichen Genauigkeit muß er indes die Karte so groß wählen, daß er sie in 340 Blätter zu zerlegen hätte, um auf ein handliches Format zu kommen. Für besonders zweckmäßig hält der Verf. sein Verfahren zur raschen Berechnung der von Wirtz behandelten „kimmfreien" Standlinie (A. d. Arch. d. D. Seewarte, 25. Jahrg., 1902). Die beigegebenen Probetafeln legen indes nicht den Gedanken nahe, daß sich mit ihrer Hilfe die verlangten Höhen schnell und sicher entnehmen ließen.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

---

# Neue Bücher.[1]

### Astronomie und Geodäsie.

1. Gauss, F. G., Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst. 3. Aufl. (In 9 Heften.) 1. Heft. Halle, Strien. Subskr.-Pr. M. 3.50.
2. Hegemann, E., Lehrbuch der Landesvermessung. Berlin, Parey. geb. in Leinw. M. 12.
3. Tapla, Theodor, Grundzüge der niederen Geodäsie. III. Kartierung. Leipzig und Wien, Deuticke. M. 3.50.

S. auch Nr. 4.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1906.

## Geschichte.

4. Dreyer, J. L. E., History of the planetary systems from Thales to Kepler. Cambridge, University Press. 10 s. 6 d.
5. Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Hrsg. und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Ernst Gerland. (Abh. zur Gesch. der mathem. Wiss., XXI. Heft.) Leipzig, Teubner. M. 10.
6. Müller, Felix, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftl. Leben nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. (Abh. zur Gesch. der mathem. Wiss. XX. Heft, 1. Stück.) Leipzig 1905, Teubner. M. 2.80.

## Physik.

7. Aalst, J. W. van, Theoretische beschouwingen over het warmteproces in stoomturbines, petroleum- en gasmotoren en verkoelings-machines, met korte beschrijving van enkele soorten dier machines. Helder, de Boer Jr. Fl. 1.50.
8. Chwolson, O. D., Traité de physique. Traduit sur les éditions russe et allemande par E. Davaux. Edition revue et considérablement augmentée par l'auteur, suivie de notes sur la physique théorique par E. et F. Cosserat. T. I, fasc. I et T. II, fasc. I. (Aura 4 volumes.) Paris 1905. Frs. 22.
9. Donati, L., Lezioni di fisica matematica, raccolte a cura di R. Bonola e R. Viti. Bologna. L. 10.
10. Garbasso, A., Vorlesungen über theoretische Spektroskopie. Leipzig, Barth. M. 7.—; geb. in Leinw. M. 8.
11. Lorentz, H. A., Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche bei akadem. Vorlesungen. Nach der 4., von H. A. Lorentz und L. H. Siertsema bearb. Aufl. und unter Mitwirkung des Verf. aus dem Holländischen übers. v. G. Siebert. 1. Bd. Leipzig, Barth. M. 8; geb. in Leinw. M. 9.
12. Lorentz, H. A., Ergebnisse und Probleme der Elektronentheorie. Vortrag. 2. durchgesehene Aufl. Berlin, Springer. M. 1.50.
13. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie in 4 Bänden. 10. umgearb. und vermehrte Aufl. hrsg. von Leop. Pfaundler. I. Bd. Mechanik und Akustik. 2. Abtlg. (Schluß des I. Bandes.) Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. M. 3.50.
14. Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik. (Teubners Sammlung Bd. XIX.) Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. M. 16.

S. auch Nr. 5.

## Statistik und Versicherungsmathematik.

15. Broggi, Ugo, Matematica attuariale. Teoria statistica della mortalità. Matematica delle assicurazioni sulla vita. (Manuali Hoepli.) Milano, Hoepli. L. 3.50.

## Tafeln.

16. Henselin, Adolf, Rechentafel. 2. Stereotypauflage. Berlin, Regenhardt. geb. M. 6.

## Verschiedenes.

17. Mellor, I. W., Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandte Wissensgebiete. In freier Bearbeitung der 2. englischen Ausgabe hrsg. von Alfred Wogrinz und Arthur Szarvassi. Berlin, Springer. M. 8.

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Broggi, Ugo, Matematica attuariale, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 15.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 1. Bd. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. Leipzig, Teubner. geb. M. 12.

Doehlemann, Karl, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. 3., vermehrte und verb. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 72.) Leipzig 1905, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Gast, Paul, Ein Beitrag zur Polhöhenbestimmung. (Sonderabdruck aus der Zeitschrift f. Vermessungswesen Bd. 35, 1906.)

Gerland, E., Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen u. technischen Inhalts, s. N. B. 5.

Goldschmidt, Ludwig, Baumanns Anti-Kant. Eine Widerlegung. Gotha, Thienemann. M. 2.80.

Hagen, Johann G., Synopsis der höheren Mathematik. 3. Bd., Differential- und Integralrechnung. Lfgn. 5, 6 u. 7 (Schluß). Berlin, 1900/1905.

Hardy, G. H., The integration of functions of a single variable. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics Nr. 2.) Cambridge 1905, University Press. 2 s. 6 d.

Henselin, A., Rechentafel, s. N. B. 16.

Issaly, l'Abbé, Principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces. Paris 1902, Hermann. Frs. 4.

Laisant, C. A., Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance. Genève, Georg & Co.

Littlehales, G. W., The progress of science as exemplified in terrestrial magnetism. Annual presidential address. (Phil. Soc. Washington Bull., vol. XIV.) Washington 1905.

Mahler, G., Ebene Geometrie. 4. verbesserte Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 41.) Leipzig 1905, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Mayer, J. W. u. Czap, E., Die praktische Wartung der Dampfkessel und Dampfmaschinen. Ein Lehrbuch für Dampfkessel- und Dampfmaschinenwärter, sowie für Fabrikbeamte ohne technische Vorbildung. 3. sehr vermehrte und erweiterte Aufl. Leipzig, Teubner. M. 3.50.

Mellor, J. W., Höhere Mathematik, s. N. B. 17.

Müller, F., Karl Schellbach, s. N. B. 6.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie, I. Bd., 2. Abtlg., s. N. B. 13.

Osgood, W, F., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. 1. Bd., 1. Hälfte. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. 7.

Peale, Albert C., Titian R. Peale 1800—1885. Read before the Phil. Soc. Washington March 30, 1901. (Phil. Soc. Wash. Bull., vol. XIV.) Washington 1905.

Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik, s. N. B. 14.

Tapla, Th., Grundzüge der niederen Geodäsie, III., s. N. B. 3.

# Abhandlungsregister 1904—1905.

Von Ernst Wölffing in Stuttgart.

(Die Zahlen über 2604 beziehen sich auf das im nächsten Heft erscheinende Technische Abhandlungsregister 1903—1904).

(Fortsetzung.)

### Lumineszenz.

**1069.** *J. Guinchant*. Sur les phénomènes de luminescence. J.P. (4) 4. 413.

**1070.** *C L. Nichols* and *E. Merritt*. Studies in luminescence. II. P.R. 18. 403; 19. 18; 382.

**1071.** *M. Trautz*. Über neue Lumineszenzerscheinungen. Z.E. 10. 593.

Siehe auch 854; 855.

### Phosphoreszenz.

Siehe 3632.

### Fluoreszenz.

**1072.** *F. Kehrmann*. Über Fluoreszenz. C.B. 37. 3581.

**1073.** *C. Camichel*. Sur la fluorescence. C.R. 140. 139; 141..185; 249.

**1074.** *E. L. Nichols*. Die neuere Forschung über die Physik der Fluoreszenz. J.R.E. 2. 149.

**1075.** *L. Puccianti*. Sulla fluorescenza del vapore di sodio. R.A.L.R. 13. B. 433.

**1076.** *H. Kauffmann* und *A. Beißwenger*. Über Fluoreszenz Untersuchungen über das Ringsystem des Benzols. C.B. 37. 2612.

### Irradiation.

**1077.** *A. Guébhard*. Sur l'irradiation tangentielle. C.R. 140. 1446.

### Interferenz.

**1078.** *R. W. Wood*. Some new cases of interference and diffraction. P.P.S. L. 19. 86.

**1079.** *P. Staeckel*. Über ein in der Optik auftretendes bestimmtes Integral. A.Gr. (3) 8. 245.

**1080.** *E. Gehrcke*. Über Interferenzpunkte. V.D.P.G. 7. 236.

**1081.** *R. W. Wood*. The achromatization of approximately monochromatic interference fringes by a highly dispersive medium and the consequent in a case in the allowable path difference. P.M. (6) 8. 324. — *Lord Rayleigh*. 330.

**1082.** *W. Feußner*. Über ein Verfahren zur Dickenbestimmung keilförmiger Schichten durch Interferenzstreifen. S.G.M. 1903. 76.

**1083.** *M. Laue*. Die Krümmung der Interferenzstreifen beim Stufengitter. P.Z. 6. 283.

**1084.** *G. Sagnac*. Sur la propagation de la phase des vibrations et sur les interférences au voisinage d'une ligne focale. S.F.P. 216. 3.

Siehe auch 952; 2482.

### Diffraktion.

**1085.** *A. A. Michelson*. A reciprocal relation in diffraction. P.M. (6) 9. 506.

**1086.** *J. Kießling* und *E. Barkow*. Über die Entstehung von Beugungsringen in künstlich durch die Einwirkung elektrischer Kräfte erzeugtem Nebel. V.D. P.G. 7. 11.

**1087.** *J. A. Moore*. The loss of light by diffraction at a narrow slit. A.J.C. 20. 285.

**1088.** *F. H. Jackson*. On the diffraction of light produced by on opaque prism of finite angle. P.L.M.S. (2) 1. 393.

**1089.** *A. W. Porter.* On the diffraction images formed by a plane diffraction grating. P.M. (6) 8. 174.

**1090.** *A. E. Conrady.* An experimental proof of phase-reversal in diffraction spectra. J.R.M.S. 1905. Nr. 2.

**1091.** *F. Balsamo.* Su i fenomeni di diffrazione di alcuni corpi organizzati in rapporto alle esperienze di Abbe. B.S. N.N. 17.

**1092.** *L. Pfaundler.* Über die dunklen Streifen, welche sich auf den nach Lippmanns Verfahren hergestellten Photographien sich überdeckender Spektren zeigen. A.P.L. (4) 15. 371.

**1093.** *H. Haga, P. G. Tiddens* et *C. H. Wind.* La diffraction des rayons Roentgen. A.N. (2) 8. 211.

Siehe auch 1050; 1098; 2507; 3637; 3649.

### Polarisation des Lichtes.

**1094.** *F. Záviška* Über die Polarisation von Grenzlinien der Totalreflexion. (tschech.) M A.T.P. 1903. Nr. 15.

**1095.** *F. Braun.* Über mathematische Gitterpolarisation, insbesondere ihre Anwendung zur Deutung mikroskopischer Präparate. A.P.L. (4) 16. 238.

**1096.** *W. Biernacki.* Analizator półcieniowy so zastosowaniu do badania światła spolaryzowanego eliptycznie. (Über einen Halbschattenanalysator und seine Anwendung bei der Untersuchung des elliptisch polarisierten Lichtes.) T.W. 16. 151.

Siehe auch 2489.

### Drehung der Polarisationsebene.

**1097.** *H. Dufet.* Recherches expérimentales sur l'existence de la polarisation rotatoire dans les cristaux biaxes. J.P. (4) 3. 757.

**1098.** *M. F. Mc Dowell.* Circular dichroism in natural rotatory solutions. P.R. 20. 163.

**1099.** *O. Schönrock.* Über den Einfluß der Beleuchtung auf die Angaben von Saccharimetern mit Keilkomplasation. A.P.L. (4) 14. 406.

**1100.** *E. Boske.* Quarzkeilkolorimeter. A.P.L. (4) 16. 406.

**1101.** *C. Winther.* Die Rotationsdispersion der spontan aktiven Körper Z.P.C. 41. 161.

**1102.** *C. S. Hudson.* Über die Multirotation des Milchzuckers. Z.P.C. 44. 487.

**1103.** *T. Gnesotto e G. Crestani.* Sui potere rotatorio specifico della nicotina sciolta in miscugli di acqua e di alcool etilico. N.C.P. (5) 8. 365.

Siehe auch 1110; 1160; 1161; 1164—66.

### Einfache Brechung.

Siehe 852; 853.

### Doppelbrechung.

**1104.** *D. B. Brace.* On double refraction in matter moving through the aether. P.M. (8) 7. 317.

**1105.** *O. Wiener.* Lamellare Doppelbrechung. P.Z. 5. 332.

**1106.** *F. Kaempf.* Größe und Ursache der Doppelbrechung in Kundtschen Spiegeln und Erzeugung von Doppelbrechung in Metallspiegeln durch Zug. A.P.L. (4) 16. 308.

**1107.** *J. Reiff.* Die Herstellung doppelt brechender Körper aus isotropen Bestandteilen. D.M. 12. 137.

**1108.** *L. N. G. Filon.* On the variation with the wave-length of the double refraction in strained glass. P.C.P.S. 12. 313.

**1109.** *F. Záviška.* Verifikation der Fresnelschen Gesetzo der Doppelbrechung bei zweiachsigen Kristallen (tschech.). M.A.T.P. 1902. Nr. 26.

**1110.** *C. Kraft* et *C. Zakrzewski.* Une méthode pour déterminer les directions principales et les constantes optiques dans le cas de la biréfrigence combinée avec le pouvoir rotatoire. B.I.C. 1904. 508.

**1111.** *S. Zaremba.* Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène. B.I.C. 1903. 403.

**1112.** *L. Natanson.* Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides. J.P. (4) 4. 183.

**1113.** *L. Natanson.* Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides pouvant servir à la détermination de leur temps de relaxation. B.I.C. 1904. 1: 103. — *S. Zaremba* 97.

**1114.** *C. Zakrzewsky.* Sur la position des axes optques dans les liquides déformés. B.I.C. 1904. 50.

**1115.** *S. Zaremba.* Note sur la double réfraction accidentelle de la lumière dans les liquides. J.P. (4) 3. 606; 4. 514.

**1116.** *C. Chéneveau.* Sur les pouvoirs réfringents des corps dissous. Lois approchées. C.R. 138. 1578.

**1117.** *G. Quincke.* Doppelbrechung der Gallerte beim Aufquellen und Schrumpfen. A.P.L. (4) 14. 849; 15. 1.

**1118.** *J. James.* Die Abraham-Lemoinesche Methode zur Messung sehr kleiner Zeitintervalle und ihre Anwendung zur Bestimmung der Richtung und Geschwindigkeit der Entladung in Entladungsröhren. A.P.L. (4) 15. 954.

Siehe auch 473; 1034; 1143; 1144; 1161—63; 3148.

### Brechungsindex.

**1119.** *C. Chéneveau.* Sur l'indice de réfraction des solutions. C.R. 138. 1483; 139. 361.

**1120.** *Z. Zanini.* Sull' indice di rifrazione delle soluzioni. R.F.M. 6. A. 3: 118; 193; 501.

**1121.** *F. Heß.* Über das Brechungsvermögen von Mischungen zweier Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der beim Mischen eintretenden Volumänderung. A.A.W. 1905. 312.

**1122.** *H. Nakaoka.* Relation between the index of refraction and density. P. T.M. 2. 293.

**1123.** *P. Pantanelli.* Peso specifico e indice di refrazione del quarzo fuso. P.S.T.P. 14. 67.

**1124.** *J. Koch.* Bestimmung des Brechungsindexes des $H$, der $CO_2$ und des O im Ultrarot. A.P.L. (4) 17. 658.

Siehe auch 999; 1127; 1128; 1130; 2493.

### Thermooptik.

**1125.** *B. V. Bevan.* The temperature effect in the combination of Hydrogen and Chlorine under the influence of light. P.C.P.S. 12. 398.

**1126.** *U. Panichi.* Influenza della variazione della temperatura e più specialmente dei forti raffreddamenti sul comportamento ottico di alcuni minerali. A.L.M. (5) 4. 389.

**1127.** *L. de Ball.* On the influence of vapour pressure on refraction. M.N. A.S. 65. 750.

**1128.** *F. F. Martens* und *F. J. Micheli.* Über den Einfluß von Temperatur und Dichte auf Brechungsexponenten nach Beobachtungen an Flußspat. V.D.P.G. 6. 308.

**1129.** *R. Lucas.* Bemerkungen zu dem Gesetz der Helligkeitszunahme eines glühenden Körpers mit der Temperatur. P.Z. 6. 19

**1130.** *F. F. Martens* et *F. J. Micheli.* Influence de la température et de la dilatation sur les indices de réfraction d'après les observations sur le spath fluor et le quartz. A.S.G. (4) 19. 585.

**1131.** *F. Hasenöhrl.* Über die Reziprozität des Strahlungsganges in bewegten Körpern. Thermodynamische Ableitungen des Fresnelschen Fortführungskoeffizienten. S.A.W. 113. 493.

**1132.** *M. Iklé.* Optische Methoden zur Messung hoher Temperaturen. P.Z. 6. 450.

**1133.** *Le Bel.* Sur l'équilibre thermique. S.F.P. 229. 7.

Siehe auch 1403; 3611.

### Elektrooptik.

**1134.** *M. Reinganum.* Bemerkung zur Elektrooptik der Metalle. A.P.L. (4) 16. 958; 17. 196.

**1135.** *E. Hagen* and *H. Rubens.* On some relations between the optical and the electrical qualities of metals. P.M. (6) 7. 157.

**1136.** *H. Kochan.* Die lichtelektrischen Erscheinungen an Metallen in Elektrolyten. J.R.E. 2. 186.

**1137.** *R. Grošelj.* Einige Messungen betreffend die spezifische Jonengeschwindigkeit bei lichtelektrischen Entladungen. S.A.W. 113. 1131.

**1138.** *E. Goldstein.* Über elektrische Entladungserscheinungen und ihre Spektra. V.D.P.G. 8. 315.

**1139.** *H. Scholl.* Photoelektrische Erscheinungen an feuchtem Jodsilber. A. P.L. (4) 16. 193; 417.

**1140.** *E. R. v. Schweidler.* Zur Theorie des photoelektrischen Stromes. A.A.W. 1904. 253; S.A.W. 113. 1120.

**1141.** *K. Pribram.* Über das Leuchten verdünnter Gase im Teslafeld. S.A.W. 113. 439.

**1142.** *J. Stark.* Über die Entstehung der elektrischen Gasspektra. A.P.L. (4) 14. 506.

**1143.** *G. W. Elmén.* Über elektrische Doppelbrechung in Schwefelkohlenstoff bei niedrigem Potential. A.P.L. (4) 16. 350.

**1144.** *G. W. Elmén.* Electric double refraction in carbon disulphide at low potentials. P.R. 20. 54.

**1145.** *W. Voigt.* An effect of electrical vibrations in an optically active medium. R.B.A. 74. 466.

**1146.** *P. Drude.* Optische Eigenschaften und Elektronentheorie. A.P. L. (4) 14. 677. 936.

Siehe auch 1161; 1552; 1553; 3128; 3163; 3605.

### Elektrisches Licht.

**1147.** *C. D. Child.* The electric arc. P.R. 19. 117.

**1148.** *W. S. Weedon.* A contribution to the study of the electric arc. T.A. E.S. 5. 171.

**1149.** *H. T. Simon.* Über die Dynamik der Lichtbogenvorgänge und über Lichtbogenhysteresis. P.Z. 6. 297.

**1150.** *E. Rasch.* Gasentladungen und Lichtbögen mit glühenden Leitern 2. Klasse als Strombasis. P.Z. 5. 375.

Siehe auch 1157; 1600; 1607; 3021; 3601; 3633.

### Magnetoptik.

**1151.** *M. Otta.* Některe nové magnetooptické pokusy. (Einige neue magnetooptische Versuche.) C. 33. 146.

**1152.** *A. Sella.* Alla ricerca di un fenomeno ottico-magnetico. R.A.L.R. (5) 13B. 148.

**1153.** *F. Re.* I fenomeni magnetoottici Majorana. R.F.M. 5A. 534.

**1154.** *L. Houllevigne* et *H. Passa.* Propriétés magnéto-optiques du fer ionoplastique. C.R. 141. 29.

**1155.** *P. Zeemann.* Strahlung des Lichtes in magnetischem Felde. N.R. 20. 337.

**1156.** *C. D. Child.* The arc in a magnetic field. P.R. 20. 100.

**1157.** *E. Martin.* Wirkung magnetischer Querkräfte auf einen Gleichstromlichtbogen mit geradliniger Strombahn. V.D.P.G. 6. 199.

**1158.** *P. Zonta.* Su lo spettro emesso dai tubi di Geissler nel campo magnetico. N.C.P. (5) 7. 321.

**1159.** *J. J. Hallo.* La rotation magnétique du plan de polarisation dans le voisinage d'une bande d'absorption. *A.* N. (2) 10 148.

**1160.** *F. Agerer.* Über magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in Salzlösungen und Bestimmung der absoluten magnetooptischen Konstanten für Wasser. A.A.W. 1905. 142; S.A.W. 114. 803.

**1161.** *S. Kalinowski.* O dzialaniu nastepczem przy podwójnem zalamaniu światla w cieczach electryznie odksztalconych i przy magnetycznem skrecaniu plaszczyzny polaryzacyi w cieczach. (Über die Verzögerungserscheinung bei der elektrischen Doppelbrechung und bei der magnetischen Drehung der Polarisationsebene bei den Flüssigkeiten.) T.W. 16. 1.

**1162.** *J. Geest.* Über die Doppelbrechung von Na-Dampf im magnetischen Felde. P.Z. 6. 166.

**1163.** *J. Geest.* La double réfraction de la vapeur de sodium. A.N. (2) 10. 291.

**1164.** *R. W. Wood* and *H. W. Springsteen.* The magnetic rotation of sodium vapor. P.R. 21. 41.

**1165.** *P. Zeemann.* Dubbele breking in een magnetisch veld in the nabijheid van magnetisch gesplitste absorptielijnen. C.A.A. 13. 516.

**1166.** *L. H. Siertsema.* Onderzoek van eene foutenbron bij het meten van magnetische draaiingen van het polarisatievlak in absorbeerende oplossinger. C.A.A. 12. 749.

### Zeemansches Phänomen.

**1167.** *A. A. Robb.* Beiträge zur Theorie des Zeemaneffektes. A.P.L. (4) 15. 107.

### Elektromagnetische Lichttheorie.

**1168.** *A. Garbasso.* Teoria elettromagnetica della luce. M.A.T. (2) 53. 127.

**1169.** *Gray.* Electromagnetic theory of light. P.P.S.G. 35.

**1170.** *H. T. Eddy.* The electromagnetic theory and the velocity of light. P.R. 20. 193.

**1171.** *A. Einstein.* Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. A.P.L. (4) 17. 132.

**1172.** *A. Garbasso.* Le scariche oscillanti nei sistemi di conduttori complessi e la teoria elettromagnetica dell' analisi spettrale. N.C.P. (5) 8. 344.

**1173.** *A. Garbasso.* Le scariche oscillanti nei sistemi di conduttori complessi e teoria elettromagnetica dell' analisi spettrale. N.C.P. (5) 8. 344; 393; 9. 31.

Siehe auch 1496; 1695; 3648.

### Photometrie.

**1174.** *A. Schmidt.* Beschränkung und Erweiterung meines Helligkeitsgesetzes. P.Z. 5. 528.

**1175.** *G. P. Hyde.* On the theory of the Matthews and the Russel-Léonard photometers for the measurement of mean spherical and mean hemispherical intensities. B.B.S.W. 1. 255.

**1176.** *A. Vaillant.* Sur la comparabilité des déterminations spectrophotométriques. C.R. 138. 1088.

1177. *A. W. Roberts.* A consideration of close binary systems in relation to light variations. R.A.A. 1. 110.

Siehe auch 1178; 1404; 3602; 3608; 3613; 3620; 3623; 3634; 3645.

**Physiologische Optik.**

1178. *D. A. Goldhammer.* Die Farbenempfindlichkeit des Auges und die photometrische Helligkeit der leuchtenden Körper. A.P.L. (4) 16. 621.

1179. *V. Grünberg.* Farbengleichung mit Zuhilfenahme der 3 Grundempfindungen im Young-Helmholtzschen Farbensystem. A.P.L. (4) 17. 165.

Siehe auch 1041; 2506.

**Optische Täuschung.**

1180. *P. Czermak.* Eine virtuelle stereoskopische Täuschung. Z.P. 17. 341.

**Scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes.**

1181. *R. Mayr.* Die scheinbare Vergrößerung von Sonne, Mond und Sternbildern am Horizont. A.F.G.P. 101. 349.

1182. *A. C. Jouffray.* Sur l'agrandissement des astres à l'horizont. B.S.A.F. 17. 448.

1183. *N.* Die Vergrößerung der Gestirne am Horizont. D.W.B. 3. 125.

1184. *L. Weber.* Die scheinbare Größe des Mondes am Horizont. W.T.H.A. 8.

**Wärmelehre.**

1185. *E. Ferron.* Contribution à la théorie mathématique de la chaleur. I.L. 27. 27.

1186. *H. A. Wilson.* On convection of heat. P.C.P.S. 12. 406.

1187. *W. P. Bradley* and *C. F. Hale.* The distribution of temperature in an air liquefier of the single-circuit type. P.R. 19. 387.

1188. *J. Boussinesq.* Sur l'unicité de la solution simple fondamentale et de l'expression asymptotique des températures dans le problème de refroidissement. B.D. (2) 28. 46.

1189. *J. Perry.* $\vartheta\varphi$ lines of total heat. N. 70. 100.

1190. *T. Martini.* Sulle varie ipotesi intese a spiegare l'effetto Pouillet (calore svolto nel bagnare le polveri e i corpi porosi). A.J.V. (8) 6.

Siehe auch 590; 671; 3807; 3810; 3815; 3843; 3852; 3857.

**Wärmequellen.**

Siehe 3848.

**Wärmefortpflanzung.**

Siehe 3809.

**Undulationstheorie der Wärme.**

Siehe 875; 3850.

**Wärmekapazität.**

Siehe 3865.

**Temperatur.**

Siehe 641; 1187.

**Thermostatik.**

1191. *P. Duhem.* Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre. J.M. (8) 1. 77.

1192. *E. Jouguet.* Sur la stabilité de l'équilibre. P.S.B. 1902—3. 116.

1193. *P. Duhem.* Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux. P.S.B. 1902—3. 52.

**Thermodynamik.**

1194. *K. v. Wesendonk.* Zur Thermodynamik. A.P.L. (4) 16. 558; P.Z. 6. 50.

1195. *H. N. Davis.* A *PQ* plane for thermodynamic analysis. P.A.Bo. 40. 629.

1196. *G. Belluzzo.* Principi di termodinamica grafica. N.C P. (3) 8. 196; 241.

1197. *H. Diemer.* Thermal diagrams. B.U.K.L. 2 No. 6.

1198. *E. Buckingham.* On certain difficulties which are encountered in the study of thermodynamics. P.M. (6) 9. 208.

1199. *A. H. Bucherer.* Zur Thermodynamik der radioaktiven Vorgänge. P.Z. 5. 730.

1200. *P. N. Pavlov.* Über eine Eigenschaft des thermodynamischen Potentials des kristallinischen Mittels (russ.). M.S.O. 26. 165.

1201. *P. N. Pavlov.* Über das thermodynamische Potential der chemischen Elemente und ihrer Verbindungen. M.S.O. 27.

1202. *W. P. Boynton.* Thermodynamical potentials. P.R. 20. 259.

1203. *A. Einstein.* Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme. A.P.L. (4) 14. 354.

1204. *A. Einstein.* Über die von der molekularkinetischen Theorie der

Wärme geforderten Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Theilchen. A.P.L. (4) 17. 549.

**1205.** *J. Boussinesq.* Pouvoir refroidissant d'un courant fluide, faiblement conducteur sur un corps limité en tout sens. C.R. 138. 1189.

**1206.** *J. Boussinesq.* Pouvoir refroidissant d'un courant fluide, faiblement conducteur, sur un cylindre indéfini de section droite quelconque et dont l'axe est normale au courant. C.R. 138. 1134.

**1207.** *J. Boussinesq.* Conductibilité extérieure ou superficielle représentative pour un corps donné du pouvoir refroidissant d'un courant fluide. C.R. 140. 65.

**1208.** *C. Forch.* Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn K. Schaposchnikow über: eine empirische Beziehung zwischen den Dichten zweier Flüssigkeiten. P.Z. 6. 633.

**1209.** *J. Pitsch.* Über den Zusammenhang der spezifischen Volumina einer Flüssigkeit und ihres gesättigten Dampfes. S.A.W. 113. 849; A.A.W. 1904. 218.

**1210.** *Lord Rayleigh.* On the pressure of gases and the equation of virial. P.M. (6) 9. 494.

**1211.** *C. Dieterici.* Über die kalorimetrischen Eigenschaften des Wassers und seines Dampfes bei hohen Temperaturen. D.V.N. 76B. 28.

**1212.** *M. Reinganum.* Zur Dampfdichtebestimmung nach der Gay-Lussac-Hoffmannschen Methode. V.D.P.G. 7. 75.

**1213.** *O. Berner.* Die Fortleitung des überhitzten Wasserdampfes. M.F.I. 21. 1.

**1214.** *A. A. Bacon.* The equilibrium pressure of a vapour at a curved surface. P.R. 20. 1.

**1215.** *P. Duhem.* Sur une généralisation du théorème de Reech. P.S.B. 1902—03. 65.

**1216.** *C. Dieterici.* Über die Energie des Wassers und seines Dampfes bei hohen Temperaturen. V.D.P.G. 6. 228; P.Z. 5. 660.

**1217.** *K. v. Wesendonk.* Über freie Energie. P.Z. 6. 545.

**1218.** *J. E. Trevor.* The dependence of free energy upon temperature. J.P.C. 9. 299.

**1219.** *C. Dieterici.* Die Energieisothermen des Wassers bei hohen Temperaturen. A.P.L. (4) 16. 907.

**1220.** *P. Duhem.* Sur l'énergie utilisable d'un système dont la surface est maintenue à une température invariable. P.S.B. 1902—03. 121.

**1221.** *J. J. van Laar.* Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen. C.A.A. 13. 635.

**1222.** *P. Duhem.* Sur les déformations permanentes de l'hystérésis. S.E.B. 4° 62. No. 1.

**1223.** *T. M. Gardner.* Determination of exponents of adiabatics. J.F.I. 159. 199.

**1224.** *A. Batschinski.* Erweiterung des Begriffs der kritischen Größen. Z.P.C. 40. 629.

**1225.** *G. Bakker.* Untersuchungen über kritische Dichte und die Theorie von Andrews-van der Waals. A.P.L. (4) 15. 543.

**1226.** *P. Duhem.* Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik IX. Z.P.C. 43. 695.

**1227.** *A. A. Noyes* und *G. V. Sammet.* Experimentelle Prüfung der thermodynamischen Beziehung zwischen der Lösungswärme und der Änderung der Löslichkeit mit der Temperatur im Falle dissoziierter Substanzen. Z.P.C. 43. 513.

**1228.** *M. Wildermann.* Über den Zusammenhang zwischen Gefrierpunkten, Siedepunkten und Löslichkeit. Z.P.C. 42. 481.

**1229.** *S. Scharbe.* Über die Bestimmung der Kurve fest-heterogen binärer Gemische durch kalorimetrische Messungen. A.P.L. (4) 15. 1046.

**1230.** *J. J. van Laar.* Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden by de beperkte mengbaarheid van 2 vloeistoffen waarvan de eene anomaal. speciaal water, is. C.A.A. 13. 573.

**1231.** *J. J. van Laar.* Sur quelques phénomènes remarquables chez la miscibilité partielle d'un mélange de 2 liquides dont l'un des deux est anomale. A.M.T. (2) 9. 369.

**1232.** *J. Perry.* A useful empirical formula. N. 69. 102. — *J. D. Everett* 151.

**1233.** *A. Batschinski.* Beziehungen für die thermischen Eigenschaften der Stoffe. A.P.L. (4) 14. 288.

**1234.** *D. A. Goldhammer.* O prirode židkago vozducha. (Über die Natur der flüssigen Luft.) S.M.Ka. (2) 14. 99.

**1235.** *G. Meslin.* Sur la constante de la loi de Mariotte et Gay-Lussac. J.P. (4) 4. 252.

**1236.** *K. Hällstén.* Eine Bemerkung zu der Clapeyron-Clausiusschen Gleichung für die latente Wärme. Z.P.C. 42. 369.

**1237.** *F. Richarz.* Einige Folgerungen der Theorie des Gesetzes von Dulong und Petit. S.G.M. 1904. 61.

**1238.** *F. E. Kester.* Der Joule-Thomsoneffekt in $CO_2$. P.Z. 6. 44.

**1239.** *P. Duhem.* Sur une généralisation du théorème de Reech. P.S.B. 1902—03. 65.

Siehe auch 586; 647; 736; 772; 849; 850; 933; 1131; 1361; 3795; 3818; 3836; 3854; 3856; 3878; 3888.

### Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik.

**1240.** *Scheye.* Über die Ableitung des Intensitätsgesetzes der Energetik aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Z.P.C. 44. 495. — *G. Helm* 498.

### Entropie.

**1241.** *J. Swinburne, J. Perry.* Entropy. N. 70. 54.

**1242.** *S. H. Burbury.* On the theory of diminishing entropy. P.M. (6) 8. 43.

**1243.** *H. A. Bumstead.* On the variation of entropy as treated by Prof. Willard Gibbs. P.M. (6) 7. 8.

Siehe auch 1245; 3841; 3898.

### Kreisprozesse.

**1244.** *S. Valentiner.* Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse. A.P.L. (4) 15. 829.

**1245.** *W. Mc F. Orr.* On Clausius' theorem for irreversible cycles and on the increase of entropy. P.M. (6) 8. 509. — *M. Planck* 9. 167.

**1246.** *H. Hort.* Über die Beurteilung von Dämpfen, die in Heiß-, Abwärme- und Kaltdampfmaschinen die Kreisprozesse vermitteln. Z.G.K. 11. 201.

### Dämpfe.

Siehe 1212; 1216; 3797—99; 3803; 3808; 3819; 3824; 3829; 3834; 3839; 3844; 3845; 3849; 3853; 3872; 3877; 3897.

### Verdampfungswärme.

**1247.** *A. J. Batschinski.* Über die Beziehung zwischen der Verdampfungswärme und den kritischen Größen. Z.P.C. 43. 369.

**1248.** *E. Mathias.* Sur la chaleur de vaporisation des gaz liquéfiés. C.R. 140. 1174.

**1249.** *R. C. Fenner* and *F. K. Richtmeyr.* The heat of vaporisation of liquid air. P.R. 20. 77.

**1250.** *W. Kurbatoff.* Über die Verdampfungswärme des Hg. Z.P.C. 43. 104.

Siehe auch 1608.

### Mischungswärme.

**1251.** *B. M. Clarke.* Bestimmung einiger Mischungswärmen. P.Z. 6. 154.

**1252.** *J. J. van Laar.* Over mengwarmten bij associeerende oplosmiddelen. C.A.A. 13. 121.

**1253.** *E. Bose.* Bemerkungen über Julius Thomsens Messungen der Mischungswärmen von Säuren. P.Z. 6. 548.

Siehe auch 741.

### Kältemischungen.

Siehe 3811; 3812; 3832; 3891; 3905.

### Mechanisches Wärmeäquivalent.

**1254.** *H. T. Barnes.* Mechanical equivalent of heat. W.E. 35. 297.

**1255.** *U. Behn.* Über das Verhältnis der mittleren (Bunsenschen) Kalorie zur 15° Kalorie. S.A.B. 1905. 72.

**1256.** *C. Dieterici.* Über die Flüssigkeitswärme des Wassers und das mechanische Wärmeäquivalent. A.P.L. (4) 16. 593.

Siehe auch 2344; 2479; 3813.

### Spezifische Wärme.

**1257.** *A. D. Bogajavlenskij.* Ob izmenenii teploemkoste kristalličeskich veščestv s temperaturoju. T.N.J. 13.

**1258.** *N. Stücker.* Neuere Bestimmungen der spezifischen Wärme einiger Metalle bei höheren Temperaturen. S.A.W. 114. 657.

**1259.** *L. Holborn* und *L. Austin.* Über die spezifische Wärme der Gase bei höherer Temperatur. A.P.T.R. 4. 131; S.A.B. 1905. 175.

**1260.** *H. Lorenz.* Die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes. P.Z. 5. 383; M.F.I. 21. 93.

**1261.** *F. Richarz.* Bestimmung des Verhältnisses $K$ der beiden spezifischen Wärmen $c_p : c_v$ von Ozon. S.G.M. 1904. 57.

**1262.** *S. Valentiner.* Über die Abhängigkeit des Verhältnisses $c_p : c_v$ der spezifischen Wärmen des $N$ vom Druck bei der Temperatur der flüssigen Luft. A.P.L. (4) 15. 74.

**1263.** *E. Mathias.* Remarques au sujet du mémoire de M. Dieterici inti-

tulé les chaleurs spécifiques de l'acide carbonique et de l'isopentane. J.P. (4) 3. 939.

Siehe auch 1303; 3894; 3895.

## Lösungen.

**1264.** *J. Traube.* A theory of solutions. P.M. (6) 8. 158.

**1265.** *E. Ariès.* Théorie des solutions diluées, basée sur la loi de Van't Hoff. C.R. 139. 401.

**1266.** *G. Martin.* A contribution to the theory of solution. J.P.C. 9. 149.

**1267.** *J. B. Goebel.* Zahlenbeispiel zur neueren Theorie der Lösungen. Z.P.C. 42. 59.

**1268.** *H. Jahn.* Entwurf einer erweiterten Theorie der verdünnten Lösungen. Z.P.C. 41. 257.

**1269.** *V. Rothmund* und *N. T. M. Wilsmore.* Die Gegenseitigkeit der Löslichkeitsbeeinflussung. Z.P.C. 40. 611.

**1270.** *W. Meyerhoffer.* Über den Entdecker der Knicke und Löslichkeitskurven. Z.P.C. 42. 501. — *W. Ostwald* 503.

**1271.** *G. Bruni* e *A. Callegari.* Sul congelamento delle soluzioni in solventi dimorfi. R.A.L.R. (5) 13 A. 481.

**1272.** *E. Brunner.* Zur Theorie der elektrolytischen Lösungstensionen. Z.E. 11. 415.

**1273.** *F. Kohlrausch.* Über gesättigte wäßrige Lösungen schwerlöslicher Salze. Z.P.C. 44. 197.

**1274.** *P. Vaillant.* Sur la densité des solutions salines aqueuses considérée comme propriété additive des ions et sur l'existence de quelques ions hydrates. C.R. 138. 1210.

**1275.** *J. Schurr.* Recherches sur la vitesse de dissolution des sels dans leurs solutions aqueuses. J.C.P. 2. 245; J.P. (4) 4. 17.

**1276.** *R. Abegg* und *H. Riesenfeld.* Über das Lösungsvermögen von Salzlösungen für $NH_3$ nach Messungen seines Partialdruckes I. Z.P.C. 40. 84.

**1277.** *J. Billitzer.* Über die saure Natur des Acetylens. Z.P.C. 40. 535.

Siehe auch 631; 632; 746; 747; 911; 910; 927—29; 1112; 1113; 1227; 1309; 2354—56.

## Ionentheorie.

**1278.** *Hübler.* Die Ionentheorie. J.N.K. 1904 05. 27.

**1279.** *J. S. Townsend.* The genesis of ions by the motion of positive ions in a gas and a theory of the sparking potential. P.M. (6) 6. 598.

**1280.** *E. Meyer* und *E. Müller.* Über die Ursache der Ionisation der *P*-Luft. V.D.P.G. 6. 332.

**1281.** *C. Böhm-Wendt.* Über die Ionisation verschiedener Gase und Dämpfe durch Poloniumstrahlen. P.Z. 5. 509.

**1282.** *A. Reychler.* Quelques considérations à l'appui de la théorie des „ions mobiles". J.C.P. 2. 307.

**1283.** *E. Bloch.* Sur la mesure de la mobilité des ions dans les gaz par une méthode de zéro. C.R. 138. 1492.

**1284.** *R. Megg* und *W. Gaus.* Beiträge zur Theorie der direkten Bestimmungsmethode von Ionenbeweglichkeiten. Z.P.C. 10. 737.

**1285.** *F. H. Getman.* A model illustrating Hittorfs' Theory of the migration velocities of ions. S. (2) 21. 153.

**1286.** *P. Ferchland.* Über einseitige Ionenwanderung und über nicht parallele Wanderung von Anion und Kation. C.Z. 28. 864.

**1287.** *A. Wehnelt.* Über den Austritt negativer Ionen aus glühenden Metallverbindungen und damit zusammenhängende Erscheinungen. A.P.L. (4 14. 425.

**1288.** *S. Tijmstra.* Notiz über Ionengeschwindigkeit. Z.E. 11. 249. — *H. Danneel* 249.

**1289.** *E. R. v. Schweidler.* Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in schlecht leitenden Flüssigkeiten. A.A.W. 1904. 198.

**1290.** *E. v. Schweidler.* Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in schlecht leitenden Flüssigkeiten. S.A.W. 113. 881.

**1291.** *B. D. Steele.* Die Messung von Ionengeschwindigkeiten in wäßrigen Lösungen und die Existenz komplexer Ionen. Z.P.C. 40. 689.

**1292.** *L. A. Parsons.* The energy of ions. T.A.E.S. 5. 131.

**1293.** *S. Townsend.* The charges on ions. P.M. (6) 7. 276.

**1294.** *C. Nordmann.* Méthode pour l'enrégistrement continu de l'état d'ionisation des gaz. Ionographe. C.R. 138. 1418.

**1295.** *T. Retschinsky.* Über die Wiedervereinigung der Ionen in Luft. A.P.L. (4) 17. 518.

**1296.** *Langevin.* Recombinaison et diffusion des ions gazeux. J.P. (4) 4. 322.

**1297.** *R. K. Mc Clung.* The relation between the rate of recombination

of ions in air and the temperature of the air. P.M. (6) 6. 655.

**1298.** *J. J. Thomson.* The rate of recombination and the size of gazeous ions. P.C.P.S. 13. 170.

**1299.** *G. W. Walker.* On the rate of recombination of ions in gases. P.M. (6) 8. 211.

**1300.** *O. W. Richardson.* The theory of the rate of recombination of ions in gases. P.C.P.S. 12. 144.

**1301.** *E. H. Riesenfeld.* Über den Molekularzustand von Jodkalium in Phenol. Z.P.C. 41. 346.

**1302.** *A. Thiel.* Die Löslichkeit homogener Mischungen und die gemischten Depolarisatoren. Z.P.C 43. 641.

Siehe auch 889; 1137; 1274; 1490; 1501; 1511; 1530; 1609; 1685; 2273—77; 2368; 2370; 2600; 2601; 2791; 3203; 3659.

### Thermische Ausdehnung.

**1303.** *B. A. Behrend, J. Perry.* Expansion curves. N. 69. 56.

**1304.** *H. D. Ayres.* Coefficients of linear expansion at low temperature. P.R. 20. 38.

**1305.** *J. S. Shearer.* Note on Coefficients of expansion at low temperature P.R. 20. 52.

**1306.** *K. F. Slotte.* Über die thermische Ausdehnung und die spezifische Wärme einfacher fester Körper. B.F.F. 44. 121.

**1307.** *H. Mc Allister Randall.* On the coefficient of expansion of quartz. P.R. 20. 10.

**1308.** *P. Chappius.* Détermination de la dilatation du mercure. J. P. (4) 4. 12.

**1309.** *G. Landezen.* Izoledovanija teplovogo rassirenija vodnych rastvorov. (Untersuchungen über die Wärmeausdehnung wässriger Lösungen.) T.N.J. 14.

**1310.** *A. Jaquerod* et *F. L. Perrot.* Sur le point de fusion de l'or et la dilatation de quelques gaz à haute température. A.S.G. (4) 20. 28; 128.

**1311.** *H. M. Randall.* The coefficient of expansion of Ni at its critical temperature. P.R. 20. 85.

**1312.** *O. Tumlirz.* Die innere Arbeit bei der isothermen Ausdehnung des trocken gesättigten Wasserdampfes. S.A.W. 113. 380.

### Zustandsgleichung.

**1313.** *J. D. van der Waals.* De vloei stoftoestand en de toestandsvergelijking. C.A.A. 12. 82.

**1314.** *J. D. van der Waals.* L'état liquide et l'équation d'état. J.C.P. 2. 7; A.N. (2) 9. 1.

**1315.** *P. Kohnstamm.* Sur l'équation d'état de van der Waals. J.C.P. 3. 170.

**1316.** *J. J. van Laar.* Quelques remarques sur l'équation d'état. A.M.T. (2) 9. 413.

**1317.** *J. L. Verscheffelt.* Bijdrage tot de kennis van het $v$-vlak van van der Waals. VII—VIII. C.A.A. 12. 69; 523.

**1318.** *H. Kamerlingh Onnes* en *C. Zakrzewski.* Bijdragen tot de kennis van het $\psi$-vlak van van der Waals. C.A.A. 12. 838; 885.

**1319.** *P. Kohnstam.* Over de toestandsvergelijkingen van van der Waals. C.A.A. 12. 948.

**1320.** *P. Ehrenfest.* Zur Berechnung der Volumkorrektion in der Zustandsgleichung von van der Waals. S.A.W. 112. 1107.

**1321.** *E. Mathias.* La constante a des diamètres rectilignes et les lois des états correspondants. J.P. (4) 4. 77.

**1322.** *E. Haentzschel.* Über die Berechnung der Konstanten $a$ und $b$ der van der Waalsschen Gleichung aus den kritischen Werten. A.P.L. (4) 16. 565. — *J. P. Kuenen* 17. 189.

**1323.** *E. Haentzschel.* Über die Berechnung der Konstanten $a$ und $b$ der van der Waalsschen Gleichung aus den kritischen Werten. V.D.P.G. 7. 61.

**1324.** *J. D. van der Waals.* La variation de la grandeur $b$ de l'équation d'état considérée comme une diminution apparente de la molécule. A.N. (2) 9. 381.

**1325.** *H. Kamerlingh Onnes* en *H. Happel.* De voorstelling van de continuiteit van den vloeibaren en gasvormigen toestand eenerzijds en de verschillende vaste aggregaattoestanden anderzijds door het entropie-volume-energievlak van Gibbs. C.A.A. 12. 223.

**1326.** *H. Kamerlingh Onnes* et *H. Happel.* La réprésentation de la continuité des états liquide et gazeux d'une part et des divers états solides d'autre part par la surface entropie-volume-énergie de Gibbs. A.N. (2) 10. 62.

**1327.** *P. Kohnstamm.* Sur les équations de Clausius et de van der Waals pour la trajectoire libre moyenne et le nombre des chocs. J.C.P. 3. 161.

**1328.** *G. Carrara* e *A. Coppadoro.* Sul comportamento e sul punto di fusione di alcune sostanze organiche a bassissima temperature. A.L.M. (5) 4. 318.

**1829.** *A. Smits.* Het beloop der oplosbaarheidskromme in het gebied der kritische temperaturen van binaire mengsels. C.A.A. 12. 659.

**1830.** *J. D. van der Waals.* De transformatie van een zijplooi in een hoofdplooi en omgekeerd. C.A.A. 13. 625.

**1831.** *J. D. van der Waals.* Sur la transformation d'un pli latéral en pli principal et inversement. A.N. (2) 10. 284.

**1832.** *A. Smits.* Over de verschynselen die optreden, wanneer by een binair stelsel de plooipuntskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet. C.A.A. 13. 90.

**1833.** *J. J. van Laar.* Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi punten voor alle temperaturen in het geval van mengsels van normale stoffen. C.A.A. 13. 685.

**1834.** *H. Happel.* Das Gesetz der korrespondierenden Zustände. P.Z. 6. 389.

**1835.** *A. Batschinski.* Bemerkung über das Gesetz der geraden Mittellinie. Z.P.C. 41. 741.

**1836.** *H. W. Bakhuis-Roozeboom* en *A. H. W. Aten.* Abnormale oplosbaarheidslijnen bij binaire mengsels tengevolge ven het bestaan van verbindingen in de oplossing. C.A.A. 12. 651.

**1837.** *J. P. Kuenen.* Over het kritisch mengpunt van 2 vloeistoffen. C.A. A. 12. 468.

**1838.** *J. D. van der Waals.* Het evenwicht van een vast lichaam met een fluide phase vornamelijk in de nabijheid van den kritischen toestand. C.A.A. 12. 439. 606.

**1839.** *J. D. van der Waals.* L'équilibre d'un solide avec une phase fluide principalement au voisinage du point critique. A.N. (2) 9. 168.

**1840.** *A. Smits.* Het beloop de oplosbaarheidskromme in het gebied der kritische temperaturen van binaire mengsels C.A.A. 12. 659.

**1841.** *J. E. Verschaffelt.* Sur l'allure des isothermes et de la courbe limite au voisinage du point critique. A.N. (2) 9. 125.

**1842.** *P. A. Guye.* Nouveau mode de calcul des poids moléculaires exacts des gaz liquéfiables à partir de leurs densités, poids atomiques des éléments constituants: *H*, *N*, Argon, *Cl*, *S*, *C*. C.R. 140. 1241.

**1843.** *O. Tumlirz.* Die stabilen und labilen Zustände der Flüssigkeiten und Dämpfe. S.A.W. 114. 167.

**1844.** *L. Marchis.* Sur le diagramme entropique d'un système formé d'un liquide et de sa vapeur saturée. J.P. (4) 4. 509.

**1845.** *P. A. Meerburg.* Beitrag zur Kenntnis der Gleichgewichte in Systemen dreier Komponenten, wobei 2 flüssige Schichten auftreten können. Z.P.C. 40. 641.

**1846.** *J. J. van Laar.* Sur quelques phénomènes remarquables chez la miscibilité partielle d'un mélange de 2 liquides dont l'un des deux est anomale. A.M.T. (2) 9. 369.

**1847.** *J. J. van Laar.* Over de gedaante van het realizeerbare gedeelte der smeltlijn bij binaire mengsels van isomorphe stoffen. II—III. C.A.A. 12. 494; 716.

**1848.** *H. W. Bakhuis-Roozeboom.* De sublimatielijnen van binaire mengsels. C.A.A. 12. 591.

**1849.** *J. J. van Laar.* Vérifications d'une formule récente de van der Waals. A.N. (2) 9. 389.

Siehe auch 739; 741—43; 1221; 1229; 1270; 3888.

### Dampfspannung.

**1850.** *H. Rebenstorff.* Demonstration der Änderungen des Dampfdruckes mit der Temperatur. Z.P. 17. 213.

**1851.** *C. Dieterici.* Über den Dampfdruck des Wassers bei hohen Temperaturen. A.P.L. (4) 15. 860.

**1852.** *F. A. H. Schreinemakers.* Tensions des vapeurs de mélanges ternaires. A.N. (2) 8. 396; 9. 279.

**1853.** *F. A. H. Schreinemakers.* Einige Bemerkungen über Dampfdrucke ternärer Gemische. Z.P.C. 43. 671.

**1854.** *F. A. H. Schreinemakers.* Dampfdrucke im System: Wasser, Aceton und Phenol. Z.P.C. 40. 440; 41. 331.

**1855.** *E. P. Rerman.* Vapour pressure by air bubbling. J.P.C. 9. 36.

**1856.** *A. Gebhardt.* Über den Dampfdruck von Hg und Na. V.D.P.G. 7. 184.

**1857.** *P. Bogdan.* L'influence des substances non-électrolytiques sur la tension de vapeurs de l'acide acétique dissous dans un milieu dissolvent. A.S. U.J. 3. 35.

**1858.** *J. Benetti.* Il calcolo dei camini par i generatori di vapore. M.I.M. (5) 9. 435.

Siehe auch 1127; 3896.

### Gastheorie.

**1859.** *J. H. Jeans.* The cinetic theory of gases. P.M. (6) 6. 720; *S. H. Burbury* 7. 467.

**1860.** *Lord Rayleigh.* The dynamical theory of gases. N. 71. 559. — *J. H. Jeans.* 607.

**1861.** *H. A. Lorentz.* La thermodynamique et les théories cinétiques. J.P. (4) 4. 533.

**1862.** *F. B. Kenrik.* A mechanical model to illustrate the gas laws. J.P.C. 8. 351.

**1863.** *J. H. Jeans.* A general dynamical theorem and its application to the kinetic theory of gases. Q.J. 35. 209.

**1864.** *P. Langevin.* Une formule fondamentale de théorie cinétique. A.C.P. (8) 5. 245.

**1865.** *J. M. Bell* and *J. E. Trevor.* The fundamantal functions of one-component ideal-constituent gases. J.P.C. 9. 179.

**1866.** *Rayleigh.* The dynamical theory of gases and of radiaton. N. 72. 54; *J. H. Jeans* 101.

**1867.** *E. Bose.* Kinetische Theorie und Radioaktivität. P.Z. 5. 356; 731.

**1868.** *J. H. Jeans.* The resistence of molecular velocities in the kinetic theory of gases. P.M. (6) 8. 700.

**1869.** *G. H. Meeker.* On the distribution of velocity among the members of a group of gas molecules. J.F.I. 159. 383.

**1870.** *J. H. Jeans.* The determination of the size of molecules from the kinetic theory of gases. P.M. (6) 8. 692.

**1871.** *D. Berthelot.* Über den wahrscheinlichsten Wert der für den Zustand vollkommener Gase charakteristischen Konstante *R.* Z.E. 10. 621.

**1872.** *E. Bose.* Über die verallgemeinerte Auffassung einer Formel der kinetischen Gastheorie. A.P.L. (4) 16. 155.

**1873.** *H. Nagaoka.* On 2 Constants $A_1$ and $A_2$ in the kinetic theory of gases. N. 69. 79.

**1874.** *P. Kohnstam.* Over de vergelijkingen van Clausius en van der Waals voor de gemiddelde weglengde en het aantal botsingen. C.A.A. 12. 961.

**1875.** *Lord Rayleigh.* Über das Gasdruckgesetz zwischen 75 und 150 mm Quecksilber. Z.P.C. 41. 71.

**1876.** *F. Emich.* Über die Bestimmung von Gasdichten bei hohen Temperaturen. S.A.W. 112. 931.

**1877.** *G. Jäger.* Zur kinetischen Theorie der Abhängigkeit der Gasdichte von den äußeren Kräften. S.A.W. 113. 1289.

**1878.** *G. Jäger.* Über die Abhängigkeit der Gasdichte von äußeren Kräften. A.A.W 1904. 340.

**1879.** *G. Jäger.* Zur Theorie des Maxwell-Boltzmannschen Gesetzes. A.P.L. (4) 16. 46.

**1880.** *J. H. Jeans.* On the partition of energy in a system of loaded spheres. Q.J. 35. 224.

**1881.** *V. Schaffers.* Neuer Apparat zu den Versuchen über die Gesetze der Gase und Dämpfe. Z.P. 18. 217.

Siehe auch 656; 886; 1327; 3850.

### Wärmeleitung.

**1882.** *H. Diesselhorst.* Berechnung von Wärmeleitungsversuchen nach einer graphischen Methode. A.P.T.R. 4. 185.

**1883.** *H. Hecht.* F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in Kugel- und Würfelform und ihre Durchführung an Marmor, Glas, Sandstein, Gips, sowie an Serpentin, Basalt. Schwefel, Steinkohle. A.P.L. (4) 14. 1008.

**1884.** *F. L. Perrot.* Conductibilité thermique du *Bi* cristallisé. A.S.G. (4) 18. 445.

**1885.** *L. W. Austin* and *C. W. Eastman.* On the relation between heat conductivity and density in some of the common noods. T.A.W. 13. 539.

**1886.** *G Mie.* Das Problem der Wärmeleitung in einem verseilten elektrischen Kabel. M.V.G. 36. 155.

**1887.** *A. Wassiliewa.* Wärmeleitung in Gasgemischen P.Z. 5. 737.

**1888.** *C. Feliciani.* Über die Wärmeleitfähigkeit des Stickstoffdioxyds sowie einige Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Nernst. P.Z. 6. 20.

**1889.** *C. Feliciani.* Sul comportamento della conduttività termica dei vapori di pentacloruro di fosforo. R.A.L.R. (5) 14 A. 371.

**1890.** *A. Schmidt.* Die Wärmeleitung der Atmosphäre. B.G. 6. 156.

Siehe auch 543; 1205; 1206; 1607; 1725; 1726; 2189; 3831.

### Wärmestrahlung.

**1891.** *F. Záviška.* O tepelném záření. (Über Wärmestrahlung.) C. 34. 314; 377.

**1892.** *J. H. Jeans.* A comparison between 2 theories of radiation. N. 72. 293.

**1893.** *F. Hasenöhrl.* Zur Theorie der Strahlung bewegter Körper. S.A.W.

113. 1039; A.P.L. (4) 15. 344; 16. 589; A.A.W. 1904. 226.

**1394.** *J. Larmor.* On the intensity of the natural radiation from moving bodies and its mechanical reaction. P.M. (6) 7. 578.

**1395.** *W. Wien.* Poyntingscher Satz und Strahlung. A.P.L. (4) 15. 412.

**1396.** *E. Pringsheim.* Über die Strahlungsgesetze. A.Gr. (3) 7. 236; 296.

**1397.** *E. Bose.* Anwendung des Radiums zur Prüfung des Strahlungsgesetzes für niedrige Temperaturen. P.Z. 6. 5.

**1398.** *A. L. Day* and *C. E. van Orstrand.* The black body and the measurement of extreme temperatures. A.J.C. 19. 1.

**1399.** *O. Lummer.* Das Gesetz der schwarzen Strahlung und ihre Verwendung. A.Gr. (3) 8. 227.

**1400.** *M. Abraham.* Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruckes. A.P.L. (4) 14. 236; 1039. — *W. Wien* 635.

**1401.** *O. Heaviside.* The pressure of radiation. N. 71. 439.

**1402.** *E. Aschkinaß.* Die Wärmestrahlung der Metalle. V.D.P.G. 7. 251.

**1403.** *L. Holborn* und *F. Henning.* Über die Lichtemission und den Schmelzpunkt einiger Metalle. S.A.B. 1905. 311.

**1404.** *R. Lucas.* Über den Temperaturunterschied von glühendem *Pt* und schwarzem Körper bei gleicher photometrischer Helligkeit. P.Z. 6. 418.

**1405.** *S. Meyer* und *E. von Schweidler.* Über die Strahlung des Uran. S.A.W. 113. 1057.

**1406.** *W. Nernst.* Beitrag zur Strahlung der Gase. P.Z. 5. 777.

**1407.** *W. Nernst.* Beitrag zur Strahlung glühender Gase. D.V.N 76 B. 46.

**1408.** *O. Tumlirz.* Die Wärmestrahlung der *H*-Flamme. S.A.W. 113. 501.

**1409.** *K. Angström.* Die Strahlung der Hefnerlampe. P.Z. 5. 456.

**1410.** *E. Hertzsprung.* Zur Strahlung der Hefnerlampe. P.Z. 5. 634.

**1411.** *O. Tumlirz.* Die Gesamtstrahlung der Hefnerlampe. S.A.W. 112. 1382.

**1412.** *L. W. Hartmann.* Über die Wärmeabgabe glühender Fäden durch Leitung und Konvektion. P.Z. 5. 579.

**1413.** *S. Tereschin.* Die Wärmeabgabe glühender Fäden und die Lorenzsche Formel. P.Z. 6. 217.

**1414.** *H. Pellat.* Démonstration de la loi de Maxwell-Bartoli. J.P. (4) 2. 484.

Siehe auch 1023; 1155; 1171; 1366; 1540; 1695; 1901; 1948—50; 2467; 3657; 3800.

### Flammen.

Siehe 1499; 1500; 1544; 3826.

### Explosion.

**1415.** *H. Mache.* Über die Explosionsgeschwindigkeit in homogenen Knallgasen. S.A.W. 113. 341.

**1416.** *E. Jouguet.* Sur l'onde explosive. C.R. 140. 709.

**1417.** *R. Liouville.* Sur les pressions développées à chaque instant en vase clos par des poudres colloïdales de diverses formes. C.R. 140. 708.

Siehe auch 509; 616; 664; 2428; 2771; 3250; 3835; 3837; 3855.

### Wärmemessung.

**1418.** *A. Herlitzka.* Su un nuovo metodo di registrazione grafica della temperatura. R.A.L.R. 13 B. 447.

**1419.** *H. Edwards.* Notes on resistance measuremenf in platinum thermometry. P.A.Bo. 40 549.

**1420.** *B. Meilink.* On the measurement of very low temperatures. C.P.L. 93.

**1421.** *U. Behn.* Über das Verhältnis der mittleren (Bunsenschen) Kalorie zur 15°. Kalorie. A.P.L. (4) 16. 653.

Siehe auch 1132; 1211; 1229; 1398; 1622; 3838.

### Elektrizität.

**1422.** *S. Kolaček.* Elektřina a magnetismus. (Elektrizität und Magnetismus.) R.M.P. 9.

**1423.** *P. de Heen.* Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité. M.S.L. (3) 5. No. 2,

**1424.** *E. Riecke.* Neuere Anschauungen der Elektriztätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. A.Gr. (3) 8. 29.

**1425.** *J. Fraser.* Suggestions towards a theory of electricity based on the bubble atom. P.R.S.E. 25. 680.

**1426.** *G. Gola.* Analogie fra idraulica ed elettricità. Applicazione alla protezione dei impianti elettrici. A.A.E. I. 9. 36.

**1427.** *A. Lanner.* Die einheitliche Behandlung der elektrischen Fernwirkungen. Z.H. 35. 177.

Siehe auch 457; 458; 695—67; 706; 851; 862; 997; 1086; 3599.

### Elektrizitätserregung.

**1428.** *G. Martinelli.* Elettrizzazione di alcuni dielettrici amorfi mediante compressione. N.C.P. (5) 7. 212.

**1429.** *Lord Kelvin.* On electric insulation in „vacuum". P.M. (6) 8. 534.

Siehe 2963.

### Elektrostatik.

**1430.** *V. Posejpal.* Pokus z elektrostatiky. (Versuch aus der Elektrostatik.) C. 34. 189.

**1431.** *W. Feußner.* Zwei elektrostatische Sätze. S.G.M. 1903. 65.

**1432.** *F. Massardi.* Sul problema generale dell' elettrostatica. A.I.V. (8) 6.

**1433.** *T. Levi-Cività.* Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi. R.C.M.P. 20. 173.

**1434.** *T. Levi-Cività.* Sopra un problema di elettrostatica che interessa la costruzione dei cavi. N.C.P. (5) 8. 187.

**1435.** *Schaffers.* Pression électrostatique, pouvoir des pointes et vent électrique. A.S.B. 29B. 417.

**1436.** *K. Roesen.* Ein elektrostatisches Induktionsgesetz und seine Anwendung auf die Erklärung der Wirkungsweise des Thomsonschen Tropfenkollektors und der Holtzschen Maschine. Z.P. 18. 93.

**1437.** *M. Seddig.* Über Faradays Vorstellung der elektrischen Vorgänge im Nichtleiter und Darstellung elektrostatischer Kraftlinien. N.R. 19. 389.

**1438.** *L. Revilliod.* Méthode de détermination de capacités électrostatiques par mesures de durées d'oscillations et de décrements logarithmiques. S.E.Z. 2. 3; 23.

**1439.** *E. B. Rosa* and *F. W. Grover.* The absolute measurement of capacity. B.B.S.W. 1. 153.

**1440.** *D. König.* Die Kapazität des Elektrometers. M.P.G.Z. 8. 10.

Siehe auch 626; 874; 3017.

### Elektrische Kraftlinien.

Siehe 1437.

### Elektrizitätsentladung.

**1441.** *H. M. Macdonald.* Electric radiation from conductors. P.L.M.S. (2) 1. 459.

**1442.** *P. Ewers.* Die Spitzenentladung in 1- und 2-atomigen Gasen. P.Z. 6. 133.

**1443.** *E. Warburg.* Bemerkung über die Spitzenentladung. V.D.P.G 6. 209.

**1444.** *K. Przibram.* Über Büschelentladung. S.A.W. 113. 1491.

**1445.** *M. Toepler.* Zur Kenntnis der negativen Streifenentladung. A.P.L. (4) 14. 962.

**1446.** *J. James.* Die Abraham-Lemoinesche Methode zur Messung sehr kleiner Zeitintervalle und ihre Anwendung zur Bestimmung der Richtung und Geschwindigkeit der Entladung in Entladungsröhren. S.P.M.E. 36. 1.

Siehe auch 863; 1111; 1137; 1138; 1172; 1173; 1535.

### Konduktoren.

**1447.** *E. Almansi.* Sopra i conduttori cavi. R.A.L.R. (5) 13B. 12.

**1448.** *O. M. Corbino.* Coppie destale su una sfera conduttrice da un campo rotante. N.C.P. (5) 9. 204.

Siehe auch 1172; 1173; 1441; 1566; 1689.

### Elektrischer Funke.

**1449.** *J. Semenov.* Recherches expérimentales sur l'étincelle électrique. A.C.P. (8) 2. 345.

**1450.** *J. Koch.* Einige Untersuchungen über den elektrischen Funken, besonders über die physikalischen Bedingungen für sein Erlöschen. A.P.L. (4) 15. 865.

**1451.** *A. Hagenbach.* Sur l'effet de Doppler dans l'étincelle électrique. V.S. N.G. 86. 16.

**1452.** *A. Stefanini* e *L. Magri.* Azione del radio sulla scintilla elettrica. N.C.P. (5) 7. 170.

Siehe auch 1279; 1490; 2492; 3208.

### Kondensatoren.

**1453.** *R. F. Earhardt.* The absorption of energy in condensers. P.R. 19. 8.

**1454.** *P. Drude.* Die Dämpfung von Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke. A.P.L. (4) 15. 709.

**1455.** *A. Righi.* Sui fenomeni accustici dei condensatori. R.I.B. (2) 6. 188.

**1456.** *O. M. Corbino.* Sulla viscosità dielettrica dei condensatori. N.C P. (5) 9. 81.

**1457.** *H. Morris-Airey* and *E. D. Spencer.* On a suitable arrangement for determining the capacity of a condenser by the method of successive discharges. S.P.M. 48. No. 11.

**1458.** *J. G. Coffin.* Edge corrections in the calculation of the absolute capacity of condensers by the schwarzian transformation. P.A.Bo. 39. 415.

**1459.** *N. Bulgakow.* Berechnung der elektrischen Kapazität eines ebenen Kondensators von endlichen Dimensionen. A.P.M. (8) 15. Nr. 3. 1.

**1460.** *E. Hensing.* Nachweis der Oszillationen bei Kondensatorentladungen. Z.P. 18. 159.

**1461.** *H. C. Parker.* Experiments concerning very brief electrical contacts. A.A.N.Y. 15. 161.

Siehe auch 1489; 1557; 2951; 2984; 3059; 3090; 3105; 3136; 3195.

### Dielektrizität.

**1462.** *W. Sutherland.* The dielectric capacity of atoms. P.M. (6) 7. 402.

**1463.** *P. Gouré de Villemontée.* Contribution à l'étude des diélectriques liquides. C.R. 141. 179.

**1464.** *A. Heydweiller.* Über die dielektrische Festigkeit leitender Flüssigkeiten. A.P.L. (4) 17. 346.

**1465.** *O. M. Corbino.* Über die dielektrische Viskosität der Dielektrika. P.Z. 6. 138.

**1466.** *E. Bouty.* Cohésion diélectrique de la vapeur de *Hg* et de ses mélanges. J.P. (4) 4. 317.

**1467.** *W. Sutherland.* The Crémieu-Pender discovery. P.M. (6) 7. 405.

**1468.** *J. C. Philip* and *D. Haynes.* The dielectric constants of phenols and their ethers dissolved in benzene and *m*-xylene. J.C.S. 87. 998.

Siehe auch 753; 754; 941; 1428; 1456; 1550; 2280; 2930.

### Elektrodynamik.

**1469.** *R. Gans.* Die Grundgleichungen der Elektrodynamik. V.G.H. (2) 8. 208.

**1470.** *W. Wien.* Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik des Herrn E. Cohn. A.P.L. (4) 14. 632.

**1471.** *A. W. Conway.* A new foundation of electrodynamics. T.S.D. (2) 8. 53.

**1472.** *R. Gans.* Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. A.P.L. (4) 16. 516.

**1473.** *E. Cohn.* Zur Elektrodynamik bewegter Systeme. S.A.B. 1904. 1294; 1404.

**1474.** *R. H. Weber.* Die Gleichungen der Elektrodynamik für bewegte Medien, abgeleitet aus einer Erweiterung des Faradayschen Gesetzes. V.G.H. (2) 8. 201.

**1475.** *O. M. Corbino.* Über Kräftepaare, welche durch ein rotierendes Feld auf einer leitenden Kugel hervorgerufen werden. P.Z. 6. 227.

**1476.** *E. Koppe.* Berichtigung und Ergänzung meiner letzten Arbeit über rotierende Kraftfelder. S.M.H. 4. 171.

**1477.** *E. Bouty.* Propagation de l'électricité à travers les couches gazeuses de grande épaisseur. C.R. 141. 312.

**1478.** *J. J. Thomson.* On momentum in electric field. P.M. (6) 8. 331.

**1479.** *G. Picciati.* Sulla teoria del solenoide elettrodinamico R.A.L.R. (5) 14. A 443.

**1480.** *P. J. Kirkby.* The effect of the passage of electricity through a mixture of oxygen and hydrogen at low pressures. P.M. (6) 7. 223.

**1481.** *P. J. Kirkby.* The union of *H* and *O* at low pressures through the passage of electricity. P.M. (6) 9. 131.

**1482.** *B. Davis.* The electrical conductivity and absorption of energy in the electrodeless discharge. A.A.N.Y. 15. 198.

Siehe auch 561.

### Maxwellsche Gleichungen.

**1483.** *C. Neumann,* Über die Maxwell-Hertzsche Theorie. A.G.L. 27. 211; 753.

**1484.** *F. Richarz.* Herleitung des einen Tripels der Maxwellschen Differentialgleichungen aus dem andern mit Hilfe des Energieprinzips. S.G.M. 1904. 138.

Siehe auch 797.

### Elektromotorische Kraft.

**1485.** *G. Carrara* e *L. d'Agostini.* Sulle forze elettromotrici fra alcuni metalli et soluzioni dei loro sali in acqua e alcool metilico. A.S.C.M. 11.

Siehe auch 1523; 1611; 2340; 2373; 2464; 3095.

### Ohmsches Gesetz.

Siehe 3007.

### Elektrisches Potential.

**1486.** *L. Guiganino.* Sopra il potenziale elettrodinamico. N.C.P. (5) 8. 278.

**1487.** *J. S. Townsend.* Note on the potential required to maintain a current in a gas. P.M. (6) 8 750.

**1488.** *J. S. Townsend.* A theory of the variation of the potential required

to maintain a current in a gas. P.M. (6) 9. 289.

**1489.** *E. Schuscik.* Elektrische Kapazität und elektrisches Potential auf der Unterstufe des physikalischen Unterrichts. V.V.F.U.W. 9. 55.

**1490.** *J. S. Townsend* and *H. E. Hurst.* The genesis of ions by the motion of positive ions and a theory of the sparking potential. P.M. (6) 8. 738.

**1491.** *H. J. S. Sand.* The measurement of the potential of the electrode in stationary liquids. The determination of concentration at the cathode during electrolysis. T.F.S. 1. 1.

**1492.** *G. Herklotz.* Über die Berechnung retardierter Potentiale. N.G.G. 1904. 549.

**1493.** *K. R. Johnson.* Zur Nernst-Planckschen Theorie über die Potentialdifferenz zwischen verdünnten Lösungen. A.P.L. (4) 14. 995.

**1494.** *H. Greinacher.* Über die Ursache des Voltaeffekts. A.P.L. (4) 16. 708.

Siehe auch 939; 1143; 1144; 1279; 1702; 2326; 2368.

### Elektrische Leitfähigkeit.

**1495.** *R. v. Haßlinger.* Über elektrolytische und metallische Leitfähigkeit. A.A.W. 1905. 318.

**1496.** *A. Philippini.* Sopra il fenomeno della luce. N.C.P. (5) 8. 264.

**1497.** *A. Fisch.* Beiträge zur Kenntnis loser Kontakte. M.P.G.Z. 8. 1.

**1498.** *P. G. Nutting.* Some new rectifying effects in conducting gases. B.P. S.W. 1. 95.

**1499.** *F. Moreau.* Recherches sur la conductibilité électrique des flammes. B.S.S.O. 12. 556; T.S.U.R. 3. 5.

**1500.** *P. Langevin* et *E. Bloch.* Sur la conductibilté des gaz issus d'une flamme. C.R. 139. 792.

**1501.** *C. Nordmann.* Mesure de la conductibilité des diélectriques au moyen des gas ionisés. C.R. 140. 38.

**1502.** *H. Wolff.* Beitrag zur Kenntnis der Leitfähigkeit gemischter Lösungen in Elektrolyten. Z.P.C. 40. 222.

**1503.** *B. Sabat.* Über das Leitvermögen der Gemische von Elektrolyten. Z.P.C. 41. 224.

**1504.** *P. C. Nutting.* Some new rectifying effects in conductive gases. P. R. 19. 1.

**1505.** *E. Bloch.* Recherches sur la conductibilité électrique de l'air produite par le P et sur les gaz récemment préparés. A.C.P. (8) 4. 25.

**1506.** *G. Rudorf.* Zur Kenntnis der Leitfähigkeiten und inneren Reibungen von Lösungen. Z.P.C. 43. 257.

**1507.** *H. W. Goodwin* and *R. Haskell.* The electrical conductivity of very dissolute hydrochloric and nitric acid solutions. P.R. 19. 369; *P. A. Bo.* 40. 399.

**1508.** *W. Hechler.* Fluidität und Leitfähigkeit einiger konzentrierter wäßriger Salzlösungen unter 0°. A.P.L. (4) 15. 157.

**1509.** *W. A. Roth.* Elektrisches Leitvermögen von Kaliumchlorid in Wasser-Äthylalkoholgemischen. Z.P.C. 42. 209.

**1510.** *P. Dutoit* et *A. Levier.* Conductibilités limites de quelques électrolytes binaires dans l'acétone. J.C.P. 3. 435.

**1511.** *F. Kohlrausch* und *E. Grüneisen.* Das Leitvermögen wäßriger Lösungen von Elektrolyten mit zweiwertigen Ionen. S.A.B. 1904. 1215.

**1512.** *H. Muraoka* und *T. Tamaru.* Über die Veränderung der elektrischen Leitungsfähigkeit eines Pulvers durch Induktion. M.C.R. 1. 20.

**1513.** *E. Lohr.* Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit des Na mit der Wienschen Induktionswage. A.A.W. 1904. 198.

**1514.** *H. Pellat.* Du rôle des corpuscules dans la formation de la colonne anodique. Loi générale de la magnétofriction. J.P. (4) 3. 434.

Siehe auch 632; 1289; 1290; 1482; 1614; 1624; 2366; 3003.

### Elektrischer Widerstand.

**1515.** *A. Blank.* Résistance au contact. A.C.P. (8) 5. 433.

**1516.** *Blanc.* Sur la résistanee au contact de 2 métaux. S.F.P. 229. 4.

**1517.** *A. Righi.* Sulla diminuzione della resistenza prodotta nei cattivi conduttori dei raggi del radio. R.A.L.R. (5) 14 B. 207.

**1518.** *A. Broca* et *Turchini.* Sur la résistance des fils métalliques pour les courants électriques de haute fréquence. C.R. 140. 1238.

**1519.** *Brocca* e *Turchini.* Expériences sur la résistance des fils métalliques pour les courants de haute fréquence. S.F.P. 230. 5.

**1520.** *C Benedicks.* Der elektrische Leitungswiderstand des Stahles und des reinen Fe. Z.P.C. 10. 545.

**1521.** *H. Hausrath.* Eine allgemein verwendbare Differentialmethode zur Mes-

sung kleiner Widerstände. A. P. L. (4) 16. 134.

Siehe auch 1539; 1693; 1694; 1724; 2464; 2957; 2984; 2990; 3019; 3050; 3095; 3106; 3124; 3153; 3217.

### Elektrischer Strom.

**1522.** *B. Weinstein.* Neueste Forschungen über den elektrischen Strom. H.E.B. 16. 537.

**1523.** *de Madariaga.* Fuerza electrotromotoria y intensidad da una corriente alterna. R.A.M. 1.

**1524.** *H. Fallqvist.* Über einige aperiodische Stromvorgänge. A.P.L. (4) 14. 602.

**1525.** *A. Fleming.* A model illustrating the propagation of a periodic electric current in a telephone cable and the simple theory of its operation. P. P.S.L. 19. 310. P.M. (6) 8. 221.

**1526.** *W. Feussner.* Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern. A.P.L. (4) 15. 385; S.G.M. 1904. 83.

**1527.** *W. Rogowski.* Ein Beitrag zur graphischen Behandlung eines Sternsystemes. P.Z. 5. 628.

**1528.** *Willame.* La capacité uniformément repartie. A.S.B. 28 A. 85; B. 351.

**1529.** *M. Grassi.* Zur Theorie des Reststromes. Z.P.C. 44. 460.

**1530.** *G. W. Walker* On saturation currents in ionization. P.M. (6) 8. 600.

**1531.** *F. G. Cottrell.* Der Reststrom bei galvanischer Polarisation betrachtet als ein Diffusionsproblem. Z.P.C. 42. 385.

Siehe auch 1140; 1487; 1488; 1544; 1596; 1611—13; 1616—18; 1661; 1696; 1700; 1701; 1703; 2519; 2922; 2984; 3019; 3020; 3068; 3085; 3120; 3142; 3144; 3164; 3189; 3196; 3213; 3557.

### Gleichstrom.

**1532.** *Espurz.* Campos de fuerza en los hilos recorridos por corrientes continuas. R.A.M. 1.

**1533.** *Espurz.* Coexistenzia de 2 campos de fuerza en los hilos recorridos por corrientes continuas. R.A.M. 2. Nr. 2—3.

Siehe auch 1625; 1697—99; 3074.

### Wechselstrom.

**1534.** *V. Novák.* Grafické studium střídavého proudu (Graphisches Studium des Wechselstroms). C. 33. 230; 348.

**1535.** *W. Lessing.* Über Wechselstromentladungen. V.D.P.G. 6. 340.

**1536.** *G. E. Leithäuser.* Über eine Methode zur Analyse von Wechselströmen. V.D.P.G. 7. 72.

**1537.** *Revessi.* Oscillazioni nelle correnti alternate. A.A.E.I. 1904; L.E.R. (2) 3. Nr. 13—16.

**1538.** *L. Donati.* Di una disposizione per graduare la tensione di correnti alternative. R.I.B. (2) 7. 158.

**1539.** *A. Sommerfeld.* Über das Wechselfeld und den Wechselstromwiderstand von Spulen und Rollen. A.P.L (4) 15. 673.

**1540.** *W. Mc. F. Orr.* Note on the radiation from an alternating circular electric current. P.M. (6) 7. 336.

**1541.** *H. T. Simon* und *M. Reich.* Einige Demonstrationsversuche mit Wechselstrom höherer Frequenz. P.Z. 6. 369.

**1542.** *W. Duddell.* Mesure des petits courants alternatifs. J.P. (4) 4. 5.

**1543.** *Duddell.* Mesure des petits courants alternatifs de haute fréquence. S. F.P. Nr. 220. 6.

Siehe auch 1523; 1698; 2380—83; 2465; 2523; 2934; 3123; 3125; 3136; 3185; 322..

### Galvanische Polarisation.

**1544.** *A. Schmedts.* Recherches sur la polarisation produite par le passage du courant électrique dans la flamme. B.A.B. 1905. 333.

**1545.** *E. Rothé.* Sur la polarisation des électrodes. S.F.P. 214. 3; J.P. (4) 3. 661.

**1546.** *D. B. Brace.* Note on the errors in the half-shade elliptical polarizer. P. R. 19. 218.

**1547.** *H. Wommelsdorf.* Einfluß der Polarisationsstellung auf die Stromleistung der Influenzmaschinen mit Doppeldrehung. A.P.L. (4) 15. 842.

Siehe auch 1531; 2532; 2992; 3648.

### Elektrische Schwingungen.

**1548.** *O. v. Baeyer.* Absorption elektrischer Schwingungen von 70 cm. Wellenlänge. A.P.L. (4) 17. 30.

**1549.** *S. Maisel.* Zur Theorie ungedämpfter elektrischer Schwingungen. P. Z. 6. 38.

**1550.** *W. Mc. F. Orr.* The impossibility of undamped vibrations in an unbounded dielectric. P.M. (6) 6. 672.

**1551.** *R. V. Picou.* Oscillations électriques et surélévations de tension correspondantes. B.S.I.E. (2) 4. 267.

**1552.** *W. Voigt.* Wirkung elektrischer Schwingungen in optisch aktiven Körpern. N.G.G. 1904. 467.

**1553.** *E. Gehrcke.* Über den Einfluß elektrischer Schwingungen auf die Breite der feinsten Spektrallinien. V.D.P.G. 6. 344.

**1554.** *W. Lébédinski.* Sur la diminution de la période des oscillations électriques qui accompagne la diminution du rayonnement. J.P. (4) 4. 92.

**1555.** *Lord Rayleigh.* On the electrical vibrations associated with thin terminated conducting rods. P.M. (6) 8. 105.

**1556.** *H. M. Macdonald.* On the electric vibrations associated with thin terminated conducting rods P.M. (6) 8. 276.

**1557.** *H. Starke.* Demonstration von Kondensatorschwingungen mit dem Summer. V.D.P.G. 7. 20.

**1558.** *N. Papalexi.* Ein Dynamometer für schnelle elektrische Schwingungen, Theorie und Versuche. A.P.L. (4) 14. 756.

Siehe auch 498; 1145; 1172; 1173; 1460; 1537; 1704; 3066; 3175; 3209.

## Elektrische Wellen.

**1559.** *Arnò.* Onde hertziane a campo Ferraris. A.A.E.I. 1904. Nr. 3—4.

**1560.** *R. Arnò.* Rivelatore di onde hertziane a campo Ferraris. N.C.P. (5) 8. 118.

**1561.** *E. Castelli.* Ricerche sperimentali sugli armonici delle onde elettriche stazionarie. N.C.P. (5) 8. 161.

**1562.** *A. E. H. Love.* The advancing front of the train of waves emitted by a theoretical Hertzian oscillator. P.R.S. L. 74. 73.

**1563.** *W. S. Franklin.* Electrical waves and the behaviour of long-distance transmission in lines. J.F.I. 160. 51.

**1564.** *W. Seitz.* Die Wirkung eines unendlich langen Metallzylinders auf Hertzsche Wellen. A.P.L. (4) 16. 746.

**1565.** *J. A. Fleming.* The propagation of electric waves along spiral wires and an appliance for measuring the length of waves used in wireless telegraphy. P.M. (6) 8. 417.

**1566.** *A. W. Conway.* On the reflection of electric waves by a moving plane conductor. T.S.D. (2) 8. 95.

**1567.** *Hensing.* Einfache Versuchsanordnung zum Nachweis der Zurückwerfung elektrischer Wellen und zur Erklärung der Fritterwirkung. Z.P. 17. 222.

**1568.** *O. Berg.* Zur Messung der Absorption elektrischer Wellen. A.P.L. (4) 15. 307.

**1569.** *V. Buscemi.* Trasparenza dei liquidi per le onde hertziane. N.C.P. (5) 9. 105.

**1570.** *G. P. Grimaldi* e *G. Accolla.* Influenza delle onde elettriche e del magnetismo sull' isteresi elastico del ferro. N.C.P. (5) 7. 204.

**1571.** *C. Garibaldi.* Influenza delle onde hertziane sulla magnetizzazione dell' acciaio. A.A.E.I. 9. 23.

**1572.** *C. Schaefer.* Über die elektrischen Eigenschaften von Resonatorengittern. A.P.L. (4) 16. 106.

**1573.** *Tissot.* Bolomètres utilisés comme détecteurs d' ondes électriques. J. P. (4) 3. 524.

Siehe auch 1619; 1661; 1698; 2283; 2525; 2969; 2970; 3048; 3179; 3648.

## Elektronentheorie.

**1574.** *M. Abraham.* Die Grundhypothesen der Elektronentheorie. P.Z. 5. 576.

**1575.** *W. S. F.* The electron theory. E.R. 45. 18.

**1576.** *A. Sommerfeld.* Zur Elektronentheorie I—II. N.G.G. 1904. 99. 363.

**1577.** *A. Wilkens.* Zur Elektronentheorie. V.A.G. 39. 209.

**1578.** *W. Wien.* Zur Elektronentheorie. P.Z. 5. 393.

**1579.** *H. J. Reiff.* Die Elektronentheorie der Elektrizität. D.M. 13. 139; 153; 167; 177.

**1580.** *A. Sommerfeld.* Über die Mechanik der Elektronen. V.I.M.C. 3. 417.

**1581.** *H. Poincaré.* Sur la dynamique de l'électron. C.R. 140. 1504.

**1582.** *S. H. Burbury.* On the electric inertia. P.M. (6) 9. 243.

**1583.** *O. Heaviside.* The transverse momentum of an electron. N. 72. 429.

**1584.** *A. Sommerfeld.* Vereenvoudigde afleiding van het veld van en de krachten werkende op een electron bij willekeurige beweging. C.A.A. 13. 431.

**1585.** *M. Abraham.* Sopra un' applicazione del metodo di Riemann alla integrazione delle equazioni differenziali della teoria degli elettroni. R.A.L.R. 14A. 7.

**1586.** *H. Lorentz.* De beweging der electronen in de metalen. C.A.A. 13. 493; 565; 710.

**1587.** *H. A. Lorentz.* Le mouvement des électrons dans les métaux. A.N. (2) 10. 336.

**1588.** *A. W. Conway.* The field of force due to a moving electron. P.L.M.S. (2) 1. 154.

**1589.** *A. H. Bucherer.* Die Theorie der Elektronenbewegung. S.N.G.B. 1905. 34.

**1590.** *A. H. Bucherer.* Das Feld eines rotierenden Elektrons. P.Z. 6. 225.

**1591.** *A. H. Bucherer.* Die Rotation eines Elektrons mit Volumladung. P.Z. 6. 269.

**1592.** *O. Heaviside.* The radiation from an electron describing a circular or elliptic orbit. N. 69. 293; 342.

**1593.** *H. Nagaoka.* Mutual action of electron atoms. P.T.M. 2. 316.

**1594.** *P. Drude.* Optische Eigenschaften und Elektronentheorie. Z.W.P. 3. 1.

**1595.** *M. Abraham.* The reaction of the radiation on a moving electron. R.B.A. 74. 436.

**1596.** *A. Schuster.* On the number of electrons conveying the conduction currents in metals. P.M. (6) 7. 151.

**1597.** *P. Langevin.* Magnétisme et théorie des électrons. A.C.P. (8) 5. 70.

**1598.** *E. Kohl.* Über die elektromagnetische Energie der Elektronenbewegung. A.P.L. (4) 15. 531.

Siehe auch 564; 699; 711; 1035; 1146; 1702; 2971; 2987; 3086; 3141; 3170; 3201; 3659.

### Thermoelektrizität.

**1599.** *G. de Metz.* L'inversion thermoélectrique et le point neutre. C.R. 139. 447.

**1600.** *Ponsot.* Pouvoir thermoélectrique et effet Thomson. C.R. 140. 1585.

**1601.** *E. Lecher.* Über den Thomsoneffekt. A.A.W. 1905. 278.

**1602.** *E. H. Hall.* Measurement of various thermal and electrical effects, especially the Thomson effect, in soft iron. P.A.Bo. 41. 28.

**1603.** *S. C. Laws.* Experiments on the Thomson effect in alloys of Bi and Sn. P.C.P.S. 12. 179.

**1604.** *M. La Rosa.* Il fienomeno Peltier al punto neutro di una coppia termoelettrica. R.A.L.R. (5) 13B. 167.

**1605.** *E. G. Bausenwein.* Änderung des Peltiereffektes mit der Temperatur. S.A.W. 113. 663.

**1606.** *C. W. Waidner* and *G. K. Burgess.* On the temperature of the arc. B.B.S.W. 1. 109.

**1607.** *G. Granqvist.* Über die Bedeutung des Wärmeleitungsvermögens der Elektroden bei dem elektrischen Lichtbogen. N.A.U. (3) 20.

**1608.** *S. Sano.* An extension of Fontains theory of the heat of vaporization of a liquid charged with electricity. P.T.M. 2. 277.

**1609.** *J. Radakovits.* Ionisierung der Gase durch galvanisch glühende Drähte. S.A.W. 114. 759.

**1610.** *A. Abt.* Thermoelektrische Kraft einiger Metalloxyde und Sulfide in Verbindung mit einander und mit einfachen Metallen bei 100° Temperaturunterschied der Berührungsstellen. B.M.N. 17. 292.

**1611.** *A. Szarvassi.* Über elektromotorische Kräfte und die reversibeln Wärmestörungen des elektrischen Stromkreises. A.P.L. (4) 17. 248.

**1612.** *A. Gruse.* Über die elektrische Kataphorese des destillierten Wassers durch poröse Tondiaphragmen (Pukallmasse) insbesondere ihre Abhängigkeit von Temperatur und Stromdichte. P.Z. 6. 201.

**1613.** *M. v. Smoluchowski.* Zur Theorie der elektrischen Kataphorese und der Oberflächenleitung. P.Z. 6. 529.

**1614.** *A. Bernini.* Sull' infiuenza della temperatura nella conducibilità elettrica del litio. N.C.P. (5) 8. 269.

**1615.** *L. W. Hartmann.* The conduction losses from carbon filaments when heated to incandescence in various gases. P.R 20. 322.

**1616.** *F. Schneider.* Courant thermoélectrique développé par l'échauffement d'un fil. A.S.G. (4) 18. 59.

**1617.** *C. E. Guye* et *A. Bernoud.* Sur une nouvelle méthode électrothermique pour mesurer la puissance moyenne des courants de fréquence élevée. A.S.G. (4) 17. 51.

**1618.** *H. E. Schmitz.* Der thermoelektrische Stromkreis dreier Metalle. P.Z. 6. 443.

**1619.** *A. D. Cole.* The tuning of thermoelectric receivers for electric waves. P.R. 20. 268.

**1620.** *W. Moldenbauer.* Über Beziehungen zwischen elektrolytischen Vorgängen und der Elektrodentemperatur. Z.E. 11. 307.

**1621.** *D. Berthelot.* Sur le point de fusion de l'or. C.R. 138. 1153.

**1622.** *A. de Forest Palmer.* Thermoelectric determination of temperatures between 0 and 200° centigrade. P.R. 21. 65.

Siehe auch 1272; 1705; 2920; 2990; 3043; 3045; 3171; 3173; 3197; 3219; 3813; 3833; 3857.

### Elektrizitätsmessung.

**1623.** *W. Einthoven.* Une nouvelle méthode d'amortissement des oscillations dans les indications galvanométriques. A. N. (2) 10. 137.

**1624.** *E. Lohr.* Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit des Na mit der Induktionswage. S.A.W. 113. 911.

**1625.** *M. v. Pirani.* Die Verwertung des Telephons bei Gleichstrommessungen. D.M. 12. 253.

**1626.** *W. E. Sumpner.* The measurement of small differences of phase. P. M. (6) 9. 155; P.P.S.L. 19. 415.

**1627.** *H. Ho.* The use of differentially wound telephone receiver in electrical measurements. J.C.E.T. 2. 75.

Siehe auch 3028; 3080; 3099; 3127; 3128; 3184.

### Magnetismus.

**1628.** *P. Langevin.* Sur la théorie du magnétisme. C.R. 139. 1204; S.F.P. Nr. 222. 3.

**1629.** *H. du Bois.* Magnetokinetische Untersuchungen. A.P.L. (4) 4. 209.

**1630.** *J. J. Thomson.* The magnetic properties of systems of corpuscles describing circular orbits. P.M. (6) 6. 673.

**1631.** *W. Trenkle.* Über das magnetische Verhalten von Fe-pulver verschiedener Dichte. S.P.M.E. 37. 361.

**1632.** *P. Weiss.* Les propriétés magnétiques de la pyrrhotine. A.S.G. (4) 19. 537; J.P. (4) 4. 469.

**1633.** *P. Weiss.* Propriétés magnétiques de l'élément simple de la pyrrhotine. C.R. 140. 1532.

**1634.** *P. Weiss.* La pyrrhotine ferromagnétique dans le plan magnétique et paramagnétique perpendiculairement à ce plan. C.R. 140. 1587.

**1635.** *E. Hoppe.* Zur Konstitution der Magnete. D.V.N. 76B. 20; P.Z. 5. 650; V.D.P.G. 6. 234.

**1636.** *R. Gans* und *R. H. Weber.* Was bleibt in einem permanenten Magneten konstant? A.P.L. (4) 16. 172.

**1637.** *A. Anderson.* On the force of a magnetic particle in a magnetic field. P.M. (6) 8. 38.

**1638.** *A. Hay.* Über die Stromlinienmethode bei der Untersuchung zweidimensionaler magnetischer Pole. P.Z. 6. 290.

**1639.** *G. W. Walker.* On tresses in a magnetostatic field. P.M. (6) 7. 399.

**1640.** *J. Becquerel.* Action du champ magnétique sur les rayons $N$ et $N_1$. C. R. 138. 1586.

**1641.** *S. Sano.* On the equilibrium of a fluid consisting of only one independent constituent and in one place when placed in a magnetic field. P.T. M. 2. 248.

**1642.** *S. Sano.* On the equilibrium of a liquid with its vapour in a magnetic field. P.T.M. 2. 265.

**1643.** *F. Bidlingmaier.* Influence of torsion in suspended magnets. T.M.W. 9. 157.

**1644.** *H. Graziadei.* Über die durch die Entfernungen der Oxydschichte bewirkten Änderungen magnetischer Eigenschaften von *Fe*, *Ni* und *Co*-blechen. S. A.W. 114. 843.

**1645.** *P. Vaillant.* De l'influence de la concentration sur les propriétés magnétiques des solutions de cobalt. C.R. 140. 1632.

**1646.** *P. E. Shaw.* The magnetic expansion of some of the less magnetic metals. P.R.S.L. 72. 370.

**1647.** *D. Mazzotto.* Variazioni magnetiche del ferro stagionato per nuove stagionature e ricotture. N.C.P. (5) 9. 313.

**1648.** *R. Jouast.* Recherches effectuées au laboratoire central d'électricité sur les phénomènes de viscosité magnétique dans les aciers doux industriels et leur influence sur les méthodes de mesure. B.E. (2) 4. 715.

Siehe auch 720; 873; 874; 1422; 3547; 3552; 3554; 3558; 3559.

### Magnetisierung.

**1649.** *A. Bernini.* Über die Magnetisierung einiger Alkalimetalle. P.Z. 6. 109.

**1650.** *N. Pezzini.* Magnetizzazione e trazione. R.I.L. (2) 38. 463.

**1651.** *Brillouin.* Aimantation au contact et structure cristalline. A.C.P. (8) 3. 305.

**1652.** *W. M. Thornton.* The magnetization of iron in bulk. P.M. (6) 8. 620; P.P.S.L. 19. 343.

**1653.** *K. Honda* and *S. Shimizu.* On the magnetization and the magnetic change in length in ferromagnetic metals and alloys at temperatures ranging from — 186°C to + 1200°C. J.U.T. 20. Nr. 6.

**1654.** *G. Meslin.* Sur le coefficient d'aimantation spécifique et la susceptibilité magnétique des sels. C.R. 140. 782.

Siehe auch 832; 1571; 1666; 1724; 1725; 1727; 1729; 3550; 3555.

**Magnetischer Strom.**

Siehe 3546.

**Magnetische Kraftlinien.**

Siehe 3557.

**Magnetische Hysteresis.**

**1655.** *P. Duhem.* De l'hystérésis magnétique produite par un champ oscillant superposé à un champ constant. C.R. 140. 1216; 1370.

**1656.** *C. Maurain.* Étude et comparaison des procédés de réduction de l'hystérésis magnétique. J.P. (4) 3. 417.

**1657.** *T. R. Lyle.* Investigation of the variations of magnetic hysteresis with frequency. P.M. (6) 9. 102; P.P.S.L. 19. 370.

**1658.** *P. Weiß.* L'hystérèse d'aimantation de la pyrrhotine. C.R. 141 245.

**1659.** *C. E. Guye* et *A. Schidlof.* L'hystérésis magnétique aux fréquences élevées dans le Fe, le Ni et les aciers au Ni. A.S.G. (4) 18. 576; 19. 60. 159.

**1660.** *H. E. J. G. du Bois.* Hysteretische oriëntatie-verschijnselen. C.A.A. 12. 758.

**1661.** *R. Arnò.* Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campo Ferraris sotto l'azione di correnti continue interrotte ed alternate e di onde Hertziane. N.C.P. (5) 9. 476.

Siehe auch 1698; 1701; 3034; 3557.

**Magnetostriktion.**

**1662.** *F. Kolacek.* Magnetostriktion. P.Z. 6. 143. — *S. Sano.* 505.

**1663.** *R. Gans.* Zur Heydweillerschen Kritik meiner Formeln betreffend „Magnetostriktion ferromagnetischer Körper". A.P.L. (4) 14. 638; 15. 418. — *A. Heydweiller.* 14. 1036.

**1664.** *S. Sano.* Note on Heydweiller's, Gans's and Koláček's papers on magnetostriction. P.T.M. 2. 184. 207.

**1665.** *S. Sano.* Bemerkung zu den Arbeiten von F. Kolaček, A. Heydweiller und R. Gans über Magnetostriktion. P.Z. 5. 812.

**1666.** *H. Nagaoka* et *K. Honda.* Sur l'aimantation et la magnétostriction des aciers au nickel. J.P. (4) 3. 613. — *E. Guillaume.* 621.

**Elektromagnetismus.**

**1667.** *L. Donati.* Sui sistemi di unità elettromagnetiche. R.I.B. (2) 6. 71.

**1668.** *A. Sommerfeld.* Bezeichnung und Benennung der elektromagnetischen Größen in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften. P.Z. 5. 467.

**1669.** *L. Donati.* Sui vettori elettromagnetici. M.I.B. (5) 9. 477.

**1670.** *A. Righi.* Ancora sulla questione del campo magnetico generato dalla convezione elettrica. R.I.B. (2) 6. 47; M.I.B. (6) 2. 47.

**1671.** *C. Chree.* The law of action between magnets and its bearing on the determination of the horizontal component of the Earth's magnetic force with unifilar magnetometers. P.P.S.L. 19. 273.

**1672.** *F. Ehrenhaft.* Die elektromagnetischen Schwingungen des Rotationsellipsoides. S.A.W. 113. 273.

**1673.** *H. Zahn.* Über die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in verschiedenen Metallen. A.P.L. (4) 14. 886.

**1674.** *H. Zahn.* Über die transversalen galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in verschiedenen Metallen. A.P.L. (4) 16. 148.

**1675.** *H. A. Lorentz.* Electromagnetische verschijnselen in een stelsel dat zich met willekeurige snelheid kleiner dan die von het licht beweegt. C.A.A. 13. 986.

**1676.** *J. B. Whitehead.* Magnetic effect of electric displacement. P.R. 21. 111.

**1677.** *A. Righi.* Sui campi elettromagnetici e particolarmente su quelli creati da cariche elettriche o da poli magnetici in movimento. M.I.B. (5) 9. 151.

**1678.** *J. B. Whitehead.* Über den magnetischen Effekt der elektrischen Verschiebung. P.Z. 6. 474.

**1679.** *H. Pellat.* Champ magnétique auquel est soumis un corps en mouvement dans un champ électrique. C.R. 140. 229.

**1680.** *Axmann.* Ein eigentümliches Drehmoment im wollenförmigen magnetischen Felde. H.E.B. 17. 39.

**1681.** *S. Sano.* Über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten in einem elektromagnetischen Felde. P.Z. 6. 566.

**1682.** *C. Fortin.* Sur la déviation électrostatique des rayons magnétocathodiques. C.R. 138. 1594.

**1683.** *G. Picciati.* Flusso di energia e radiazione nel campo elettromagnetico generato dalla convezione elettrica. N.C.P. (5) 7. 374.

**1684.** *S. J. Barnett.* Energiedichte, Spannung und Druck im Magnetfelde. P.Z. 6. 8.

**1685.** *G. W. Walker.* On the drift produced in ions by electromagnetic disturbances and a theory of radioactivity. P.R.S.L. 74. 414.

**1686.** *P. Langevin.* Sur l'origine des radiations et l'inertie électromagnetique. J.P. (4) 4. 165.

**1687.** *G. Schendell.* Einfluß des elektrischen Feldes auf auskristallisierende wässerige Salzlösungen. N.W. (2) 3. 910.

**1688.** *R. S. Willows.* Action of a magnetic field on the discharge through a gas. P.P.S.L. 19. 453.

**1689.** *K. Ogawa.* On the elektromagnetic screening effect of metallic conductors. M.C.K. 1. 140.

**1690.** *G. Picciati.* Sull' influenza dei dielettrici solidi sul campo magnetico generato dalla convezione elettrica. N.C.P. (5) 7. 267.

**1691.** *O. Heaviside.* Electromagnetics in a moving dielectric. N. 71 606.

**1692.** *E. Kolacek.* Die ponderomotorichen Kräfte, welchen ein homogenes Dielektrikum in einem elektromagnetischen Felde unterworfen ist. P.Z. 5. 455. — *R. Gans.* 627.

**1693.** *C. Carpini.* Sulla variazione di resistenza del bismuto in un debole campo magnetico. N.C.P. (5) 8. 171; R.A.L.R. (5) 13B. 159.

**1694.** *C. Carpini.* Über die Widerstandsänderung des Bi durch kleine magnetische Kräfte. P.Z. 5. 819.

**1695.** *R. Hargreaves.* Radiation and electromagnetic theory. P.M. (6) 9. 313. 425.

**1696.** *P. V. Bevan.* A lecture experiment to illustrate the effect of a straight current on a magnetic pole. P.C.P.S. 12. 212.

**1697.** *R. Arnò.* Sul comportamento dei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue. R.I.L. (2) 38. 438.

**1698.** *R. Arnò.* Su gli effetti di correnti continue interrotte ed alternate e di onde hertziane sul ritardo di magnetizzazione nei corpi magnetici in campi Ferraris. R.A.L.R. (5) 14A. 368.

**1699.** *G. Picciati.* Campo elettromagnetico dovuto ad una corrente costante elicoidale. R.A.L.R. (5) 14A. 323.

**1700.** *O. M. Corbino.* Sulla produzione di campi rotanti per mezzo di correnti di scarica sinusoidale o smorzate. N.C.P. (5) 7. 175.

**1701.** *G. Grassi.* Sulla energia dissipata per isteresi e per correnti parassite. R.A.N. (3) 10. 151.

**1702.** *E. T. Whittaker.* On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of 2 scalar potential functions. P.L.M.S. (2) 1. 367.

**1703.** *G. Owen.* On the magnetic deflexion of the negative current of electricity from a hot platinum wire at low pressures. P.C.P.S. 12. 493.

**1704.** *F. Hack.* Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines linearen Oszillators. A.P.L. (4) 14. 539.

Siehe auch 866; 1514; 1571; 1597; 1598; 1648; 1706; 1709; 1796; 3553; 3556.

### Hallsches Phänomen.

**1705.** *H. Rausch v. Traubenberg.* Über den Halleffekt des Wismuts bei hohen Temperaturen. A.P.L. (4) 17. 78.

### Induktion.

**1706.** *J. A. Vollgraff.* Considérations sur l'induction unipolaire et les équations fondamentales de l'électromagnétisme. A.N. (2) 9. 340. — *Lorentz.* 380b.

**1707.** *A. H. Taylor.* The comparison of inductances with great precision. P.R. 20. 151.

**1708.** *E. B. Rosa* and *F. W. Grover.* The absolute measurement of induction. B.B.S.W. 1. 125.

**1709.** *E. Almansi.* Intorno ai problemi dell' equilibrio elettrico e dell' induzione magnetica. R.A.L.R. (4) 13B. 72.

**1710.** *F. C. Frisbie.* The effect of pressure on magnetic induction. P.R. 18. 432.

**1711.** *A. Broca.* Sur le pouvoir inducteur spécifique des métaux. C.R. 140. 1677.

**1712.** *T. Boggio.* Induzione prodotta da un campo magnetico qualunque sopra una sfera isotropa. R.I.L. (2) 37. 123.

**1713.** *G. F. C. Searle.* On the calculation of capacities in terms of the coefficients of electrostatic induction. P.C.P.S. 12. 378.

**1714.** *W. J. Raymond.* The measurement of inductance and capacity by means of the differential ballistic galvanometer. P.R. 21. 90.

**1715.** *G. W. Middlekauff.* The effect of capacity and selfinduction upon wavelength in the spark spectrum. A.J.C. 21. 116.

**1716.** *L. Hermann.* Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen. A.P.L. (4) 17. 501; 779.

**1717.** *A. Heydweiller.* Zur Bestimmung der Selbstinduktion von Drahtspulen. A.P.L. (4) 15. 179.

**1718.** *B. Strasser.* Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden. A.P.L. (4) 17. 763.

**1719.** *Iliovici.* Sur une méthode propre à mesurer les coefficients de selfinduction. C.R. 138. 1411.

**1720.** *M. La Rosa.* Sulla misura di piccoli coefficienti d'autoinduzione. R. A.L.R. (5) 14 A. 621.

**1721.** *H. Nagaoka.* The coefficient of mutual induction of 2 cooxal circular coils. P.T.M. 2. 233.

**1722.** *E. Grimsehl.* Induktion in parallelen Leitern. Z.P. 17. 291.

Siehe auch 857; 1436; 1512; 2466; 2552; 2923; 2952; 2972; 2977; 2984; 2989; 3013; 3014; 3018; 3033; 3046; 3066; 3084; 3095; 3106; 3126; 3185; 3187; 3545.

### Thermomagnetismus.

**1723.** *O. Mazzotto.* Stagionatura magnetica del ferro a temperature superiori alla ordinaria. N.C.P. (5) 7. 393; 8. 5.

**1724.** *C. G. Knott.* Magnetization and resistance of Ni wire at high temperatures. T.R.S.E. 41. 39.

**1725.** *G. Schmaltz.* Über den Einfluß der Magnetisierung auf die thermische Leitfähigkeit des Ni. A.P.L. (4) 16. 398; 792.

**1726.** *D. Korda.* Einfluß des Magnetismus auf die Wärmeleitungsfähigkeit des Fe. B.M.N. 17. 313.

Siehe auch 1653; 1673; 1674; 1705.

### Magnetische Messungen.

**1727.** *G. Meslin.* Mesure des coefficients d'aimantation et étude du champ magnétique. C.R. 141. 102.

**1728.** *H. T. Simon* und *E. Madelung.* Über ein neues magnetometrisches Verfahren zur Messung magnetischer Momente. P.Z. 5. 410.

**1729.** *G. Guarini.* Apparat zur Messung der Magnetisierung schwach magnetischer Körper. D.M. 13. 3.

**1730.** *F. Paschen.* Apparat zur Messung magnetischer Feldstärken. P.Z. 6. 371.

### Geschichte der Astronomie.

**1731.** *J. Klug.* Simon Marius aus Gunzenhausen und Galileo Galilei. A. A.M. 22. 387.

### Theoretische Astronomie.

**1732.** *F. Ristenpart.* Gibt es einen Punkt der Ruhe im Weltall? H.E.B. 17. 130.

**1733.** *T. J. J. See.* Repulsive forces in nature. P.A. 10. 505. — *J. A. Hardcastle.* O. 26. 177.

**1734.** *L. Bourget.* Note sur la méthode de la variation des constantes arbitraires. B.A. 21. 219.

**1735.** *A. Hall.* Note on elliptic motion. M.N.A.S. 64. 540.

**1736.** *C. V. L. Charlier.* On the singular curve of elliptic motion. M.L.A.O. Nr. 22.

**1737.** *H. G. Block.* Die singuläre Kurve der hyperbolischen Bewegung. A.M.A.F. 1. 467; M.L.A.O. Nr. 23.

**1738.** *H. Bourget.* Sur les nombres de Cauchy. B.A. 22. 225.

Siehe auch 2727.

### Bewegung der Himmelskörper.

Siehe 1735; 1736.

### Bahnbestimmungen.

**1739.** *A. O. Leuschner.* A method of computing orbits in rectangular coordinates. S. (2) 17. 331.

**1740.** *D. A. Pio.* Short method for the calculation of the orbits of celestial bodies. M.N.A.S. 64. 134.

**1741.** *A. O. Leuschner.* Note on the short method of determining orbits from 3 observations. S. (2) 17, 331.

**1742.** *A. O. Leuschner.* The solution of on orbit, irrespective of parallax and aberration. S. (2) 17. 332.

**1743.** *J. Sterba.* Elementare Bahnbestimmung eines Planeten. Z.H. 36. 321.

**1744.** *G. Gruß.* Ein Beitrag zum algebraischen Teile des Problems der Bahnbestimmung eines Planeten aus 3 Beobachtungen. B.I.P. 9. 37; M.A.T. P. 1904. Nr. 5.

**1745.** *L. Weinek.* Graphische Nachweise zur Olbersschen Methode der Kometenbahnbestimmung, zum Satz der konstanten Flächengeschwindigkeit und zur Ephemeridenrechnung. S.A.W. 113. 987.

**1746.** *J. Bauschinger.* Über das Problem der Bahnverbesserung. V.A.R.I. 23.

**1747.** *A. Orloff.* Sur la détermination des corrections des éléments d'une orbite. B.A. 22. 291.

**1748.** *R. Radau.* Réflexions sur les méthodes de correction des orbites. B. A. 21. 401.

**1749.** *W. A. Hamilton.* On the convergence of the series used in the determination of the elements of parabolic orbits. A.J.B. 23. 49.

**1750.** *J. Weeder.* Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening von eene elliptische baan uit 3 waarnemingen. C.A.A. 13. 811.

**1751.** *F. A. Moulton.* The true radii of convergence of the expression for the ratios of the triangles when developed as power series in the time-intervals. A.J.B. 23. 93.

Siehe auch 1753; 1896; 1903.

**Keplersches Problem.**

**1752.** *T. Levi-Civitá.* Sopra la equazione di Kepler. A.N.K. 165. 313.

**1753.** *H. C. Plummer.* Note on the use of Mr. Aldis tables of the function $\frac{1}{2}(\vartheta + \cos\vartheta)$ in determining the elements of an orbit. M.N.A.S. 63. 147.

**Störungen.**

**1754.** *H. Bourget.* Sur le théorème de Poisson.. A.T. (2) 6. 167.

**1755.** *G. Morera.* Sulle equazioni dinamiche di Hamilton. A.A.T. 39. 262.

**1756.** *Backlund.* Sur la méthode horistique de Gyldén. B.A. 21. 289. — *H. Poincaré.* 292.

**1757.** *H. Poincaré.* Sur la méthode horistique de Gyldén. A.M. 29. 235.

**1758.** *H. Poincaré.* Über die horistische Methode Gyldéns. P.Z. 5. 385.

**1759.** *R. T. A. Innes.* Some developements in terms of the mean anomaly. M.A.S. 54. 137.

**1760.** *A. Wilkens.* Zur Berechnung der Transzendenten von Laplace. A.N.K. 166. 209.

**1761.** *G. W. Hill.* Developement of functions in power series from special values. A.J.B. 24. 123.

**1762.** *F. Folie.* Sur de nouveaux termes du 2. ordre provenant du mouvement systématique. B.A.B. 1904. 309.

**1763.** *E. Strömgren.* Analytische Störungsausdrücke für parabolische Bahnen. A.N.K. 169. 1.

**1764.** *E. W. Brown.* On the smaller perturbations of the lunar arguments. T.S.M.Am. 5. 279.

**1765.** *J. N. Stockwell.* Theory of the mutual perturbation of planets moving at the same mean distance from the sun and its bearing on the constitution of Saturn's ring and the cosmogony of Laplace. A.J.B. 24. 35.

**1766.** *A. Hall.* Note on the secular perturbation of the planets. A.J.B. 23. 10; S. (2) 17. 108.

**1767.** *R. Bohlin.* Formeln und Tafeln zur graphischen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten. N.A.U. (3) 17. Nr. 4.

**1768.** *E. Doolittle.* The secular perturbation of the Earth arising from the action of Saturn. A.J.B. 24. 104.

**1769.** *J. Park Mc Callie.* An example in periodic orbits, the second order perturbations of Jupiter and Saturn independent of the eccentricities and of the mutual inclination. A.J.B. 23. 133.

**1770.** *A. Gaillot.* Addition à la théorie du mouvement de Saturne de Le Verrier. — Application intégrale de la méthode d'interpolation, recherches complémentaires, tables rectifiées du mouvement de Saturne. A.O.P. 24.

**1771.** *E. Doolittle.* Secular perturbations of the Earth from the action of Uranus. A.J.B. 24. 130.

**1772.** *R. A. Sampson.* A description of Adam's manuscripts on the perturbations of Uranus. M.A.S. 54. 143.

**1773.** *Simonin.* Perturbations séculaires de la longitude moyenne; cas particulier d'Hécube. B.A. 22. 228.

**1774.** *E. Strömgren.* Über die gegenseitigen Störungen zweier einander nahekommenden kleinen Planeten. A.N.K. 165. 17.

**1775.** *G. Norén.* Über die sekularen Perihelstörungen der kleinen Planeten. M.L.A.O. 20.

**1776.** *A. Wilkens.* Über die Störungen der Planetoiden und Kometen durch Anziehung des Planetoidenringes. A.N.K. 169. 49.

**1777.** *A. C. Plummer.* On Jacobi's method of facilitating the numerical solution of equations arising in the theory of secular perturbations. M.N.A.S. 63. 90.

Siehe auch 1577; 1784; 1861; 1864; 1908.

**Vielkörperproblem.**

**1778.** *N. Delaunay.* Sur le problème des 3 corps. V.I.M.C. 3. 398.

**1779.** *C. V. L. Charlier.* Über die trigonometrische Form der Integrale des Problems der 3 Körper. A.M.A.F. 1. 449; M.L.A.O. Nr. 24.

**1780.** *H. v. Zeipel.* Recherches sur les solutions périodiques de la 3. sorte dans le problème des 3 corps. N.A.U. (3) 20.

1781. *G. Cantor.* Ein Brief von Carl Weierstraß über das Dreikörperproblem. R.C.M.P. 19. 305.

1782. *H. Poincaré.* Sur la méthode horistique de Gyldén. C.R. 138. 933.

1783. *H. Buchholz.* Die Gyldénsche horistische Integrationsmethode des Problems der drei Körper und ihre Konvergenz. N.A.H. 81. 129.

1784. *H. Buchholz.* Fortgesetzte Untersuchung der Bewegung vom Typus $^2/_3$ im Problem der 3 Körper auf Grund der Gyldénschen Störungstheorie. D.A.W. 77. 1.

1785. *H. Buchholz.* Fortgesetzte Untersuchung der Bewegung vom Typus $^2/_3$ im Problem der 3 Körper. A.A.W. 41. 93.

1786. *E. Strömgren.* Ein asymptotischer Fall im Dreikörperproblem. A.N.K. 168. 105.

1787. *T. Levi-Cività.* Sur la résolution qualitative du problème restreint des 3 corps. V.I.M.C. 3. 402.

1788. *T. Levi-Cività.* Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei 3 corpi. A.D.M. (3) 9. 1.

1789. *E. O. Lovett.* The problems of 3 or more bodies with prescribed orbits. S. (2) 17. 108.

1790. *E. O. Lovett.* Singular trajectories in the restricted problem of 4 bodies. A.D.M. (3) 11. 1.

1791. *G. Dillner.* Mémoire sur la solution analytique du problème des *n* corps. N.A.U. (3) 20.

1792. *I. L. Bennet.* On the reduction of the problem of *n* bodies. M.M. 34. 113.

1793. *E. O. Lovett.* Special periodic solutions of the problem of *n* bodies. S. (2) 17. 107.

1794. *P. Pizzetti.* Sur le problème des *n* corps alignés. M.y R.M. 19. 169.

## Erdbewegung.

1795. *C. Flammarion.* Le mouvement de la Terre. B.S.A.F. 18. 116.

1796. *P. Langevin.* Sur l'impossibilité physique de mettre en évidence le mouvement de translation de la terre. C.R. 140. 1171.

1797. *F. Biske.* Die Erdbewegung und der Äther. A.N.K. 165. 299; A.P.L. (4) 14. 1004.

1798. *A. A. Michelson.* Relative motion of Earth and aether. P.M. (6) 8. 716.

1799. *M. Brillouin.* Le mouvement de la terre et la vitesse de la lumière. C.R. 140. 1674.

1800. *F. Folie.* Première détermination des constantes de la libration terrestre. B.A.B. 1904. 1193.

1801. *F. Folie.* Preuve physique de la libration terrestre. B.A.B. 1904. 941.

Siehe auch 724—26; 1768; 1771.

## Erddrehung.

1802. *H. Poincaré.* La terre tourne-t-elle? B.S.A.F. 18. 216.

1803. *A. Pansiot.* Sur le jour sidéral. C.R. 141. 342.

1804. *J. R. Sutton.* A possible periodic variation in the Earth's rotation. O. 26. 360.

1805. *N. N.* Un appareil pour mesurer la vitesse de rotation de la Terre. R.G.O. 15. 881.

1806. *A. Föppl.* Über einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehung der Erde. P.Z. 5. 416; S.A.M. 34. 3.

Siehe auch 1835—37; 1892.

## Präzession.

1807. *Herkless.* Precession. J.B.A.A. 13. 235.

1808. *A. R. Sandemann.* Die Präzession der Nachtgleichen und Hipparch. A.R.L. 5. 31.

1809. *H. S. Davis.* Secular variation of precession from Besselian star constants. A.N.K. 166. 73.

## Nutation.

1810. *F. Folie.* Expression correctes de l'heure et des coordonnées des étoiles dans le système de l'axe instantané. M.N.A.S. 63. 444.

1811. *F. Folie.* Dernière réplique à M. Ch. Lagrange. B.A.B. 1904. 71.

1812. *Folie.* Preuve purement physique de la nutation diurne. A.S.B. 28A. 70.

## Aberration.

1813. *L. Weinek.* Die Lehre von der Aberration der Gestirne. D.A.W. 77. 145.

1814. *L. Weinek.* Über die Erscheinung der Fixstern-Aberration. D.W.B. 3. 129.

1815. *F. Schlesinger.* The difficulty of determining the constant of aberration. P.A.S.F. 15. 46.

1816. *S. C. Chandler.* The probable value of the constant of aberration. A.J.B. 23. 1.

**1817.** *H. Renan* et *W. Ebert.* Sur une détermination de la constante d'aberration au moyen des observations de 3 étoiles très voisines du pôle. C.R. 140. 1669.

**1818.** *F. Schlesinger.* The constant of aberration and the solar parallax. P.A.S.F. 15. 45.

Siehe auch 992; 1742; 1853; 1912.

### Bewegung von Körpern auf der Erde.

**1819.** *de Sparre.* Note au sujet des mouvements à la surface de la terre. S.M. 33. 65.

**1820.** *H. de la Fresnaye.* Sur la chute des corps. B.S.A.F. 17. 175; 179.

**1821.** *M. Fouché.* Sur la déviation des graves. C.R. 140. 427.

**1822.** *de Sparre.* Au sujet de la déviation des corps dans la chute libre. C.R. 140; 33; 363.

**1823.** *M. Fouché.* Sur la déviation des corps vers le sud et sur la courbure des lignes de force. C.R. 140. 226.

**1824.** *C. Flammarion.* Expériences sur la déviation de la chute des corps faites au Panthéon. B.S.A.F. 17. 329.

**1825.** *A. Denizot.* Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuchs. P.Z. 6. 342.

**1826.** *L. Tesař.* Die Theorie der relativen Bewegung und ihre Anwendung auf Bewegungen auf der Erdoberfläche. P.Z. 6. 556.

Siehe auch 375; 2215; 2224; 2703.

### Foucaultscher Pendelversuch.

**1827.** *G. Schilling.* Der Foucaultsche Pendelversuch. V.V.F.U.W. 9. 22.

**1828.** *N. N.* Der Foucaultsche Pendelversuch. A.R.L. 5. 270; 293.

**1829.** *F. de Coninck.* Le pendule de Foucault. B.S.A.F. 17. 405; 461.

**1830.** *M. de Sparre.* Sur le pendule de Foucault. M.A.Ly. (3) 7. 313.

**1831.** *E. Pasquier.* À propos du pendule de Foucault. B.S.B.A. 8 173. — *A. Flamache* 226. — *M. Dehalu* 242. — *C. Flammarion* B.S.A F. 17. 357.

**1832.** *E. K. Adams.* Foucault pendulum systems. E.W. 43. 1190.

**1833.** *M. Pelnár.* Kterak pohybuje se rovina kyvů při pokuse Foucaultově. (Wie bewegt sich die Schwingungsebene beim Foucaultschen Versuch.) C. 33. 241.

**1834.** *L. Weinhold.* Zur Technik des Foucaultschen Pendelversuches. Z.P. 17. 198.

**1835.** *N. N.* La terra gira. L.A.M. 11. 171.

**1836.** *N. N.* Visible proof of the Earths rotation. P.A. 12. 71.

**1837.** *N. N.* Le pendule de Foucault prouve-t-il quelque chose? B.S.A.F. 17. 29. — *H. Chrétien* 33.

**1838.** *F. Folie.* Périodicité semidiurne des mouvements apparents d'un pendule libre dans le premier vertical. B.A.B. 1904. 1138.

**1839.** *A. Damry.* Le pendule de Foucault et les expériences actuelles au palais de justice de Bruxelles. B.S. B.A. 8. 129.

Siehe auch 375; 1826; 2773.

### Polhöhenschwankungen.

**1840.** *N. N.* Die Schwankung der Erdachse. D.W.B. 5. 250.

**1841.** *W. Förster.* Über die Beobachtung der Bewegungen der Drehungsachse im Erdkörper. M.V.A.P. 13. 51.

**1842.** *H. G. van de Sande Bakhuyzen.* Einige Bemerkungen über die Änderung der Polhöhe. A.N.K. 165. 1.

**1843.** *M. H. H.* Ruchy biegnna ziemi. (Die Schwankungen des Erdpols.) W.W. 23. 337.

**1844.** *T. H. Astbury.* The variation of latitude. J.B.A.A. 13. 320; 359.

**1845.** *W. W. Payne.* Variation of latitude. P.A. 12. 662.

**1846.** *W. G. T.* Latitude variation M.N.A.S. 63. 269.

**1847.** *W. Förster.* Neues in betreff der Beobachtungen über die Veränderung der geographischen Breiten. M.V. A.P. 15. 9.

**1848.** *R. Spitaler.* Periodische Verschiebungen des Schwerpunktes der Erde. S.A.W. 114. 695.

**1849.** *S. Kublin.* Polschwankungen und Erdbeben. D.W.B. 4. 338; 5. 331.

**1850.** *L. Courvoisier.* Kimuras Phänomen und die „jährliche Refraktion" der Fixsterne. A.N.K. 167. 81.

Siehe auch 70; 2154.

### Sonnenparallaxe.

**1851.** *Bouquet de la Grye.* Sur la parallaxe du soleil. C.R. 138. 1369.

**1852.** *W. Heath.* Parallax in declination. O. 26. 105.

**1853.** *B. Weinberg.* Endgültige Ausgleichung der wahrscheinlichsten Werte der Sonnenparallaxe, der Aberrationskonstante, der Lichtgleichung und der Verbreitungsgeschwindigkeit der Störun-

gen im Äther nach den bisherigen Messungen. A.N.K. 165. 133.

**1854.** *F. Küstner.* Eine spektrographische Bestimmung der Sonnenparallaxe. A.N.K. 169. 241.

Siehe auch 1818.

### Sonnenrotation.

Siehe 1892.

### Mondbewegung.

**1855.** *A. C. D. Crommelin.* The path of the moon. Kn.L. 26. 32; 59.

**1856.** *A. Hall.* The lunar theory. S. (2) 19. 150.

**1857.** *E. W. Brown.* Theory of the motion of the moon; containing a new calculation of the expressions for the coordinates of the moon in terms of the time. M.A.S. 54. 1.

**1858.** *E. W. Brown.* On the complexion of the solution of the main problem in the new lunar theory. M.N.A.S. 65. 104.

**1859.** *E. W. Brown.* On the degree of accuracy of the new lunar theory and on the final values of the mean motions of the perigee and node. M.N.A.S. 64. 524.

**1860.** *S. Newcomb.* On the desirableness of a reinvestigation of the problemes growing out of the mean motion of the moon. M.N.A.S. 63. 316.

**1861.** *P. H. Cowell.* On the secular acceleration of the moons mean anomaly. O. 26. 405.

**1862.** *P. H. Cowell.* Analysis of the errors of the moon. O. 26. 347.

**1863.** *P. H. Cowell.* Methods of analysis of moons errors and some results. M.N.A.S. 64. 412; 535; 579; 684.

**1864.** *P. H. Cowell.* The parallactic inequality. M.N.A.S. 64. 694.

**1865.** *P. H. Cowell.* A discussion of the long-period terms in the moon's longitudes. M.N.A.S. 65. 34.

**1866.** *P. H. Cowell.* Methods of correcting moon's tabular longitude. M.N.A.S. 64. 571.

**1867.** *P. H. Cowell.* New empirical term in the moons longitude. M.N.A.S. 64. 838.

**1868.** *F. Hayn.* Selenographische Koordinaten. A.G.L. 29. No. 1.

**1869.** *R. A. Herman.* A derivation of Hill' equation by a direct substitution. M.N.A.S. 63. 571.

**1870.** *F. Hayn.* Die Rotationselemente des Mondes und der Ort von Mösting A. A.N.K. 165. 305.

**1871.** *L. Schulhof.* Sur un nouvel arrangement des tables de la lune. B.A. 21. 369.

**1872.** *E. F. van de Sande-Bakhuyzen.* Onderzoek omtrent de fouten der maanstafels van Hansen-Newcomb in de jaren 1895—1902. C.A.A. 12. 131; 381; 585.

Siehe auch 1764; 1868; 2288—91.

### Libration.

**1873.** *J. Franz.* Friedrich Hayn, Selenographische Koordinaten. V.A.G. 38. 186.

Siehe auch 1800; 1801; 1872.

### Finsternisse.

**1874.** *A. C. D. Crommelin.* Cycles of eclipses. Kn. 26. 202; 224.

Siehe auch 2086.

### Sonnenfinsternisse.

**1875.** *C. D. Terrine.* Some total solar eclipse problems. A.J.C. 20. 331.

**1876.** *G. Floquet.* Sur l'éclipse du soleil du 28 V 00. B.S.S.N. (3) 1. 63.

### Satellitenfinsternisse.

**1877.** *N. Stoyanoff.* Exposée de la méthode de M. C. Glasenapp pour la réduction des observations des éclipses des satellites de Jupiter. A.T. (2) 5. 157.

### Planetendurchgänge.

**1878.** *L. Weinek.* Zur Theorie der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe. S.A.W. 112. 1752.

### Planetenbewegung.

**1879.** *L. Lecornu.* Sur les mouvements planétaires. A.F. 1903. 115.

**1880.** *F. R. Moulton.* On the motion of the planets. P.A. 11. 284.

**1881.** *A. G. Greenhill.* Étude géométrique du mouvement planétaire. N.A. (4) 4. 337.

**1882.** *E. Le Grand Ray.* Simplification du calcul du rayon vecteur et de l'équation du centre. A.S.G. (4) 19. 493.

**1883.** *J. H. Jeans.* On the vibrations and stability of a gravitating planet. T.R.S.L. 201. 157.

**1884.** *C. A. Laisant.* Une propriété particulière des orbites planétaires. B.S.A.F. 18. 177. — *S. Vallet* 289.

**1885.** *H. Zeipel.* Ett bidrag till kännedomen om de periodiska planetbanorna. A.M.A.F. 1. 267.

**1886.** *G. W. Hull.* The theorems of Lagrange and Poisson on the invariability of the greater axes in an ordinary planetary system. A.J.B. 24. 27.

**1887.** *B. Spariosu.* Die Rotation der Planeten. D.W.B. 4. 346.

**1888.** *A. Sinram.* Berechnung der Planetenabstände. A.R.L. 6. 64.

**1889.** *W. E. Thomas.* Law of the athmospheric strata. Height of the athmosphere. P.A. 11. 196.

**1890.** *P. Lowell.* La rotation de Vénus. C.R. 139. 663.

**1891.** *P. Lowell.* La rotation de Mars. C.R. 1 39. 664.

**1892.** *W. Maunder.* The rotations of the Sun, Jupiter and the Earth and their effects. Kn. 26. 126.

Siehe auch 510; 1743; 1744; 1765—67; 1769; 1770; 1772.

### Satellitenbewegung.

**1893.** *H. C. Plummer.* On oscillating satellites. M.N.A.S. 63. 436; 64. 98.

**1894.** *O. Bergstrand.* Über die Bahn des ersten Uranussatelliten Ariel. N.A.U. (3) 20.

### Planetoidenbewegung.

**1895.** *C. V. L. Charlier.* Über die intermediäre Bahn der kleinen Planeten. M.L.A.O. 21.

**1896.** *G. Gruss.* Einige Bemerkungen zur Berechnung der Kreisbahn eines Planetoiden aus 2 geozentrischen Positionen (tschech.). S.G.B. 1903 No. 47.

Siehe auch 1773—76.

### Kometenbewegung.

**1897.** *E. Holmes.* How I try to realise a comets orbit. J.B.A.A. 13. 351.

**1898.** *J. Riem.* Kometensysteme. H.E.B. 15. 548.

**1899.** *L. Picart.* Sur l'accélération apparente du mouvement de quelques comètes périodiques. B.A. 21. 139.

**1900.** *A. Lanner.* Die mechanische Ursache der Kometenschweifstellung und ihre Bedeutung für die Zentralbewegung. S.L. 36. 73; 100.

**1901.** *H. C. Plummer.* On the possible effects of radiation on the motion of comets with special reference to Encke's comet. M.N.A.S. 65. 229.

**1902.** *O. Backlund.* Vergleichung der Theorie des Enckeschen Kometen mit den Beobachtungen 1894—95. A.P.M. (8) 16 No. 3. 1.

Siehe auch 1745; 1776.

### Meteoritenbewegung.

**1903.** *H. Rosenberg.* Über eine Methode zur Bestimmung von Meteorbahnen. A.N.K. 167. 49.

**1904.** *H. Chrétien.* Détermination des trajectoires réelles des étoiles filantes. B.S.A.F. 17. 322.

**1905.** *G. Barone.* Forme et disposition des radiants des étoiles filantes. B.S.B.A. 9. 226; 292.

**1906.** *E. Weise.* Höhenberechnung der Sternschnuppen. A.A.W. 41. 255; D.A.W. 77. 255.

**1907.** *H. Chrétien.* L'étude systématique des étoiles filantes et les travaux de la commission des météores de la Société astronomique de France. A.F. 1903. 189.

**1908.** *J. R. Henry.* The Leonid Meteors and the Moon. E.M.W. 77. 124; 166.

**1909.** *G. v. Niessl.* Über die Frage gemeinsamer kosmischer Abkunft der Meteoriten von Stannern, Jonzac und Juvenas. S.A.W. 113. 1361.

### Sternparallaxen.

**1910.** *C. W. Wirtz.* Kritische Bemerkungen über neuere Methoden der Entfernungsbestimmung der Fixsterne. N.R. 19. 105.

**1911.** *O. Bergstrand.* Über die Wirkung der athmosphärischen Dispersion auf die Bestimmung der jährlichen Parallaxen der Fixsterne. A.N.K. 167. 241.

**1912.** *S. C. Chandler.* Questions relating to stellar parallax, aberration and Kimura's phenomenon. A.J.B. 23. 12.

**1913.** *O. Bergstrand.* Détermination de la parallaxe annuelle de l'étoile. B.D + 37. 4131. N.A.U. (3) 20.

### Doppelsternbewegung.

**1914.** *W. S. Adams.* The orbit of the spectroscopic binary $\eta$ Orionis. A.J.C. 17. 68.

**1915.** *A. W. Roberts.* On the relation existing between the light changes and the orbital elements of a close binary system. M.N.A.S. 63. 527.

**1916.** *J. E. Gore.* Stellar satellites. Kn.L. 26. 199; 257; 278.

**1917.** *H. C. Vogel.* Untersuchungen über das spektroskopische Doppelsternsystem β Aurigae. A.N.K. 165. 113.

### Eigenbewegung der Fixsterne.

**1918.** *R. v. Kövesligethy.* Über die Achsendrehung der Fixsterne. B.M.N. 17. 166.

**1919.** *G. J. Burns.* The proper motions of the Stars. A.J.C. 17. 63.

**1920.** *L. Boss.* On the fundamental elements of computation in their relation to systematic stellar motion. A.J.B. 23. 115.

**1921.** *H. Kobold.* Resultate der Untersuchung von 144 starken Eigenbewegungen. A.N.K. 166. 1.

Siehe auch 728.

### Sonnenapex.

**1922.** *P. Harzer.* Über die Bestimmung des Apex. A.N.K. 167. 225.

**1923.** *J. A. Paterson.* The apex of the suns way. P.R.A.S.C. 1902—03. 65.

**1924.** *F. W. D.* Determination of the solar motion. M.N.A S. 63. 252.

**1925.** *M. W. Whitney.* The determination of solar motion. P.A. 12. 226; 311.

**1926.** *T. W. Backhouse, W. H. S. Monck.* The suns motion in space. J.B.A.A. 14. 169; 248; 285; 324; 396.

**1927.** *W. T. Carrigan.* A method for determining the direction of the sun's motion in space. A.J.B. 24. 107.

**1928.** *W. H. S. Monck.* The suns velocity in space. P.A.S.F. 16. 189.

**1929.** *W. H. S. Monck.* Systematic motions of the fixed stars. O. 27. 278.

**1930.** *S. Wellisch.* Der dynamische Mittelpunkt der Welt. D.W.B. 3. 273.

### Astrophysik.

**1931.** *J. Plassmann.* Interplanetare Absorption des Lichtes. M.V.A.P. 15. 5.

Siehe auch 702; 724—26; 1986.

### Kosmische Spektralanalyse.

**1932.** *R. v. Kövesligethy.* Über das Spektrum der Himmelskörper. B.M.N. 17. 127.

Siehe auch 1057; 1917; 1946.

### Weltraum.

**1933.** *A. Stentzel.* Über die sogenannte Temperatur des Weltraumes. M.Z. 21. 371.

### Gestalt der Himmelskörper.

**1934.** *A. Liapunow.* Untersuchungen über die Theorie der Gestalt der Himmelskörper (russ.). A.P.M. (8) 14. No. 7. 1.

**1935.** *A. Liapunow.* Über die Clairantsche Gleichung und die allgemeineren Gleichungen aus der Theorie der Gestalt der Planeten (russ.). A.P.M. (8) 15. No. 10. 1.

### Astrophotographie.

Siehe 291—95.

### Sonne.

**1936.** *R. A. Sampson.* The mechanical state of the sun. Kn. (2) 1. 119.

**1937.** *N. N.* The sun a binary star. E.M.W. 79. 302.

**1938.** *W. H. Julius.* Les théories solaires et la dispersion anomale. R.G.O. 15. 480.

**1939.** *M. M. H.* Hypoteza przyrodzie wyskoków slonecznych. W.W. 22. 536.

**1940.** *W. H. Julius.* De periodiciteit der zonneverschijnselen en de daarmede samenhangende periodiciteit in de variaties van meteorologische en aardmagnetische elementen verklaard mit dispersie van het licht. C.A.A. 12. 300.

**1941.** *W. H. Julius.* Sur l'explication, par la dispersion anomale de la lumière, de la périodicité des phénomènes solaires et de la périodicité correspondante dans les variations des éléments météorologiques et magnétiques de la terre. A.N. (2) 9. 211.

**1942.** *E. Przybyllok.* Die Juliussche Sonnentheorie in ihrer neueren Entwicklung. P.Z. 6. 654.

**1943.** *S. A. Mitchell.* The pressure of sunlight and some of its bearings on astronomy and meteorology. M.W.R. 32. 217.

**1944.** *A. Schmidt.* Die Gesetze der Lichtbrechung angewendet auf die Physik der Sonne. D.W.B. 5. 215; 240.

**1945.** *S. P. Langley.* The solar constant and related problems. A.J.C. 17. 89.

**1946.** *J. Fényi.* De nova quadam explicatione transpositionis linearum spectralium in sole observatae. N.L.M. 21. 249.

**1947.** *R. Lucas.* Über die Temperatur der Sonne. A.N.K. 168. 57.

**1948.** *F. Hopfner.* Theorie der solaren Wärmestrahlung. A.A.W. 1905. 213.

**1949.** *J. H. Poynting.* Radiation in the solar system: its effect on temperature and its pressure on small bodies. T.R.S.L. 202. 525; M.A.S. 55. Append. 1.

**1950.** *F. E. Fowle.* The discrepancy between solar radiation measurements by the actinometer and by the spectrometer. M.C.S J. 47. 399.

**1951.** *F. W. Vary.* The absorption of radiation by the solar athmosphere and the intrinsic radiation of that athmosphere. A.J.C. 19. 139.

**1952.** *A. Schuster.* The solar athmosphere. A.J.C. 16. 320.

**1953.** *C. Nordmann.* La structure de la couronne solaire. R.G.O. 15. 103.

**1954.** *F. Biske.* Próba zastasowania badán hydrodynamicznych do protuberancyi slonecznych. (Versuch einer Anwendung der Hydrodynamik auf die Protuberanzen der Sonne.) W.M. 6. 147.

**1955.** *J. Scheiner.* Die Kirchhoffsche Funktion. H.E.B. 16. 385.

Siehe auch 568; 2213.

### Sonnenflecken.

**1956.** *H. Chrétien.* La quadrature mécanique des taches solaires. A.F. 1903. 207.

Siehe auch 2284.

### Mond.

**1957.** *J. Fernique.* La forme tétraédrique de la lune. B.S.A.F. 18. 43.

**1958.** *F. Hayn.* Abweichung des Mondrandes von der Kreisform. A.N.K. 168. 1.

**1959.** *Folie.* Sur la détermination physique de la masse de la lune. A.S.B. 28A. 59.

**1960.** *E. Przybyllok.* Über Positionsbestimmung von Mondkratern nach der Methode der Quereinstellung. A.N.K. 168. 309.

**1961.** *J. Mooser.* Die Entstehung der Ringgebirge des Mondes. J.V.S.G. 23. 38.

Siehe auch 1868; 1870; 1873.

### Planeten.

**1962.** *Du Ligondès.* Les atmosphères des planètes. B.S.A.F. 17. 291.

Siehe auch 295; 1765.

### Zodiakallicht.

**1963.** *R. Parrey.* The zodiacal light. J.B.A.A. 13. 199.

### Fixsterne.

**1964.** *J. E. Gore.* Giant and miniature suns. Kn. (2) 1. 4.

**1965.** *L. d'Auria.* The relation of the mass of the Universe to stellar dynamics. P.A. 12. 20.

**1966.** *A. Tass.* Az állóczillagok hőmérsékletének meghatározása. (Bestimmung der Temperatur der Fixsterne.) U.B. 4. 229.

### Doppelsterne.

**1967.** *J. E. Gore.* On the suns stellar magnitude and the parallax of binary stars. M.N.A.S. 63. 164.

**1968.** *S. M. Hadley.* Masses of binary stars. P.A. 11. 240.

### Nebelflecke.

**1969.** *J. L. E. Dreyer.* A survey of the spiral nebula Messier 33 by means of photographs taken by Dr. Isaac Roberts. P.R.I.A. 25. 3.

### Astronomische Beobachtungskunde.

**1970.** *L. Courvoisier.* Über einige Registerversuche nach dem Koinzidenzverfahren. A.N.K. 167. 211.

### Persönliche Gleichung.

**1971.** *S. P. Langley.* A method or avoiding personal equation in transit observations. M.C.S.I. 45. 225.

**1972.** *F. Schlesinger.* Personal scale. P.A.S.F. 15. 207; 228. — *R. G. Atken* 220.

### Distanzen.

**1973.** *Knipping.* Maansafstanden. D.Z.R. 26. 13.

**1974.** *E. Knipping.* Die Zukunft der Monddistanzen. H.H. 40. 593.

**1975.** *de Cañete del Pinar.* De cómo se han de observar las distancias lunares. R.G.M.M. 52. 635; 697.

**1976.** *C. Börgen.* Über die Berechnung von Monddistanzen mit Hilfe der Mercatorschen Funktionen. A.D.S.H. 26. Nr. 1.

**1977.** *P. G.* Sul calcolo della formola proposta dal Magnaghi per la riduzione delle distanze lunari. R.M.R. 37c. 104.

**1978.** *A. Wedemeyer.* Die Anwendung von Sterndistanzen in der nautischen Astronomie. A.H. 33. 368.

**1979.** *A. Wedemeyer.* Die Anwendung von Sterndistanzen in der nautischen Astronomie. A.H. 33. 416.

### Kosmologie.

**1980.** *F. Ristenpart.* Der Aufbau des Weltgebäudes. H.E.B. 17. 15.

**1981.** *E. J. Gheury.* Note sur la configuration de l'Univers. B.S.B.A. 9. 234.

**1982.** *K. Geißler.* Betrachtungen über die Unendlichkeit des Weltalls. D.W.B. 5. 335

**1983.** *J. D. Everett.* On normal piling as connected with Osborne Reynolds's theory of the Universe. P.M. (6) 8. 30; P.P.S.L. 19. 223.

**1984.** *F. Ristenpart.* Gibt es einen Punkt der Ruhe im Weltall? H.E.B. 17. 130.

**1985.** *F. Gessert.* Eine Hypothese über die Ersetzung der Gestirnswärme durch die Schwerkraft. D.W.B. 4. 232.

**1986.** *G. Johnstone Stoney.* Escape of gases from athmospheres. P.M. (6) 7. 690; 9. 510. — *S. R. Cook.* 9. 508.

Siehe auch 721; 1965.

### Sonnensystem.

**1987.** *T. J. J. See* Researches on the internal densities, pressures and moments of inertia of the principal bodies of the planetary system. A.N.K. 167. 113.

**1988.** *C. J. Schuhmacher.* Stabilität unseres Sonnensystems. N.O. 50. 237.

**1989.** *H. Chrétien.* Distances moyennes dans le système solaire. A.F. 1904. 52.

Siehe auch 1888.

### Kosmogonie.

**1990.** *C. Braun.* Über Kosmogonie. N.O. 49. 355.

**1991.** *A. M. Clerke.* Modern cosmogonies. Kn.L. 26. 57; 104; 158; 196; 251; 27. 6; (2) 1. 30; 80; 178; 211; 256; 2. 24.

**1992.** *M. Ernst.* Współczesne poglądy kosmogoniczne. (Die kosmogonischen Ansichten der Gegenwart.) B.W. 1903. III 487; IV 41; 275.

**1993.** *R. Lieckfeldt.* Die Entstehung und Entwickung der Weltkörper. D.W.B. 5. 150; 188; 204.

**1994.** *R. v. Kövesligethy.* Über die Entwicklung der Himmelskörper und das Alter der Erde. B.M.N. 19. 204.

**1995.** *L. N. Vokú.* Application des lois générales de la formation des mondes à la génération spéciale du nôtre. J.S.M. 15. 33.

### Kant-Laplacesche Theorie.

**1996.** *J. Friedel.* Zur Kant-Laplaceschen Theorie. P.G.M. 51. 43.

**1997.** *Holzmüller.* Kritik der Kant-Laplaceschen Hypothese. U.M.N. 10. 40.

**1998.** *G. Holzmüller.* Die Kant-Laplacesche Kosmogonie und ihre Kritik. S.L. 37. 73.

**1999.** *A. Studnicka.* Über die Laplacesche Theorie. A.R.L. 6. 160.

**2000.** *A. Hall.* The nebular hypothesis of Laplace. A.J.B. 24. 54.

**2001.** *E. Holmes.* The aspects of the nebular hyhothesis. J.B.A.A. 14. 163 — *G. J. Burns* 209.

**2002.** *J. Halm.* Some suggestions on the nebular hypothesis. P.R.S.E. 25. 553.

Siehe auch 1765.

### Mathematische Geographie.

**2003.** *L. S. de la Campa.* Nota sobre el primer meridiano geográfico. R.T.M. 4. 145.

**2004.** *N. N.* Tafeln zur genäherten Berechnung der Zeitgleichung. 1904—07. M.V.A.P. 14. 21.

### Sphärische Astronomie.

**2005.** *H. Hilton.* Some simple problems in astronomy. M.G.S. 2. 384.

**2006.** *A. Rust.* Trirectangular coordinates for the solution of spherical triangles. P.N.I. 29. 707.

**2007.** *D. Mars.* Eenige opmerkingen over circummeridians — breedte en azimuth. D.Z.R. 25. 101; 193.

**2008.** *M. A. Ainslie.* Sun's altitude and azimuth. E.M.W. 77. 52.

Siehe auch 2026; 2028; 2029; 2031; 2058; 3772.

### Nautik.

**2009.** *J. E. R. Stephens.* The history of navigation. N.M.L. 73. 503.

**2010.** *H. Heyenga.* Nautische Untersuchungen. H.H. 40. 384; 401.

**2011.** *J. de Ray-Pailhade.* Application pratique du système décimal à la navigation. Y.G. 297. 57.

**2012.** *R. Weizner.* Lösung einiger nautischer Aufgaben mit Hilfe der Azimuttafeln von Dr. Bolte. A.H. 32. 244.

**2013.** *D. Mars.* Nauwkeurigheid in de berekening bij de sumner-methode. D.Z.R. 25. 533.

**2014.** *H. Herman.* Is de sumnerlijn een koorde of een raaklijn der hoogteparallel. D.Z.R. 25. 20.

**2015.** *G. Cevasco, A. Alessio* e *L. Tonta.* Sulla costruzione delle tavole Martelli per il calcolo dell' angolo orario. R.M. R. 37a. 101.

**2016.** *J. Posthumus.* Azimuth zonder hoogte. D.Z.R. 26. 494.

**2017.** *P. W. Sachse.* Het punt in den gelijken hoogtecirkel verkregen door breedtebepaling in verband met het reglement der stuurliedenexamens. D.Z.R. 25. 7.

**2018.** *E. Knipping.* Vereinfachung der nautisch-astronomischen Tafeln und Rechnungen. A.H. 33. 216.

**2019.** *H. B. Goodwin.* A kinematic exmeridian table. N.M.L. 72. 264.

**2020.** *Köster.* Über trigonometrische Lösung des ungleichseitigen Vierecks, dessen Winkel und zwei einandergegenüberliegende Seiten bekannt sind. A.H. 33. 230.

Siehe auch 173; 220; 1978; 1979; 2251.

## Zeitbestimmung.

**2021.** *J. Posthumus.* Vereenvoudiging in het uitrekenen van zeevartkundige vraagstukken. D.Z.R. 26. 194. — *F. B.* 405.

**2022.** *G. Lippmann.* Les unités absolues et la mesure absolue du temps. B.S.A.F. 17. 484.

**2023.** *E. James.* Einfache Methoden der Zeitbestimmung. D.U.Z. 27. 129.

**2024.** *E. Massanyi.* A pontos idö. (Über die Bestimmung der genauen Zeit.) A.B. 7. 326.

**2025.** *Weidefeld.* Zur Genauigkeit der Zeitbestimmungen am Sonnenlot. D.U.Z. 27. 319.

**2026.** *G. C. Comstock.* The determination of time and latitude from equal altitudes of stars. P.A. 11. 238.

**2027.** *W. E. Cooke.* On a new and accurate method of determining time, latitude and azimuth with a theodolite. M.N.A.S. 63. 156; 64. 70; P.A. 11. 160.

**2028.** *E. B. H. Wade.* Remarks on a paper by Mr. Cook on a New method of determining time, latitude and azimuth. M.N.A.S. 64. 107.

**2029.** *E. Doležal.* Über graphische Bestimmung der Zeit, des Azimuths und des Meridians. Ö.Z.B.H. 1903. 2; 17; 33; 49.

**2030.** *H. H. Turner.* On graphical methods of determining the local or Greenwich time of sunset at different places within a given region. M.N.A.S. 64 193.

**2031.** *A. Rust.* Notes on a diagram for finding the azimuth and hour angle from the latitude of the observer and the declination and altitude of the observed celestial body. P.N.I. 29. 725.

**2032.** *A. Alessio.* Sulla determinazione dell' ora di bordo con osservazioni stellari. R.M.R. 37b. 252.

**2033.** *N. N.* Über eine vom Ingenieur F. Tami vorgeschlagene Methode für die nautische Bestimmung der Ortszeit aus Sternbeobachtungen. M.A.G.S. 32. 317.

Siehe auch 2048; 2079; 2562.

## Gnomonik.

**2034.** *L. Weineck.* Zur Theorie der Sonnenuhren. S.A.W. 114. 831.

**2035.** *O. Weidefeld.* Über die Leistungsfähigkeit von Sonnenuhren. M.V.A.P. 13. 24.

**2036.** *N. N.* Cadrans solaires. B.S.A.F. 17. 208.

**2037.** *A. Damry.* Le cadran solaire de Dijon. B.S.B.A. 8. 97.

**2038.** *R. Cozza.* Un nouveau cadran solaire à temps moyen, à courbes horaires égales et équidistantes. B.S.A.F. 17. 122.

**2039.** *H. Wichello.* An improved sundial. E.M.W. 80. 210; 300.

**2040.** *N. N.* An improved sun-dial. O. 27. 141.

**2041.** *W. Godden.* A cheap and reliable time finder. E.M.W. 79. 57; 146.

## Ortsbestimmung.

**2042.** *E. Havinga.* Nog iets over plaatsbepaling. D.Z.R. 26. 339.

**2043.** *Radler de Aquino.* Sobre o calculo relativo de posiçao segundo o methodo de Marcq St. Hilaire. R.M.B. 42. 1111.

**2044.** *A. de la Baume-Pluvinel.* La détermination du point en ballon. B.S. A.F. 18. 77.

**2045.** *H. A. de Wijn.* Opmerkingen over de astronomische plaats bepaling aan boord. D.Z.R. 26. 399.

**2046.** *Pfarrius.* Zur Geometrie der Aufgaben des Auffindens auf See. M. R.B. 15. 178.

**2047.** *Römmert.* Graficeskoe rešenie poljarnaga treugolnika. (Graphische

Lösung des Poldreieckes.) M.Z.P. 319. 11; 89.

**2048.** *A. Tass.* Müszer nélkül végetheső idömeghatárotás. (Methode der Orts- und Zeitsbestimmung ohne Instrumente.) A.B. 8. 145.

**2049.** *G. W. Littlehales.* A new and abridged method of finding the locus of geographical position and the compass error. B.S.W. 14. 233.

**2050.** *N. Rodcevič.* Opredelenie široty i dolgoty. (Breiten und Längenbestimmungen auf dem Meere aus Beobachtungen der Azimuthdifferenzen von zwei Sternen.) M.Z.P. 322. 4.

**2051.** *H. E. Timerding.* Die Genauigkeit der Ortsbestimmung aus 2 Standlinien. A.V.K. 168. 17.

**2052.** *H. Baum* und *C. Fesenfeld.* Berechnung des Schiffsorts aus 2 Gestirnshöhen nach der Höhenmethode. A.H. 32. 28. — *T. Köster* 170.

**2053.** *C. Decante.* Détermination de position du navire quand l'horizon n'est pas visible. R.M.M.P. 147. 491.

**2054.** *G. W. Littlehales.* Concerning sextant observations for determining gegraphical positions. B. A. G. S. 36. 138.

**2055.** *E. B. H. Wade.* Preliminary note on the effect of the direction of gravity on lunar observatories. M.N.A.S. 64. 106.

**2056.** *W. Hall.* A caution on ex-meridians. N.M.L. 73. 419.

### Breitenbestimmung.

**2057.** *S. Alemán.* Observaciones de latitud en Apam. M.yR.M. 20. 73.

**2058.** *A. Pannekoek* en *Posthumus Meyes.* Ovor breedte—en azimuth bepalinger. C.A.A. 13. 520.

**2059.** *F. B.* Bredten by den meridiaen. D.Z.R. 26. 242; 471. — *W. Noorduijn* 311. — *P. Bossen* 358. — *E. Havinga* 541.

**2060.** *H. Renan.* Étude de l'influence de la déviation instrumentale d'un cercle de méridien sur les mesures de latitudes. B.A. 22. 129.

**2061.** *L. Volta.* Le determinazioni fotografiche di latitudine e le ricerchi recenti del prof. Schwarzschild. R.T.C. 17. 97; 125; 136; 152.

**2062.** *H. B. Goodwin.* On reduction to the prime vertical. N. M. L. 73. 511.

**2063.** *P. Bossen.* Hoe moet men de circummeridiaens breedten berekenen. D.Z.R. 25. 422.

**2064.** *J. Posthumus.* Breedtebepaling door circummeridiaans hoogte. D.Z.R. 25. 203.

**2065.** *H. Herman.* De grootste hoogte. D.Z.R. 25. 255. — *W. Cornelis* 304.

Siehe auch 2017; 2026—28.

### Längenbestimmung.

**2066.** *J. A. C. Oudemans.* Kort bericht omtrent de bepaling der lengte van St. Denis uitgevoerd in 1874. C.A.A. 13. 616.

**2067.** *Ricart y Giralt.* Calculo de la longitud geografica por medio de las distancias lunares. M.A.C.B. (3) 5. No. 1.

**2068.** *A. Alessio.* Determinazione speditiva della longitudine con osservazioni del cratere „Mösting A". R.M.R. 36c. Suppl.

**2069.** *R. Weisner.* Berechnung von Längen- und Standlinien unabhängig vom Chronometer. A.H. 32. 497.

**2070.** *D. Mars.* Nauwkeurigheid in de berekening bij de Sumner-methode. D·Z.R. 26. 69.

### Höhenprobleme.

**2071.** *Preuß.* Über Höhenprobleme. A.H. 33. 78. — *Timerding* 232.

**2072.** *G. W. Littlehales.* The Sumner line. N.M.L. 73. 327.

**2073.** *J. W. Froley.* Mr. G. W. Littlehales' graphic solution of the astronomical triangle and some of its varied applications to the problems of navigation. B.A.G.S. 36. 299.

**2074.** *A. d. V.* Constructie van hoogtelijnen volgens Villarceau. M.B.H. 19. 226. — *G. L. Goedhart* 359.

**2075.** *Radler de Aquino.* Taboas para achar alturas e azimuths facilitando e emprego do methodo de Marcq Saint-Hilaire no mar. R.M.B. 41. 504.

**2076.** *G. Pesci.* Sul calcalo relativo alle rette d'altezza secondi il methodo di Marcq St. Hilaire. R.M.B. 36a. 5: 37b. 87.

**2077.** *E. B. Simpson-Baikie.* Tables to facilitate the working of combined altitudes by Saint-Hilaire's Method. M. N.A.S. 64. 198.

**2078.** *A. Roth.* Nochmals das Verfahren von Marcq de St. Hilaire und die Höhentafeln. M.A.G.S. 31. 956.

**2079.** *G. Santasilia.* Circa un metodo breve e facile per il calcolo dell' angolo orario e della retta d' altezza Marcq de St. Hilaire. R.M.R. 36d. 349.

**2080.** *Caspar.* Ein neues und abgekürztes Verfahren, um die Standlinie und die Kompaßmißweisung zu finden.

Siehe auch 2026; 2052; 2065.

### Dämmerungsprobleme.

Siehe 2292.

### Großkreisschiffahrt.

**2081.** *A. Roth.* Studie über die Schiffahrt im größten Kreise. A.H. 32. 375.

**2082.** *F. B.* Stoomschepen en grootcirkels. D.Z.R. 26. 200.

**2083.** *H. B. Goodwin.* Talks on Towson. N.M.L. 72. 728; 73. 1; 92.

### Chronologie.

**2084.** *L. Zimmermann.* Zeitrechnung. A.V.N. 1903. 161; 289; 306; 313; 345; 353.

**2085.** *M. C. R. Ornelas.* Nociones de cronologia practica. M.y R.M. 19. 17; 65.

**2086.** *W. H. S. Monck.* Ancient chronology and eclipses. P.A. 11. 242.

### Kalender.

**2087.** *O' Malley.* Three Calenders. E.M.W. 77. 250.

**2088.** *L. F. J. Gardès.* Calendrier perpétuel. A.F. 1903. 214.

**2089.** *J. E. Nunes Cardoso.* Calendario perpetuo. R.T.M. 4. 65.

**2090.** *C. H. Genung.* The reform of the calendar. N.A.R. 79. 569.

**2091.** *R. Munzky-Bunzlau.* Math. Formel zur rechnerischen Bestimmung des Wochentages beliebiger Daten im alten und neuen Kalender. D.W.B. 4. 63.

### Ephemeriden.

**2092.** *M. Rajna.* Nuovo calcolo dell' effemeride del sole e dei crepuscoli per l'orizzonte di Bologna. M.I.B. (6) 1. 61; R.I.B. (2) 8. 25.

### Osterdatum.

**2093.** *N. N.* Gaußsche Osterformel. A.V.N. 1904. 153.

**2094.** *P. Puiseux.* Sur la date et la fête de Pâques. B.S.A.F. 17. 231.

**2095.** *L. F. J. Gardès.* La date de Pâques. A.F. 1903. 94.

**2096.** *N. N.* Vraag over den paaschdatum. V.W.A. 20. 150.

**2097.** *M. C* La vraie date de Pâques en l'an 1903. Co. (2) 50. 130.

### Geschichte der Geodäsie.

**2098.** *R. Bourgeois.* L'état actuel de la géodésie. R.G.O. 15. 376.

**2099.** *N. N.* The present position of geodesy. N. 70. 104.

Siehe auch 3351.

### Niedere Geodäsie.

**2100.** *W. Große.* Über eine praktische Rechnungsaufgabe der Feldmeßkunst. Z.H. 34. 33.

**2101.** *H. F. van Riel.* Bepaling der der richtingscoëfficienten bij vereffening in geval van puntbepaling. T.K.L. 20. 115.

Siehe auch 56; 3782.

### Messen.

**2102.** *J. P. Lomholt.* Prove of laengde maalingsredskaber. T.O.M. 3. 166.

Siehe auch 979; 2576; 2578.

### Distanzmessung.

Siehe 44.

### Triangulierung.

**2103.** *N. N.* Geometrische und trigonometrische Netzbestimmung. Z.B.G.V. 1904. 33.

**2104.** *G. Polzer.* Zentrieren der Winkel. Ö.Z.V. 1904. 125.

**2105.** *Seyfert.* Aus der trigonometrischen Praxis. M.A.M.F. 1904. 50.

Siehe auch 42; 48; 49; 71; 2120; 3241; 3778; 3785.

### Einschneiden.

**2106.** *S. Finsterwalder* und *W. Scheufele.* Das Rückwärtseinschneiden im Raum. S.A.M. 33. 591.

**2107.** *N. Herz.* Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens: Problem der 8 Punkte. S.A.W. 113. 355.

**2108.** *C. de Sandre.* Compensazione di un punto intersecato colle distanze. R.T.C. 16. 109; 117.

Siehe auch 47; 50; 3774.

### Pothenotsches Problem.

**2109.** *A. de Campos Rodrigues.* Le problème de Pothenot. R.T.C. 16. 100.

**2110.** *S. Günther.* Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche. S.A.M. 34. 115.

### Polygonometrie.

**2111.** *Pavlov.* Obchod poligona. (Die Genauigkeit von Polygonmessungen mittels der Boussole und des Winkelmeßinstrumentes.) B.S.R.A. 10. 115.

**2112.** *W. Sedašev.* Uvjazka koordinat. (Über die Methoden der Ausgleichung der Abweichungen in Polygonkoordinaten.) T.G.C. 18. 25.

**2113.** *N. Roždestvenskij.* Izmerenie uglov i linij. (Zur Frage über die Genauigkeit der Linien und Winkelmessungen in der polygonometrischen Aufnahme.) T.G.C. 18. 12.

**2114.** *N. Roždestvenskij.* Ob ismerenie ploščadej. (Einfluß der Fehler der Linien- und Winkelmessungen eines Polygons auf seine Fläche.) T.G.C. 18. 20.

**2115.** *T. Uspenskij* Vyčislenie ploščadej. (Notiz über die Flächenberechnungen der Polygone.) T.G.C. 18. 47.

### Kurvenabstecken.

**2116.** *F. Lorenz.* Die Absteckung von Kurven in koupiertem Terrain. Ö.W. Ö.B. 1904. 161.

### Flächenmessung.

Siehe 3231; 3481.

### Grundstücksteilung.

**2117.** *L. Zimmermann.* Teilung des Vierecks aus einem gegebenen Punkte. A.V.N. 1903. 33. 124.

**2118.** *H. Zimmermann.* Teilung an einem gesuchten Punkte. A.V.N. 1903. 4.

**2119.** *H. Ehrhardt.* Die Teilung der Grundstücke durch einfaches Addieren und Subtrahieren, unter Verwendung einer Tafel von Achtelquadraten, genannt Planimetrische Tafel. A.V.N. 1904. 305; 313.

Siehe auch 3769; 3780; 3781; 3783.

### Geodätische Koordinaten.

**2120.** *T. Krasovskij.* Formulü Šrejbera (Notiz über die Schreibersche Formel für die Berechnung der geographischen Koordinaten der Punkte im trigonometrischen Netze). T.G.C. 18. 1.

**2121.** *P. Mantjev.* Vyčislenie azimutov (Über die Berechnung des wahren Azimut mittels der Tabellen für die Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten). T.G.C. 18. 48.

Siehe auch 51; 52; 2112; 2135—37; 3773; 3778.

### Tachymetrie.

Siehe 3767.

### Nivellement.

Siehe 45; 46; 2245; 2579; 2580; 3771;

### Barometrische Höhenmessung.

**2122.** *Grossmann.* Die barometrische Höhenformel und ihre Anwendung. A. H. 33. 261.

**2123.** *A. de Quervain.* Tafeln zur barometrischen Höhenberechnung nach A. Angot. B.P.A. 1. 68.

**2124.** *J. Hann.* Bemerkungen über die Schwerekorrektion bei den barometrischen Höhenmessungen. P.G.M. 49. 163.

### Topographie.

Siehe 296; 2582; 2583; 2589; 3719.

### Landesvermessung.

**2125.** *S. Blok.* De aansluiting van het driehoeksnet der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat van Sumatra's Westkust. C.A.A. 13. 471.

Siehe auch 3242; 3656; 3657.

### Kartenprojektionen.

**2126.** *E. Haentzschel.* Neuer Beweis einer Grunertschen Formel aus der Kartenentwurfslehre. Z.S. 51. 165.

**2127.** *E. Soler.* Sopra una nuova proïezione geografica compensativa. A. A.P. 6.

**2128.** *H. Maurer.* Eine neue graphische Azimut- und Kurstafel und eine winkeltreue Kartenprojektion. A.H. 33. 125.

**2129.** *C. E. Stromeyer.* Surface equivalent projections. V.I.G.C. 7. 99.

**2130.** *H. Maurer.* Über Auflösung von Poldreiecksaufgaben durch Diagramme, die auf zenitalen Kartenprojektionen beruhen. A.H. 33. 355.

**2131.** *A. J. van der Grinten.* Darstellung der ganzen Erdoberfläche auf einer kreisförmigen Projektionsebene. P. G.M. 1904. 155.

**2132.** *H. Hilton.* A note on the gnomonic projection. M.G.S. 3. 108.

**2133.** *H. Hilton.* To find the relation between 2 maps of the same contour on the gnomonic projection. M.G.S. 3. 107.

**2134.** *E. Hammer.* Zwei praktische Beispiele schiefachsiger zylindrischer Kartennetzentwürfe. P.G.M. 50. 277.

**2135.** *C. Pastori.* Tabelle sussidiarie pel calcolo di una triangolazione in coordinate piane Soldner o per la trasformazione delle coordinate fra due centri Soldner contigui. R.T.C. 17. 8; 24; 38.

**2136.** *G. B. Maffiotti.* Sopra alcune questioni relative al calcolo delle coordinate sferiche rettangolari nel sistema di proiezione di Soldner. R.T.C. 17. 49; 65. — *Pastori* 95.

Siehe auch 282; 2605.

### Flächenberechnung.

**2137.** *M. Ehrhardt.* Flächen- und Koordinatenberechnung durch Addieren und Subtrahieren unter Verwendung einer Tafel von Achtelquadraten. A.V.N. 1903. 153.

Siehe auch 177; 2114; 2115; 3357; 3480; 3482; 3484; 3490; 3491.

### Erdmassenberechnung.

**2138.** *L. Hess.* Zur graphischen Massenbestimmung von Erdkörpern. Ö W. Ö.B. 1903. 553.

**2139.** *L. Schleiermacher.* Zur Massenberechnung im Wegbau. Z.S. 52. 208.

Siehe auch 3474; 3475; 3438; 3479; 3485—88.

### Metrologie.

**2140.** *G. di Dia.* Il sistema metrico. Pit 10. 14.

**2141.** *O. Zanotti-Bianco.* Il metro e il minuto e il secondo nella geofisica moderna. R.T.C. 17. 104; 119.

### Höhere Geodäsie.

**2142.** *O. H. Tittmann.* Der gegenwärtige Stand der Geodäsie. N.R. 20. 169.

**2143.** *F. Guarducci.* Sulla risoluzione dei triangoli formati da 3 geodetiche sull' ellissoide di rotazione a piccolo sciacciamento. M.I.B. (6) 1. 99; R.I.B. (2) 8. 59.

**2144.** *A. A. Wassiliew.* Nachweis einiger systematischer Mängel des Basismessungsapparats von Jädevin. A.P.B. (5) 19. Nr. 3. 93.

Siehe auch 2151.

### Gradmessungen.

**2145.** *Loperfido.* Misura di un arco terrestre. R.A.G. 1904. Okt.

**2146.** *Cañete del Pinar.* Sobre un arco de paralelo. R.G.M.M. 52. 304; 425.

### Erdgestalt.

**2147.** *O. Zanotti-Bianco.* I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. A.A.T. 39. 539; 689; 40. 18.

**2148.** *A. Börsch.* Die Grundlagen der Bestimmung der Erdgestalt. V.I.M.C. 3. 459.

**2149.** *S. Makay.* A föld alakja (Die Gestalt der Erde). U.B. 3. 306.

**2150.** *T. Arldt.* Die Gestalt der Erde. B.G. 7. 283.

**2151.** *P. Trzcinski.* Ksztall i wymiari ziemi. Uklav tetradryczny (Größe und Gestalt der Erde. Die Tetraederform). W.W. 28. 81.

**2152.** *S. Heilig.* Is the Earth a pyramid and not a sphere? E.M.W. 77. 159.

**2153.** *P. Rudzki.* Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité. B.A. 22. 49.

**2154.** *W. Foerster.* Der Fortgang der Untersuchungen inbetreff der Bestimmung der Erdgestalt und der Veränderungen der Breiten. M.V.A.P. 15. 35.

Siehe auch 2177.

### Lotabweichungen.

**2155.** *Näbauer.* Neigung der Lote in Punkten verschiedener Niveauflächen, welche derselben Lotlinie angehören. Z. B.G.V. 1903. 174.

**2156.** *W. Schweydar.* Untersuchungen der Oszillationen der Lotlinie auf dem Astrometr. Institut der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. B.G. 7. 33.

**2157.** *O. Fisher.* On deflexions of the plumb line in India. P.M. (6) 7. 14.

**2158.** *N. Herz.* Über den Einfluß der Lotablenkungen auf die Ergebnisse der Schwerebestimmungen. A.N.K. 165. 97.

Siehe auch 2055.

### Geophysik.

**2159.** *P. Puiseux.* Ce qu'on sait de la constitution interne du globe terrestre. J.D.S. 1904. 620.

**2160.** *D. S. Rudnickij.* Fizična geografija pri kinci 19. stolita (Die physikalische Geographie am Ende des 19. Jahrhunderts). R.S.M. 9. Nr. 4.

Siehe auch 275.

### Schweremessungen.

**2161.** *A. Prey.* Über die die Reduktion der Schwerebeobachtungen auf das Meeresniveau. S.A.W. 113. 1231.

**2162.** *O. Zanotti-Bianco.* Helmert's formule for gravity. N. 72. 534.

Siehe auch 440; 2153; 2158; 2675; 3759.

### Erddichte.

**2163.** *O. Fisher.* Densities of the Earths crust beneath continents and oceans compared. P.C.P.S. 13. 106.

### Erdbeben.

**2164.** *R. v. Kövesligethy.* Die Berechnung seismischer Elemente. B.M.N. 23. 42.

**2165.** *F. Omori.* Seismological notes. P.T.M. 2. Nr. 15.

**2166.** *F. de Montessus de Bellore.* Non-existence et inutilité des courbes isoséphygmes ou d'égale fréquence des tremblements de terre. B.G. 5. 467.

**2167.** *R. v. Kövesligethy.* A nagy földrengések energiája (Über die Energie großer Erdbeben). M.T.E. 32. 148.

**2168.** *A. Imamura.* Note on the transit velocity of the earthquake motion originating at a near distance. P.T.M. 2. Nr 12.

**2169.** *E. G. Harboe.* Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Erdbebenwellen. B.G. 7. 379.

**2170.** *O. Fisher.* On the transmission of Earthquake waves trough the earth. P.C.P.S. 12. 354.

**2171.** *W. Schlüter.* Schwingungsart und Weg der Erbebenwellen. B.G. 5. [illegible]

**2172.** *M. Seddig.* Beobachtung elastischer Wellen im Erdboden. N.R. 19. [illegible]

**2173.** *H. Lamb.* On the propagation [illegible] over the surface of an elastic solid. [illegible] 203. 1.

**2174.** *A. Imamura.* Note on the [illegible] undulation in Tokyo. P.T.M [illegible]

[illegible] *[illegible]* Über die Verwen[illegible] Erdbebenbeobachtungen zur [illegible] des Erdinnern. S.A.W. 113.

[illegible] On the correction bet[illegible] [illegible]quakes and atmospheric pres[illegible]

[illegible] *[illegible]mand.* Relations des [illegible] tremblements de terre avec [illegible] A.F. 1908. 157.

[illegible] 1849; 2284; 2418; [illegible]

### Erdwärme.

**2178.** *J. F. Hoffmann.* Über die Beeinflussung der geothermischen Tiefenstufe und einige Folgerungen. B.G. 5. 667; 6. 349.

### Vulkanismus.

Siehe 2177.

### Eis.

Siehe 2193.

### Eiszeit.

**2179.** *E. Geinitz.* Wesen und Ursache der Eiszeit. A.F.M. 59. 1.

### Erdströme.

**2180.** *E. Guarini.* Les courants telluriques. B.S.B.A. 9. 194.

### Erdmagnetismus.

**2181.** *A. Pflüger.* Zur Deutung des Erdmagnetismus. P.Z. 6. 415.

**2182.** *E. Lagrange.* Ampère et l'origine du champ magnétique terrestre. B.S.B.A. 9. 239.

**2183.** *L. A. Bauer.* On the present shrinkage of the earths magnetism. P. R. 20. 126.

**2184.** *W. van Bemmelen.* Het krachtsveld van de dagelijksche schommeling der magnetische storingskracht. C.A.A. 12. 456.

**2185.** *C. Chree.* The law of action between magnet and its bearing on the determination of the horizontal component of the Earths magnetic force with unifilar magnetometers. P.M. (6) 8. 113.

**2186.** *G. Lippmann.* Action du magnétisme terrestre sur une tige d'acier „invar" destinée à un pendule géodésique. C.R. 138. 1073.

**2187.** *F. Lauffer.* Die Deviation und deren Kompensation geometrisch dargestellt und analysiert auf Grund des magnetischen Kraftfeldes. A.H. 33. 66.

**2188.** *A. Tanakadate.* A magnetic survey of Japan reduced to the epoch 1895, 0 and to sea level. J.U.T. 14.

Siehe auch 148; 563; 1671; 1940; 1941; 2284; 3549.

### Deklination.

Siehe 2080.

### Erdmagnetische Variationen.

Siehe 2184.

(Schluß folgt.)

**Osgood**, Dr. W. F., Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 1. Hälfte. Mit zahlreichen Figuren im Text. [306 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 7.—
[Die 2. Hälfte des I. Bandes wird im Herbst 1906 erscheinen.]

**Pockels**, Dr. F., Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 16.—

**Poincaré**, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. u. L. Lindemann. 2. Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 4.80.

——— der Wert der Wissenschaft. Autorierte deutsche Ausgabe von E. Weber. Mit Anmerkungen von H. Weber in Straßburg i. E. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb.

**Simon**, Dr. Max, Professor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I. Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 8.—, in Leinw. geb. n. *M.* 9.—

——— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. geb. n. *M.* 3.20.

**Starke**, Dr. H., Privatdozent an der Universität Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

**Staude**, Dr. Otto, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

**Stolz**, Dr. Otto, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. J. Anton Gmeiner, Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—. Auch in 2 Abteilungen: I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—. II. Abteilung. Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—612.] 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

**Thomae**, Geh. Hofrat Dr. J., Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. *M.* 2.80.

**Vivanti**, G., Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

**Wallentin**, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren im Text. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

**Weber**, Dr. H., und Dr. J. Wellstein, Professoren an der Universität Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—. III. Band. Anwendungen der Elementarmathematik. [Unter d. Presse.]

**Wien**, Dr. W., Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen. Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. geh. n. *M.* 1.—

---

# ZEITSCHRIFT
# FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

---

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

---

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE UND C. RUNGE
IN STUTTGART IN GÖTTINGEN

---

53. BAND. 3. HEFT.

MIT [illegible] FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 5. Juni 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

**Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29**

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.


## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

**O. Biermann, F. Biske, N. Delaunay, F. Dingeldey, E. Doležal, R. Gans, A. Grünwald, J. Horn, A. Kalähne, W. Láska, R. Mehmke, P. Riebesell, C. Runge, Fr. Schiffner, Fr. Schilling, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, Fr. Ulkowski, P. Werkmeister, C. W. Wirtz, A. Wlassow, E. Wölffing.**

# Über die theoretische Behandlung des Problems der störenden Lokomotivbewegungen.

Von M. Radaković in Innsbruck.

Die unter den Namen „Wanken", „Wogen" und „Nicken" bekannten störenden Bewegungen der Lokomotive sind erzwungene Schwingungen des auf Federn ruhenden Baues unter dem Einfluß periodisch veränderlicher Kräfte, welche den regelmäßig wiederkehrenden Einwirkungen des Geleises und dem Mechanismus des Antriebes entspringen. Sie gehören daher zu jenen technisch wichtigen Fällen von Resonanz[1]), denen sich in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit zuwandte.

Derartige Erscheinungen des Mitschwingens lassen sich durch rein statische Betrachtungen nicht erschöpfend behandeln, da ein schwingendes System unter der Einwirkung periodisch veränderlicher Kräfte ganz andere Ausweichungen erhält, also auch ganz andere äußere Verhältnisse und Beanspruchungen aufweist, als der rein statischen Wirkung der Kräfte entsprechen würde.

Die Darstellung der störenden Lokomotivbewegungen als erzwungener Schwingungen geht auf Redtenbacher[2]) zurück, dessen in der allgemeinen Auffassung des Problemes bewunderungswürdige Darstellung bekanntlich in ihrer Ausführung durch einen sinnstörenden Irrtum entstellt ist. Die späteren Untersuchungen der Lokomotivbewegung von Zeuner[3]), Einbeck[4]) und Fliegner[5]) leiden etwas an der den Überblick erschwerenden Form der mathematischen Ent-

1) Eine Zusammenstellung dieser Fälle findet sich in dem Vortrage von Sommerfeld (Physik. Zeitschr. III, Heft 12). Die Literatur des vorliegenden Problemes ist in dem Referate von Heun „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik" (Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 9) besprochen.

2) Redtenbacher, Die Gesetze des Lokomotivbaues (1855).

3) Zeuner, Programm der eidgen. polytechn. Schule. Zürich 1861/1862.

4) Einbeck, Theoret. Untersuch. der Konstruktionssyst. des Unterbaues von Lokomotiven (1875).

5) Fliegner, Vierteljahrsschrift d. naturforsch. Ges. Zürich, 42, Heft 1 (1897).

wicklungen. Eine größere Klarheit kann man dadurch gewinnen, daß man als Grundlage der Darstellung die auf Lagrange zurückgehende Theorie der unendlich kleinen Schwingungen materieller Systeme wählt, welche besonders für akustische Zwecke ausgebildet worden ist.

Die folgenden Zeilen beschäftigen sich mit der Übertragung dieser Theorie auf das vorliegende Problem und geben ein Beispiel für dieselbe durch die Ausführung der Rechnung für den Fall *einer* störenden Ursache, des periodisch veränderlichen Druckes der Schubstange auf den Führungskörper, bis zur Gewinnung übersichtlicher, graphisch leicht konstruierbarer Formeln. Die Ausdehnung auf andere störende Ursachen dürfte keine Schwierigkeiten haben.

### Das zur Beschreibung der Lokomotivschwingungen verwendete Koordinatensystem.

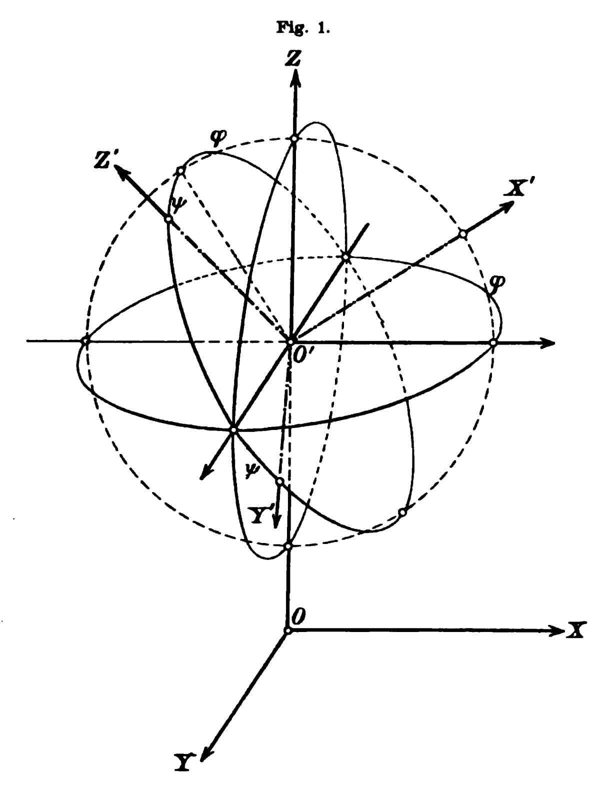
Die sogenannten „gaukelnden" Bewegungen der Lokomotive sind: 1. Hebungen und Senkungen des Schwerpunktes in vertikaler Richtung, das *Wogen*; 2. Drehungen um eine durch den Schwerpunkt gehende, auf der Längsachse senkrechten horizontalen Querachse, das *Nicken*; 3. Drehungen um die horizontale Längsachse der Lokomotive, das *Wanken*. Die in gaukelnder Bewegung begriffene Lokomotive kann daher als System von drei Freiheitsgraden aufgefaßt werden, zu dessen Bestimmung die Angabe von drei allgemeinen Koordinaten genügt.

Es seien $x$, $y$, $z$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Lokomotive bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen $z$-Achse vertikal nach aufwärts gerichtet ist, dessen $x$-Achse mit der Richtung des Geleises parallel und dessen $y$-Achse senkrecht zu dem Geleise liegt. Der Anfangspunkt 0 dieses Systemes falle bei ruhender Lokomotive mit dem Schwerpunkte derselben zusammen und das Koordinatensystem möge an der Vorwärtsbewegung der Lokomotive in der Weise teilnehmen, daß sein Anfangspunkt immer in die Senkrechte durch den Schwerpunkt zu liegen kommt.

Mit $x'$, $y'$, $z'$ seien die rechtwinkligen Koordinaten desselben Punktes der Lokomotive, aber bezogen auf ein mit ihr festverbundenes Achsensystem bezeichnet, dessen Anfangspunkt $0'$ im Schwerpunkt liegt und dessen Achsen bei *ruhender* Lokomotive den entsprechenden Achsen des Koordinatensystemes der $x$, $y$, $z$ parallel sind, bei *in gaukelnder Bewegung begriffener* Lokomotive aber ihre Lage in derselben nicht verändern.

Als die allgemeinen Koordinaten, welche zu der Bestimmung der Lage der schwingenden Lokomotive dienen, kann man wählen: 1. die

Hebung des Schwerpunktes $\overline{OO'} = \zeta$ in vertikaler Richtung; 2. den Winkel $\varphi$ der Drehung um eine horizontale der $y$-Achse parallele Achse durch den Schwerpunkt; 3. den Winkel $\psi$ der Drehung um die $x'$-Achse, also um die Längsachse der Lokomotive.




Es entsprechen dann die Änderungen der Koordinate $\zeta$ dem Wogen, die Änderungen der Koordinate $\varphi$ dem Nicken und die Änderungen der Koordinate $\psi$ dem Wanken der Lokomotive.

Die Gleichungen für die Transformation der rechtwinkligen Koordinaten $x$, $y$, $z$ in die allgemeinen Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ gewinnt man durch Aufstellung von Beziehungen zwischen den Koordinaten $x$, $y$, $z$ und $x'$, $y'$, $z'$. Hierzu benötigt man die Richtungskosinus der Achsen des einen Systemes bezogen auf die des anderen. Sie ergeben sich aus sphärischen Dreiecken und sind in der folgenden Tabelle verzeichnet:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $\cos\varphi$ | $0$ | $\sin\varphi$ |
| $y'$ | $\sin\psi \cdot \sin\varphi$ | $\cos\psi$ | $-\sin\psi \cdot \cos\varphi$ |
| $z'$ | $-\cos\psi \cdot \sin\varphi$ | $\sin\psi$ | $\cos\psi \cdot \cos\varphi$ |

Man erhält demnach die Transformationsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\varphi - y'\sin\psi\sin\varphi - z'\cos\psi\sin\varphi \\
y &= y'\cos\psi + z'\sin\psi \\
z &= \zeta + x'\sin\varphi - y'\sin\psi\cos\varphi + z'\cos\psi\cos\varphi.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Diese Gleichungen nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man, wie dies üblich ist, sich auf die Untersuchung jener Bewegungen beschränkt, bei welchen sich das System nur sehr wenig aus seiner Ruhelage entfernt. Indem man sodann nur die Glieder erster Ordnung in den allgemeinen Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ beibehält, ersetzt man begrifflich das vorliegende verwickelte System durch ein wesentlich einfacheres. Man weiß, daß die Untersuchung dieses einfacheren Systemes den allgemeinen Typus der Bewegung des ursprünglichen Systemes umso genauer liefert, je kleiner die eintretenden Bewegungen sind.

Die Transformationsgleichungen, welche zu dem gewählten einfacheren Systeme führen, sind demnach

$$(1') \qquad \begin{aligned} x &= x' - z'\varphi \\ y &= y' + z'\psi \\ z &= \zeta + x'\varphi - y'\psi + z'. \end{aligned}$$

### Die Ausdrücke für die lebendige Kraft und das Potential der Lokomotive.

Den Ausdruck für die lebendige Kraft des schwingenden Systems in den allgemeinen Koordinaten $\varphi$, $\psi$ und $\zeta$ gewinnt man am einfachsten, indem man die lebendige Kraft in den rechtwinkligen Koordinaten $x, y, z$ berechnet und an Stelle der Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, mit Hilfe der Gleichungen (1') die Geschwindigkeiten in allgemeinen Koordinaten $\frac{d\zeta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$ einführt.

Man hat hierbei zu beachten, daß der Anfangspunkt $0'$ des Koordinatensystems $x'$, $y'$, $z'$ im Schwerpunkte liegt und daß die Achsen $x'$, $y'$, $z'$ als Hauptträgheitsachsen angesehen werden können. Hieraus erschließt man das Verschwinden der Schwerpunktskoordinaten und des Deviationsmomentes $\Sigma m \cdot x'y'$ und erhält die lebendige Kraft $L$ des schwingenden Systems in der Form

$$(2) \qquad L = \tfrac{1}{2} M \cdot \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} B \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} A \cdot \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2;$$

hierbei bedeuten $M$ die Masse, $A$ und $B$ die Hauptträgheitsmomente bezogen auf die Achsen $x'$ und $y'$.

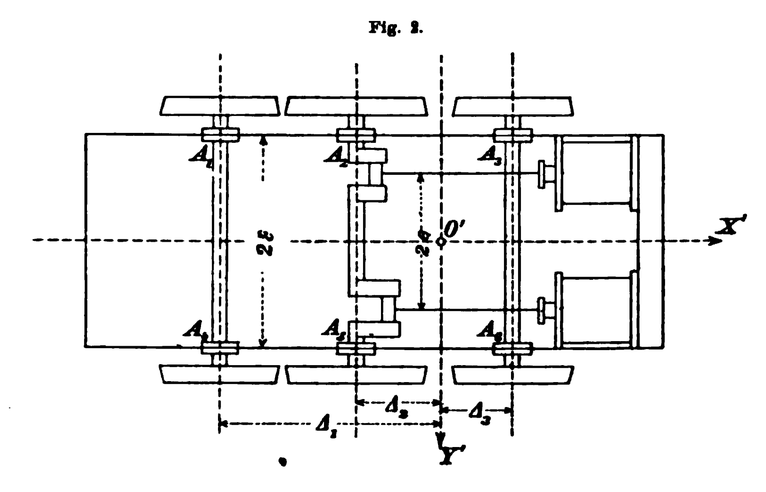
Den Ausdruck für das Potential des schwingenden Systems erhält man durch die Berechnung der Arbeit, welche man gegen die elastischen Kräfte der Federn, auf denen die Lokomotive ruht, leisten muß, um sie aus der Ruhelage in eine verschobene, durch die Werte der allgemeinen Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ bestimmte Lage zu bringen.

Es möge zur Fixierung der Vorstellungen die auch von Redten-

bacher gewählte Lokomotive mit inneren Zylindern und sechs nicht gekuppelten Rädern gewählt werden. Allgemeinere Typen lassen sich ersichtlich in gleicher Weise behandeln.

Die Federn seien an den Stellen $A_1, A_2 \ldots A_6$ angebracht. Die Koordinaten der Angriffspunkte der elastischen Kräfte der Federn be-

Fig. 2.




zogen auf das mit der Lokomotive festverbundene Koordinatensystem der $x', y', z'$ sind:

$$A_1(-\Delta_1;\ -\varepsilon;\ z_1');\quad A_2(-\Delta_2;\ -\varepsilon;\ z_2');\quad A_3(\Delta_3;\ -\varepsilon;\ z_3');$$
$$A_4(-\Delta_1;\ \varepsilon;\ z_4');\quad A_5(-\Delta_2;\ \varepsilon;\ z_5');\quad A_6(\Delta_3;\ \varepsilon;\ z_6').$$

Der durch die Transformationsgleichungen (1′) bestimmten verschobenen Lage des Systems entsprechen in dem Koordinatensysteme der $x', y', z'$ die folgenden $z$-Koordinaten der Punkte $A$:

$$A_1 \ldots z_1 = z_1' + \zeta - \Delta_1\varphi + \varepsilon\psi;\quad A_2 \ldots z_2 = z_2' + \zeta - \Delta_2\varphi + \varepsilon\psi;$$
$$A_3 \ldots z_3 = z_3' + \zeta + \Delta_3\varphi + \varepsilon\psi;\quad A_4 \ldots z_4 = z_4' + \zeta - \Delta_1\varphi - \varepsilon\psi;$$
$$A_5 \ldots z_5 = z_5' + \zeta - \Delta_2\varphi - \varepsilon\psi;\quad A_6 \ldots z_6 = z_6' + \zeta + \Delta_3\varphi - \varepsilon\psi.$$

Dehnt man eine, etwa die $\nu$te Feder, indem man sie aus der durch das Gewicht der Lokomotive zusammengedrückten Lage um den Betrag $h_\nu$ entfernt, so widerstrebt sie der Verschiebung mit der Kraft

$$P_\nu = -f_\nu \cdot h_\nu.$$

Die Arbeit, welche man leisten muß, um diese eine Feder aus ihrer Ruhelage um den Betrag $z_\nu - z_\nu'$ zu verschieben, ist

$$A_\nu = \int_0^{z_\nu - z_\nu'} f_\nu \cdot h_\nu \cdot dh_\nu = \tfrac{1}{2} f_\nu \cdot (z_\nu - z_\nu')^2.$$

Somit ist die gesamte Arbeit, welche zu der Verschiebung der ganzen Lokomotive aus ihrer Ruhelage in die durch die Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ bestimmten Lage benötigt wird, oder das Potential $V$ durch die Summe

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\nu=6} f_\nu (z_\nu - z_\nu')^2$$

gegeben.

Setzt man voraus, daß die Federn einer Achse von gleicher Stärke sind, daß also

$$f_1 = f_4; \quad f_2 = f_5; \quad f_3 = f_6$$

ist, und wählt man die abkürzenden Bezeichnungen

$$f_1 + f_2 + f_3 = F_1$$

$$f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3 = F_2$$

$$f_1 \Delta_1^2 + f_2 \Delta_2^2 + f_3 \Delta_3^2 = F_3$$

so erhält man nach einfachen Reduktionen

$$V = F_1 \cdot \zeta^2 + F_3 \cdot \varphi^2 + F_1 \cdot \varepsilon^2 \psi^2 - 2 F_2 \cdot \zeta\varphi. \tag{3}$$

Der Ausdruck für das Potential wird noch einfacher in dem besonderen Falle einer solchen Konstruktion der Lokomotive, daß die Federn durch das Gewicht, welches sie tragen, in der Ruhelage um gleiche Beträge zusammengedrückt sind.

Die Bedingung für das Eintreten dieses speziellen Falles, in welchem sich zugleich mit dem Ausdruck für das Potential die Darstellung des ganzen Problems wesentlich vereinfacht, ist aus den Gleichgewichtsbedingungen eines starren Systems zu entnehmen und ist

$$F_2 = 0,$$

so daß in diesem Falle

$$V = F_1 \cdot \zeta^2 + F_3 \cdot \varphi^2 + F_1 \cdot \varepsilon^2 \psi^2 \tag{3'}$$

wird.

### Die Eigenschwingungen der Lokomotive.

Mit Hilfe der entwickelten Ausdrücke für die lebendige Kraft und das Potential des Systemes kann man unter Benutzung der Differentialgleichungen von Lagrange die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen des Systemes angeben.

Wählt man die allgemeineren Annahmen, welche durch die Ausdrücke (2) und (3) dargestellt sind, so werden diese Gleichungen:

$$M \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2F_1 \cdot \zeta - 2F_2 \cdot \varphi = 0$$
$$B \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2F_3 \cdot \varphi - 2F_2 \cdot \zeta = 0$$
$$A \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2F_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot \psi \qquad = 0.$$

Entsprechend den drei Freiheitsgraden des Systemes gibt es bekanntlich drei Eigenschwingungen. Jede derselben ist vom harmonischen Typus. Man erhält sie, indem man eine freie Bewegung voraussetzt, bei welcher die drei Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ ein und derselben Kreisfunktion der Zeit proportional sind, und sodann aus den Differentialgleichungen die Bedingungen sucht, welchen die Konstanten dieser Bewegung genügen müssen.

Man setzt also

$$\zeta = a \cdot \cos(nt + \delta); \quad \varphi = b \cos(nt + \delta); \quad \psi = c \cdot \cos(nt + \delta)$$

und erhält für die Konstanten $a$, $b$, $c$ und $n$ (die Phase $\delta$ bleibt willkürlich) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(-M \cdot n^2 + 2F_1) \cdot a - 2F_2 \cdot b = 0 \\ (4) \qquad &-2F_2 \cdot a + (-B \cdot n^2 + 2F_3) b = 0 \\ &(-An^2 + 2F_1 \cdot \varepsilon^2) \cdot c \qquad = 0. \end{aligned}$$

Mögliche Schwingungen von dem verlangten Typus ergeben sich daher nur durch die Annahmen

$$a = b = 0, \quad c \text{ willkürlich}$$

und

$$n = n_3 = \varepsilon \sqrt{\frac{2F_1}{A}},$$

oder durch die Annahme

$$c = 0$$

und $n$ gleich einer Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 2F_1 - Mn^2; & -2F_2 \\ -2F_2 \quad ; & 2F_3 - Bn^2 \end{vmatrix} = 0,$$

während das Verhältnis der beiden Konstanten $a$ und $b$ durch die erste oder die zweite der Gleichungen (4) bestimmt ist.

Man erhält für die Schwingungszahlen $n_1$ und $n_2$ dieser beiden anderen Eigenschwingungen die Werte

$$n = n_1 = \sqrt{\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B} + \sqrt{\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + 4\frac{F_2^2}{MB}}}$$
$$n = n_2 = \sqrt{\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B} - \sqrt{\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + 4\frac{F_2^2}{MB}}},$$

wobei es genügt, sämtliche Quadratwurzeln durch ihren absoluten Betrag zu ersetzen.

Bezeichnen $w_1$, $w_2$, $w_3$ drei willkürliche Konstante, so erhält man für die drei Eigenschwingungen, welche den Werten der Schwingungszahlen $n_1$, $n_2$, $n_3$ und den aus den Gleichungen (4) sich ergebenden Verhältnissen der Konstanten $a$, $b$, $c$ entsprechen, die folgenden Ausdrücke:

Erste Eigenschwingung:

$$\zeta = 2F_2 \cdot w_1 \cdot \cos(n_1 t + \delta_1); \quad \varphi = (2F_1 - Mn_1^2) \cdot w_1 \cos(n_1 t + \delta_1); \quad \psi = 0.$$

Zweite Eigenschwingung:

$$\zeta = 2F_2 \cdot w_2 \cos(n_2 t + \delta_2); \quad \varphi = (2F_1 - Mn_2^2)\, w_2 \cos(n_2 t + \delta_2); \quad \psi = 0.$$

Dritte Eigenschwingung:

$$\zeta = 0; \quad \varphi = 0; \quad \psi = w_3 \cos(n_3 t + \delta_3).$$

Eine wesentliche Vereinfachung gewinnt die Darstellung des Problems in dem behandelten allgemeineren Falle durch die Einführung neuer Veränderlicher an Stelle der generellen Koordinaten $\varphi$, $\psi$ und $\zeta$. Nennt man diese neuen Variablen $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$ und definiert man ihre Beziehung zu den alten Veränderlichen durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \zeta &= 2F_2 \cdot \chi_1 + 2F_2 \cdot \chi_2 \\ \varphi &= (2F_1 - Mn_1^2) \cdot \chi_1 + (2F_1 - Mn_2^2) \cdot \chi_2 \\ \psi &= \chi_3, \end{aligned} \tag{5}$$

so gehen die Ausdrücke für die lebendige Kraft und das Potential des Systemes bei der Durchführung der Transformation (5) in die Summe von lauter Quadraten über. Es sind die durch die Gleichungen (5) bestimmten neuen Variablen $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$ die sogenannten *Normalkoordinaten* des Systemes. Bezeichnet man

$$4MF_2^2 + B(2F_1 - Mn_1^2)^2 = A_{n_1}$$
$$4MF_2^2 + B(2F_1 - Mn_2^2)^2 = A_{n_2},$$

so erhält man durch die Einführung der Transformation (5) in die Gleichungen (2) und (3)

$$L = \tfrac{1}{2} \cdot A_{n_1} \cdot \left(\frac{d\chi_1}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot A_{n_2} \left(\frac{d\chi_2}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} A \left(\frac{d\chi_3}{dt}\right)^2$$
$$V = \tfrac{1}{2} A_{n_1} \cdot n_1^2 \cdot \chi_1^2 + \tfrac{1}{2} A_{n_2} \cdot n_2^2 \cdot \chi_2^2 + \tfrac{1}{2} A \cdot n_3^2 \cdot \chi_3^2.$$

Diese einfachen Ausdrücke von $L$ und $V$ in den Koordinaten $\chi$ kann man entweder unmittelbar aus der Eigenschaft dieser Koordinaten, die Normalkoordinaten des Systemes zu sein, erschließen oder durch direktes Ausrechnen als richtig erweisen.

Die Differentialgleichungen nehmen für die Normalkoordinaten $\chi$ die Form

$$A_{n_1} \cdot \frac{d^2\chi_1}{dt^2} + n_1^2 \cdot A_{n_1} \cdot \chi_1 = 0$$

$$A_{n_2} \cdot \frac{d^2\chi_2}{dt^2} + n_2^2 \cdot A_{n_2} \cdot \chi_2 = 0$$

$$A \frac{d^2\chi_3}{dt^2} + n_3^2 \cdot A \quad \cdot \chi_3 = 0$$

an, und die drei Eigenschwingungen des Systemes sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $\chi_1 = w_1 \cos(n_1 t + \delta_1)$ | $\chi_2 = 0$ | $\chi_3 = 0$ |
| 2) | $\chi_1 = 0$ | $\chi_2 = w_2 \cos(n_2 t + \delta_2)$ | $\chi_3 = 0$ |
| 3) | $\chi_1 = 0$ | $\chi_2 = 0$ | $\chi_3 = w_3 \cos(n_3 t + \delta_3)$. |

Sind die Werte der Normalkoordinaten bekannt, so kann man natürlich mit Hilfe der Transformation (5) die Werte der generellen Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ berechnen.

Eine Vereinfachung anderer Art ist jene, welche das Problem durch die Annahme

$$F_2 = 0$$

erfährt. — Sie beruht darauf, daß unter dieser Annahme, entsprechend den Ausdrücken (2) und (3') für lebendige Kraft und Potential die generellen Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ *selbst zu den Normalkoordinaten des Systemes* werden. In diesem Falle sind die Differentialgleichungen

$$M \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2F_1\zeta \quad = 0$$

$$B \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2F_3\varphi \quad = 0$$

$$A \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2F_1\varepsilon^2 \cdot \psi = 0.$$

Die Schwingungszahlen der drei Eigenschwingungen sind:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{2F_1}{M}}; \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{2F_3}{B}}; \quad \nu_3 = \varepsilon\sqrt{\frac{2F_1}{A}},$$

und die Eigenschwingungen selbst ergeben sich in der Form

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $\zeta = w_1 \cos(\nu_1 t + \delta_1)$ | $\varphi = 0$ | $\psi = 0$ |
| 2) | $\zeta = 0$ | $\varphi = w_2 \cos(\nu_2 t + \delta_2)$ | $\psi = 0$ |
| 3) | $\zeta = 0$ | $\varphi = 0$ | $\psi = w_3 \cos(\nu_3 t + \delta_3)$. |

Unter der Annahme $F_2 = 0$ nehmen die Differentialgleichungen der freien Schwingungen in den Variablen $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ selbst jene einfache

Form an, welche in dem allgemeineren Falle erst durch die Einführung der Normalkoordinaten $\chi$ mit Hilfe der Gleichungen (5) erreicht werden kann.

## Die Differentialgleichungen der erzwungenen Schwingungen.

Es mögen auf das System Kräfte einwirken, deren Intensität sich periodisch mit der Zeit verändert und deren Komponenten nach den generellen Koordinaten $\zeta$, $\varphi$, $\psi$ mit $Z$, $\Phi$, $\Psi$ bezeichnet sein sollen.

Um die Vorteile zu genießen, welche die Einführung der Normalkoordinaten $\chi$ in der Darstellung bedingt, wird man zunächst die Komponenten $X_1\,X_2\,X_3$ der gegebenen Kräfte nach den Koordinaten $\chi_1\,\chi_2\,\chi_3$ aufstellen. Man erhält unter Benutzung der Transformation (5) hierfür die Werte

$$X_1 = 2F_2 \cdot Z + (2F_1 - Mn_1^2)\,\Phi$$
$$X_2 = 2F_2 \cdot Z + (2F_1 - Mn_2^2)\,\Phi$$
$$X_3 = \Psi.$$

Die Differentialgleichungen der erzwungenen Schwingungen des Systemes nehmen sodann unter Benutzung der Normalkoordinaten die Form an:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\chi_1}{dt^2} + n_1^2\chi_1 &= \frac{1}{A_{n_1}} X_1 \\ \frac{d^2\chi_2}{dt^2} + n_2^2\chi_2 &= \frac{1}{A_{n_2}} X_2 \\ \frac{d^2\chi_3}{dt^2} + n_3^2\chi_3 &= \frac{1}{A} X_3. \end{aligned}$$

Würde man sich jedoch auf die Behandlung des Spezialfalles $F_2 = 0$ beschränken, so würden die Differentialgleichungen der erzwungenen Schwingungen in der Form

$$\text{(I')} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \nu_1^2 \cdot \zeta &= \frac{1}{M} \cdot Z \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \nu_2^2 \cdot \varphi &= \frac{1}{B} \cdot \Phi \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \nu_3^2 \cdot \psi &= \frac{1}{A} \cdot \Psi \end{aligned}$$

erscheinen.

Die Kraftkomponenten $X_1$, $X_2$, $X_3$ sind linear aus den Komponenten $Z$, $\Phi$, $\Psi$ zusammengesetzt. Die Differentialgleichungen (I) führen daher bei ihrer Integration in letzter Linie auf die Lösung formal ganz gleicher Aufgaben zurück, welche die Integration der Gleichungen (I') bietet. Hat man die den Gleichungen (I') bei einem

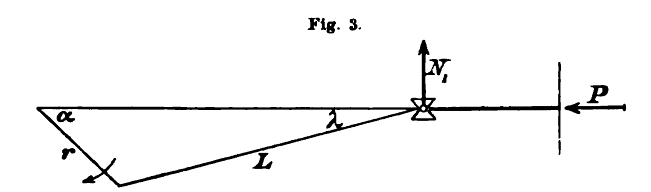
gegebenen Systeme der $Z$, $\Phi$, $\Psi$ entsprechenden erzwungenen Schwingungen entwickelt, so kann man aus diesem Vorrate von Funktionen die Lösung im allgemeineren Falle linear zusammensetzen. Die folgenden Betrachtungen schließen sich daher nur an den Spezialfall der Gleichungen (I′) oder, was dasselbe bedeutet, an die Annahme $F_2 = 0$ an, ohne daß die Verwendbarkeit der Überlegungen für den allgemeineren Fall hierdurch eine Einbuße erfährt.

## Die Komponenten $Z$, $\Phi$, $\Psi$ der periodischen Kräfte.

Eine noch weitergehende Vereinfachung des Problems läßt sich dadurch erzielen, daß man die Wirkung jeder einzelnen der periodischen Kräfte, welche die störende Bewegung der Lokomotive erzeugen, für sich untersucht. Man weiß aus dem Bernoullischen Satze von der Koexistenz der kleinen Bewegungen, daß man aus der berechneten Wirkung der einzelnen Kräfte die tatsächlich infolge des gleichzeitigen Einflusses aller Kräfte eintretende Bewegung in einfacher Weise zusammensetzen kann.

Es möge daher in den folgenden Untersuchungen zunächst vorausgesetzt werden, daß auf die Lokomotive nur *eine* störende Kraft, der periodisch veränderliche Druck der Schubstange auf den Führungskörper einwirke.

Fig. 3.




$r$ sei die Länge der Kurbel, $L$ die der Schubstange, $\alpha$ und $\lambda$ seien die Winkel, welche die erste, beziehungsweise die zweite dieser Geraden in einem bestimmten Zeitmomente $t$ mit der Richtung der Kolbenstange einschließen. Die Kraft, mit welcher die letztere hin- und herbewegt wird, heiße $P$. Es ist dann der Druck $N_1$, welchen der betrachtete Führungskörper nach aufwärts, also in der Richtung der $z'$-Achse erfährt, gegeben durch die Beziehung

$$N_1 = P \cdot \operatorname{tg} \lambda.$$

Nimmt man an, daß die Länge der Kurbel $r$ im Verhältnis zur Schubstange $L$ so klein sei, daß man höhere Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{L}$ unterdrücken darf, so kann man

$$N_1 = P \cdot \frac{r}{L} \cdot \sin \alpha$$

setzen.

Dieser Ausdruck gilt zunächst für Werte des Winkels $\alpha$, die kleiner als 180° sind. Für größere Werte dieses Winkels wird $\sin\alpha$ negativ; zugleich wechselt aber auch die treibende Kraft $P$ ihre Richtung, so daß das Produkt $P \sin\alpha$ stets positiv und die Kraft $N_1$ immer nach aufwärts gerichtet ist. Am einfachsten drückt man dies formal dadurch aus, daß man unter $P$ eine beständig positive Zahl versteht und $\sin\alpha$ durch seinen absoluten Betrag ersetzt, was in der üblichen Weise durch Einschließen zwischen vertikale Striche bezeichnet wird.

Es ist dann der Ausdruck

$$N_1 = P \cdot \frac{r}{L} \cdot |\sin\alpha|$$

für jeden Wert des $\alpha$ zeichenrichtig. Der Winkel $\alpha$ wird hierbei im Sinne des Uhrzeigers positiv angenommen, und die Formel möge sich beziehen auf jene Kurbel, welche auf der Seite der positiven $y'$-Achse gelegen ist.

Die zweite Kurbel der Lokomotive ist gegen die erste um 90° verdreht angebracht. Die Kraft $N_2$, mit welcher der zweite Führungskörper nach aufwärts beansprucht wird, ist daher in demselben Zeitmomente $t$ durch den Ausdruck

$$N_2 = P \cdot \frac{r}{L} \cdot |\cos\alpha|$$

gegeben.

Die Angriffspunkte dieser Kräfte haben in dem Systeme $x', y', z'$, welches mit der Lokomotive fest verbunden ist, die Koordinaten[1]):

$$N_1 \begin{cases} x_1' = L + r\cos\alpha - \Delta_2 \\ y_1' = e \end{cases} \qquad N_2 \begin{cases} x_2' = L + r\sin\alpha - \Delta_2 \\ y_2' = -e. \end{cases}$$

Hierbei ist bereits auf jene Vernachlässigung Rücksicht genommen, die bei der Berechnung der Größe der Kräfte verwendet wurde, und es ist die Annahme gemacht, daß die zweite Kurbel der ersten nachläuft.

Die allgemeinen Kraftkomponenten $Z$, $\Phi$, $\Psi$, welche aus den beiden Kräften $N_1$ und $N_2$ entspringen, erhält man durch Berechnung der Arbeitswerte bei jenen Verschiebungen des Systemes, bei welchen nur je *eine* allgemeine Koordinate verändert wird. Versteht man unter $dx_\zeta$, $dy_\zeta$, $dz_\zeta$ eine Verschiebung des Systemes, bei welchem nur die $\zeta$-Koordinate um $d\zeta$ zunimmt, $\varphi$ und $\psi$ aber ungeändert bleiben, so ist die hierbei geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} Z d\zeta = {} & N_1 \cos(z'x) \cdot dx_{1,\zeta} + N_1 \cos(z'y)\, dy_{1,\zeta} + N_1 \cos(z'z)\, dz_{1,\zeta} \\ & + N_2 \cos(z'x)\, dx_{2,\zeta} + N_2 \cos(z'y)\, dy_{2,\zeta} + N_2 \cos(z'z)\, dz_{2,\zeta}. \end{aligned}$$

1) Vgl. die Figuren 2 und 3.

Es beziehen sich hierbei $dx_{1,\zeta}\ldots$ und $dx_{2,\zeta}\ldots$ auf die Änderungen der Koordinaten des Angriffspunktes der ersten, beziehungsweise der zweiten Kraft. Mit Hilfe der Transformationsgleichungen (1) und unter Berücksichtigung der gewählten Vereinfachung des Systems erhält man hieraus:

$$Z = N_1 + N_2 = \frac{P \cdot r}{L} \cdot \{ |\sin \alpha| + |\cos \alpha| \}.$$

In gleicher Weise findet man

$$\Phi = N_1 \cdot x_1' + N_2 \cdot x_2' = \frac{P \cdot r^2}{L} \cdot \{ |\sin \alpha| \cdot \cos \alpha + |\cos \alpha| \cdot \sin \alpha \}$$
$$+ \frac{P \cdot r}{L} \cdot (L - \varDelta_2) \cdot \{ |\sin \alpha| + |\cos \alpha| \}$$

und

$$\Psi = -N_1 \cdot y_1' - N_2 \cdot y_2' = \frac{P \cdot r \cdot e}{L} \cdot \{ |\cos \alpha| - |\sin \alpha| \}.$$

Bewegt sich die Lokomotive mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts, so ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ der Raddrehung konstant, und man kann

$$\alpha = \omega \cdot t$$

setzen. Die Differentialgleichungen I′ nehmen sodann die Form an:

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \nu_1^2 \zeta &= \frac{P \cdot r}{L \cdot M} \cdot \{ |\sin(\omega t)| + |\cos(\omega t)| \} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \nu_2^2 \varphi &= \frac{P \cdot r^2}{L \cdot B} \cdot \{ |\sin(\omega t)| \cdot \cos(\omega t) + |\cos(\omega t)| \cdot \sin(\omega t) \} \\ &\quad + \frac{P \cdot r}{L \cdot B} (L - \varDelta_2) \{ |\sin(\omega t)| + |\cos(\omega t)| \} \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \nu_3^2 \psi &= \frac{P \cdot r \cdot e}{L \cdot A} \cdot \{ |\cos(\omega t)| - |\sin(\omega t)| \}. \end{aligned}$$

Es entspricht die erste dieser Gleichungen dem „Wogen“, die zweite dem „Nicken“ und die dritte dem „Wanken“ der Lokomotive.

Die Differentialgleichungen (II) beziehen sich entsprechend der aus dem Bernoullischen Satze gewonnenen Vereinfachung auf jene störenden Bewegungen, welche der Einwirkung nur *eines* Umstandes, des periodisch veränderlichen Druckes der Schubstange auf den Führungskörper, entspringen. Auf die Behandlung der anderen störenden Kräfte, welche bei der Untersuchung der Lokomotivbewegungen zu berücksichtigen sind, wird an einer späteren Stelle eingegangen werden.

## Integration der Differentialgleichungen (II).

Die Integration der drei Differentialgleichungen (II) läßt sich gemeinsam nach dem folgenden Schema durchführen. In der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung eines Systemes

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + n^2 s = F(t)$$

sei der Verlauf der periodisch veränderlichen Kraft $F(t)$ in einem Periodenintervall $0 \leqq t \leqq 2p$ durch einen einfachen Ausdruck $f(t)$ gegeben. Es sei also für Werte

$$0 \leqq t \leqq 2p$$

$$F(t) = f(t).$$

Die erregte Bewegung des Systemes erscheint bekanntlich in der Form

$$s = E(t) + A\cos(nt) + B\sin(nt),$$

in welcher $E(t)$ eine Funktion von der Periode der Kraft, also $2p$, ist und die vollkommen bestimmte erzwungene Schwingung des Systemes darstellt, während $A\cos(nt) + B\sin(nt)$ eine freie Schwingung vorstellt, deren willkürliche Konstante $A$ und $B$ zur Erfüllung vorgegebener Anfangsbedingungen dienen. Die erzwungene Schwingung $E(t)$ ist vermöge ihrer Periodizität für jeden Wert der Zeit gegeben, wenn der Verlauf in einem Periodenintervall bekannt ist. Die Werte von $E(t)$ in dem ersten Periodenintervall sind aber durch die Formel

$$(6) \quad e(t) = \frac{1}{n}\int_{\alpha=0}^{\alpha=t} f(\alpha)\sin(n(t-\alpha))\,d\alpha + \frac{1}{2n\sin(np)}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2p} f(\alpha)\cos(n(t+p-\alpha))\,d\alpha$$

$$0 \leqq t \leqq 2p$$

bestimmt.[1]) Kennt man daher den Verlauf der periodischen Kraft in einem Periodenintervall, also die Funktion $f(t)$, so kann man aus der Formel (6) den Verlauf der erzwungenen Schwingung $E(t)$ in dem ersten Periodenintervall, also die Funktion $e(t)$, berechnen. Man hat sodann diesen Verlauf von Intervall zu Intervall zu wiederholen, um ein Bild von dem Verhalten der Funktion $E(t)$ für jeden Wert der Zeit zu gewinnen.

## 1. Die Differentialgleichung des Wogens.

Um das angegebene Verfahren zur Integration der Differentialgleichungen (II) zunächst auf die Gleichung des Wogens anzuwenden, setzt man die Kraft

$$F_1(t) = \frac{P \cdot r}{L \cdot M} \cdot \{|\sin(\omega t)| + |\cos(\omega t)|\}.$$

1) Sitz.-Ber. der K. Akademie der Wissensch. Wien Bd. CXIV Abt. IIa. S. 877 und ff.

Die Periode dieser Funktion ist $\frac{\pi}{2\omega}$; es ist also

$$p = \frac{\pi}{4\omega}$$

zu wählen. Der Verlauf der Kraft in einem Periodenintervall, also für Werte

$$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega}$$

ist

$$f_1(t) = \frac{P \cdot r}{L \cdot M} \cdot \{\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\} = \frac{P \cdot r \cdot \sqrt{2}}{L \cdot M} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Setzt man dies in die Formel (6) ein, so erhält man für den Verlauf der erzwungenen Schwingung des Wogens in dem Gebiete der ersten Periode, also für die Funktion $e_1(t)$ den Ausdruck

$$e_1(t) = \frac{P \cdot r \cdot \sqrt{2}}{L \cdot M \cdot \nu_1} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=t} \sin\left(\omega\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin(\nu_1(t - \alpha))\, d\alpha$$

$$+ \frac{P \cdot r \cdot \sqrt{2}}{2\, L M \nu_1 \sin\left(\frac{\nu_1 \pi}{4\omega}\right)} \cdot \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2\omega}} \sin\left(\omega\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\nu_1\left(t + \frac{\pi}{4\omega} - \alpha\right)\right) d\alpha,$$

welcher für die Werte

$$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega}$$

gilt.

Nach Ausführung der Integrationen ergibt sich

$$e_1(t) = \frac{P \cdot r \cdot \sqrt{2}}{L \cdot M(\nu_1^2 - \omega^2)} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$- \frac{P \cdot r \cdot \omega}{L \cdot M \cdot \nu_1 (\nu_1^2 - \omega^2) \sin\left(\frac{\nu_1 \pi}{4\omega}\right)} \cdot \cos\left(\nu_1\left(t - \frac{\pi}{4\omega}\right)\right).$$

Jener Anteil an dem Wogen der Lokomotive, der durch den Druck der Schubstange auf den Führungskörper erzeugt wird, ist demnach dargestellt durch die Überlagerung zweier Funktionen

$$\zeta = E_1(t) + S_1(t).$$

Die erste derselben, die erzwungene Schwingung $E_1(t)$, ist eine periodische Funktion von der Periode $\frac{\pi}{2\omega}$, deren Verlauf in dem ersten Periodenintervall durch den Ausdruck $e_1(t)$ gegeben ist. Die zweite,

die freie Schwingung $S_1(t)$ ist eine periodische Funktion von der Periode $\frac{2\pi}{\nu_1}$, deren Verlauf in dem ersten Periodenintervall durch

$$s_1(t) = A\cos(\nu_1 t) + B\sin(\nu_1 t),$$

für

$$0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\nu_1}$$

bestimmt ist und zwei willkürliche Konstante besitzt, die zur Erfüllung vorgegebener Anfangsbedingungen dienen. Beide Funktionen, $E_1(t)$ und $S_1(t)$, lassen sich graphisch konstruieren und gestatten unschwer eine Untersuchung über die maximalen Werte von $\zeta$, welche sich im Verlaufe der Zeit $t$ ergeben.

Aus dem Verlaufe der Funktion $E_1(t)$ in dem ersten Periodenintervall, also aus dem Ausdrucke $e_1(t)$, erkennt man, daß für Werte von $\omega$, welche Wurzeln der Gleichung

$$\sin\left(\frac{\nu_1 \pi}{4\omega}\right) = 0$$

sind, also für die Werte

$$\omega = \frac{\nu_1}{4n},$$

wobei $n$ eine ganze Zahl bedeutet, die Funktion $e_1(t)$ eine unmögliche Form annimmt. In diesem Falle wird die Bewegung eine exzessive und die Reibungskräfte müssen in Rechnung gezogen werden, wie klein sie auch sein mögen.

Die Wahl $\omega = \nu_1$ liefert für $e_1(t)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, deren Wert sich nach bekannten Methoden leicht ermitteln läßt und keine exzessive Bewegung darstellt.

## 2. Die Differentialgleichung des Nickens.

Der Ausdruck für die periodische Kraft ist in diesem Falle aus zwei Summanden zusammengesetzt. Unter Anwendung des Bernoullischen Satzes kann man daher die erzwungene Bewegung $E_2(t)$ in zwei Teile spalten, indem man

$$E_2(t) = E_2'(t) + E_2''(t)$$

setzt. Es entspricht hierbei $E_2'(t)$ der erzwungenen Bewegung unter der Einwirkung der Kraft

$$F_2'(t) = \frac{P\cdot r^2}{L\cdot B}\cdot\{|\sin(\omega t)|\cos(\omega t) + |\cos(\omega t)|\sin(\omega t)\},$$

während $E_2''(t)$ die erzwungene Bewegung unter dem Einflusse der Kraft

$$F_2''(t) = \frac{P\cdot r\cdot(L-\Delta_2)}{L\cdot B}\{|\sin(\omega t)| + |\cos(\omega t)|\}$$

darstellt.

$F_2'''(t)$ ist jedoch ein Ausdruck von demselben Typus, wie $F_1(t)$, für welchen die erzwungene Schwingung bereits berechnet ist. Man kann daher unmittelbar aus dem Werte von $E_1(t)$ erschließen, daß $E_2''(t)$ eine periodische Funktion von der Periode $\frac{\pi}{2\omega}$ ist, deren Verlauf in dem ersten Periodenintervalle durch den Ausdruck

$$e_2''(t) = \frac{P \cdot r \cdot (L - \Delta_2) \cdot \sqrt{2}}{L \cdot B \cdot (\nu_2^2 - \omega^2)} \left\{ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\omega}{\nu_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right)} \cdot \cos\left(\nu_2 t - \frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right) \right\}$$

$$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega}$$

dargestellt wird, und es erübrigt nurmehr die Berechnung der erzwungenen Schwingung $E_2'(t)$, welche unter der Einwirkung der Kraft $F_2'(t)$ eintritt.

Der Verlauf der periodischen Kraft $F_2'(t)$ in einem Periodenintervalle sei durch den Ausdruck $f_2'(t)$ gegeben. Man erhält hierfür:

$$\text{im Gebiete } 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega} \qquad f_2'(t) = \frac{P \cdot r^2}{L \cdot B} \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\frac{\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{\pi}{\omega} \qquad f_2'(t) = 0$$

$$\frac{\pi}{\omega} \leqq t \leqq \frac{3\pi}{2\omega} \qquad f_2'(t) = -\frac{P \cdot r^2}{L \cdot B} \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\frac{3\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega} \qquad f_2'(t) = 0.$$

Entsprechend der Tatsache, daß der Verlauf von $F_2'(t)$ in einem Periodenintervalle nicht durch einen einzigen Ausdruck, sondern in jedem der vier angegebenen Teilgebiete durch einen anderen gegeben ist, liefert auch die Formel (6) für den Verlauf der periodischen Funktion $E_2'(t)$ in dem ersten Periodengebiete $0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega}$, also für $e_2'(t)$, nicht einen, sondern den vier Teilgebieten entsprechend vier Ausdrücke, die sich zu dem stetigen Verlaufe von $e_2'(t)$ zusammenschließen. Man erhält durch die Auswertung der Formel (6)

für Werte des Teilgebietes $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega}$

$$e_2'(t) = \frac{P \cdot r^2}{L \cdot B(\nu_2^2 - 4\omega^2)} \sin(2\omega t) + k \cdot \sin\left(\frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right) \cos\left(\nu_2 t - \frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right),$$

für Werte des Teilgebietes $\frac{\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{\pi}{\omega}$

$$e_2'(t) = -k \cdot \cos\left(\frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right) \sin\left(\nu_2 t - \frac{3\nu_2 \pi}{4\omega}\right),$$

für Werte des Teilgebietes $\frac{\pi}{\omega} \leqq t \leqq \frac{3\pi}{2\omega}$

$$e_2'(t) = -\frac{P \cdot r^2}{L \cdot B(\nu_2^2 - 4\omega^2)} \cdot \sin(2\omega t) - k \sin\left(\frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right) \cos\left(\nu_2 t - \frac{5\nu_2 \pi}{4\omega}\right),$$

für Werte des Teilgebietes $\frac{3\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega}$

$$e_2'(t) = k \cos\left(\frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right) \sin\left(\nu_2 t - \frac{7\nu_2 \pi}{4\omega}\right),$$

wobei zur Vereinfachung

$$\frac{2P \cdot r^2 \cdot \omega}{\nu_2 \cdot L \cdot B \cdot (\nu_2^2 - 4\omega^2) \cdot \cos\left(\frac{\nu_2 \pi}{2\omega}\right)} = k$$

gesetzt wurde.

Es ergibt sich daher für die Koordinate $\varphi$ die Überlagerung von drei periodischen Schwingungen

$$\varphi = E_2'(t) + E_2''(t) + S_2(t),$$

von welchen die erste und zweite zusammengenommen die erzwungene Schwingung darstellen, deren Verlauf in einem Periodenintervalle durch die Überlagerung der Funktionen $e_2'(t)$ und $e_2''(t)$ gegeben ist, während die dritte, $S_2(t)$, eine freie Schwingung des Systemes von der Periode $\frac{2\pi}{\nu_2}$ darstellt, deren Verlauf in einem Periodenintervalle

$$0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\nu_2} \qquad s_2(t) = A\cos(\nu_2 t) + B\sin(\nu_2 t)$$

ist und welche die zur Erfüllung der Anfangsbedingungen nötigen Konstanten $A$ und $B$ besitzt. Es genügt, wie man sieht, das Verhalten der erzwungenen Schwingung in dem Bereich einer Periode, also den Verlauf der Summe $e_2'(t) + e_2''(t)$ zwischen 0 und $\frac{2\pi}{\omega}$, zu untersuchen, wenn man über das Verhalten von $\varphi$ für jeden Wert der Zeit orientiert sein will. Auch in diesem Falle ist eine graphische Konstruktion der periodischen Funktionen leicht möglich.

Aus der Form von $e_2'(t)$ und $e_2''(t)$ erkennt man das Auftreten kritischer Geschwindigkeiten. Es nehmen für Werte von $\omega$, welche Wurzeln der Gleichungen

$$\cos\left(\frac{\nu_2 \pi}{2\omega}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\nu_2 \pi}{4\omega}\right) = 0$$

sind, also für alle Zahlen $\omega$ der Formen

$$\omega = \frac{\nu_2}{2m+1} \text{ oder } \omega = \frac{\nu_2}{4m}$$

($m$ eine ganze Zahl), $e_2'(t)$ beziehungsweise $e\ (t)$ unmögliche Werte an. In diesen Fällen ist stets die Reibung zu berücksichtigen.

Für die Werte $\omega = \nu_2$ und $\omega = \frac{\nu_2}{2}$ nehmen $e_2''(t)$ beziehungsweise $e_2'(t)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, deren Wert sich leicht bestimmen läßt.

### 3. Die Differentialgleichung des Wankens.

Die Kraft $F_3(t)$ ist in diesem Falle durch eine periodische Funktion von der Periode $\frac{\pi}{\omega}$ dargestellt, deren Verlauf in einem Periodenintervalle durch den Ausdruck $f_3(t)$ gegeben ist.

Es ist

$$\text{für } 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega} \quad f_3(t) = k' \cdot \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{für } \frac{\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{\pi}{\omega} \quad f_3(t) = -k' \cdot \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

wobei

$$\frac{P \cdot r \cdot e}{L \cdot A} = k'$$

gesetzt wurde.

Die Entwicklung der Formel (6) liefert daher in diesem Falle für den Verlauf der erzwungenen Schwingung $E_3(t)$ in einem Periodenintervalle den Ausdruck:

für $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega}$

$$e_3(t) = \frac{k' \cdot \sqrt{2}}{\nu_3^2 - \omega^2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{k' \cdot \omega}{\nu_3 (\nu_3^2 - \omega^2) \cos\left(\frac{\nu_3 \pi}{4\omega}\right)} \sin\left(\nu_3 t - \frac{\nu_3 \pi}{4\omega}\right)$$

für $\frac{\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{\pi}{\omega}$

$$e_3(t) = -\frac{k' \sqrt{2}}{\nu_3^2 - \omega^2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{k' \cdot \omega}{\nu_3 (\nu_3^2 - \omega^2) \cos\left(\frac{\nu_3 \pi}{4\omega}\right)} \sin\left(\nu_3 t - \frac{3\nu_3 \pi}{4\omega}\right).$$

Die Koordinate $\psi$ wird daher durch die Superposition zweier periodischer Funktionen ausgedrückt. Es ist

$$\psi = E_3(t) + S_3(t),$$

wobei die erzwungene Schwingung $E_3(t)$ eine Funktion von der Periode $\frac{\pi}{\omega}$ ist, deren Verlauf in einem Periodenintervall durch den Ausdruck $e_3(t)$ gegeben ist, während die hinzutretende freie Schwingung $S_3(t)$ die Periode $\frac{2\pi}{\nu_3}$ besitzt und in ihrem ersten Periodenintervalle durch

$$s_3(t) = A \cdot \sin(\nu_3 t) + B \cos(\nu_3 t)$$

gegeben ist, wobei $A$ und $B$ zur Erfüllung der Anfangsbedingung dienende willkürliche Konstante sind.

Die Funktion $E_3(t)$ läßt sich leicht graphisch konstruieren. Aus ihrer Form erkennt man, daß für die Werte

$$\omega = \frac{\nu_3}{2(2m+1)}$$

($m$ eine ganze Zahl) kritische Verhältnisse auftreten, welche die Berücksichtigung der Reibung erfordern.

Die Annahme $\omega = \nu_3$ liefert die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ und stellt keinen Ausnahmefall vor.

---

Die vorstehenden Entwicklungen dienten zur Übertragung der Theorie der kleinen Schwingungen auf das Problem der störenden Lokomotivbewegungen. Sie schließen sich an die Behandlung nur *einer* störenden Ursache, des periodisch wechselnden Druckes auf den Führungskörper an. Nach demselben Schema lassen sich jedoch auch jene Bewegungen der Lokomotive entwickeln, welche anderen periodisch veränderlichen Kräften entspringen, wenn deren Verlauf in einem Periodenintervall bekannt und damit die Anwendung der Formel (6) ermöglicht ist. Unter diesen die Lokomotivbewegung beeinflussenden Störungen bietet die Berücksichtigung der Einwirkung des Geleises eine besondere Schwierigkeit dar. Fliegner hat für die Entstehung der von den Schienenstößen herrührenden Kräfte eine anschauliche Überlegung geliefert und sie durch eine Fouriersche Reihe dargestellt. Wollte man die Deformation des Geleises und deren Rückwirkung auf die Lokomotivbewegung auch in der früher entwickelten Art darstellen, so müßte man in erster Linie für den Verlauf dieser Deformationen in einem Periodenintervalle eine einfache Darstellung besitzen. Man kann das Geleise als einen Stab unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkte betrachten. Die in diesem Falle auftretenden Deformationen lassen sich durch eine unendliche Reihe darstellen[1]), welche nach den Normalfunktionen des Stabes fortschreitet. Diese Reihe selbst würde keine für den vorliegenden Zweck brauchbare Form besitzen; allein sie ist so gebaut, daß ihre ersten Glieder als Näherungsformeln benützt werden können, so daß es möglich erscheint aus ihr einen näherungsweisen Ausdruck für die auftretenden Deformationen des Geleises während eines Periodenintervalles und damit die Grundlage für die Übertragung der vorliegenden Untersuchungen auch auf diesen Fall zu gewinnen.[2])

---

1) Sitzungsber. der k. Akademie der Wissenschaften Wien. Bd. CVIII Abt. IIa. p. 611.

2) Vergl. hierzu A. Kriloff: „Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben.“ Math. Annal. Bd. 61. S. 211.

# Die elastische Linie der Gehäuse von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern.

Von Dipl.-Ing. HANS LINSENMANN in München.

Die deformierenden Kräfte in elektrischen Maschinen sind teils mechanische, durch die Eigenschwere und das Drehmoment der Leistung gegeben, teils bedingt durch das Bestreben der Kraftlinien, den Luftraum zwischen Anker und Magnetrad, induziertem und induzierendem System zu verkürzen.

Das Eigengewicht und das am Umfang der Gehäusebohrung wirkende Drehmoment sind stabil elastische Kräfte, d. h. die Vergrößerung ihres deformierenden Einflusses durch die Deformation selbst ist zu vernachlässigen.

Ein labiles elastisches Gleichgewicht dagegen bilden die magnetischen Zugkräfte. Bei genauer Kreisform sind sie latent; erst durch eine vorhandene Deformation kommen sie zur Wirkung, verstärken sie und sich bis zur Bildung eines neuen Gleichgewichtszustandes, der aber jenseits der erlaubten Gestaltsänderung liegen kann.

Diese Wandlungen sollen im Nachfolgenden untersucht werden. Zunächst wollen wir uns mit den Kräften selbst befassen, Abschnitt I; dann soll der allgemeine mathematische Zusammenhang zwischen deren Biegungsmoment und der radialen Deformation aufgestellt und dessen Anwendung ohne Zuziehung magnetischer Zugkräfte erläutert werden, Abschnitt II; hierauf sollen auch diese eingeführt, die allgemeinste Gleichung unseres Problems gelöst und die praktisch wichtigen Fälle spezifiziert werden; es folgt die Durchrechnung an ausgeführten Maschinen, Abschnitt III; zum Schluß, in Teil IV, soll die Dynamik des Problems skizziert werden.

## I.

Um die magnetischen Zugkräfte analytisch zu fassen, bedürfen wir der Magnetisierungskurve, d. i. der E. M. K. der Maschine als Funktion des Erregerstromes bei Leerlauf (Fig. 1).

Ist $H_x$ die Kraftliniendichte pro Quadratzentimeter an irgend einer Stelle $x$ der Polteilung im Luftraum, so ist der magnetische Zug nach der Formel von **Maxwell**:

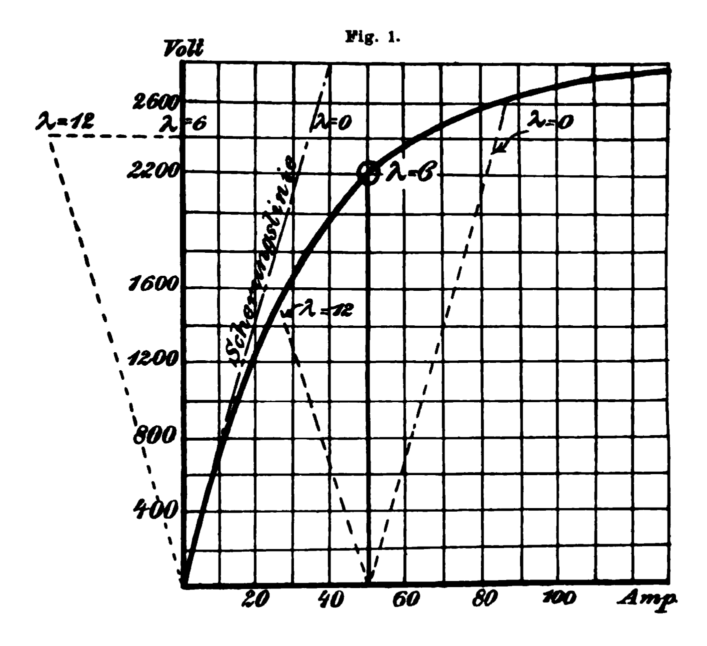
$$(1) \qquad Z_x = \frac{H_x^2}{24{,}7 \cdot 10^6} = \left(\frac{H_x}{5000}\right)^2 \text{kg/qcm}.$$

Ist die Kurve der $H_x$ über die Polteilung $\tau$ gegeben, dann ist, wenn $H_{eff}$ den effektiven Mittelwert der $H_x$-Kurve bedeutet, der mittlere Zug $Z'$ pro qcm Gehäusebohrung:

$$Z' = \left(\frac{H_{eff}}{5000}\right)^2 = \frac{1}{5000^2}\,\frac{1}{\tau}\int_0^\tau H_x^2\,dx \text{ kg/qcm}.$$

Die Abhängigkeit dieser mittleren Kraftlinienspannung vom Luftraum ist gegeben durch die Entstehung der Magnetisierungskurve (Fig. 1).

Fig. 1.




Die Tangente im Nullpunkt, die sogenannte Scherungslinie, trennt die Amperewindungen für Luft und Eisen.[1]) Eine Parallele zur Scherungslinie durch den Abszissenpunkt des normalen Erregerstromes gibt die Spannung und die damit proportionale Kraftliniendichte $H_{eff}$ für den Luftraum = 0, eine symmetrisch dazu liegende Gerade die gleichen Größen für den doppelten Luftraum an. Sinngemäß sind dazwischen-

1) Falls auf die Vermehrung der primären Streuung mit der zunehmenden Sättigung des Eisens keine Rücksicht genommen wird.

liegende Punkte zu konstruieren. Mit der so bestimmten effektiven Kraftliniendichten $H_{eff}$ werden die zugehörigen mittleren magnetischen Züge $Z' = \left(\frac{H_{eff}}{5000}\right)^2$ kg/qcm im Luftraum berechnet und graphisch in Abhängigkeit vom Luftraum aufgetragen. (Fig. 2).

Wäre diese Kraftkurve beliebig gekrümmt, so würde es für unsre Untersuchungen vollauf genügen, eine Tangente im Normalpunkte zu ziehen und diese als Kraftgesetz anzunehmen, da wir ja nur kleine Deformationen zulassen; durch die bei modernen Maschinen gebotene Sättigung des Eisens sind wir aber in der günstigen Lage, als Satz aufzustellen:

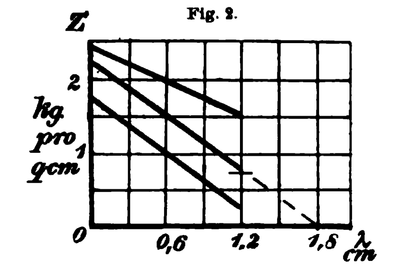


Fig. 2.

*Die Kraftkurve ist mit genügender Genauigkeit weit über die zulässige Deformation hinaus durch eine gerade Linie darstellbar,*

oder analytisch formuliert:

$$Z' = Z_0' - \zeta' p \text{ kg/qcm},$$

wobei $p$ die radiale Deformation in cm ist, positiv, wenn nach außen gerichtet. Die Größen $Z_0'$ $\zeta'$ erklären sich von selbst durch Betrachtung der Figur 2; es ist da für die mittlere Kurve:

$$Z' = 1,5 - 1,22p \text{ kg/qcm}.$$

Im Normalpunkt der Magnetisierungskurve ist für 2200 V 50 A und einseitigen Luftraum $\lambda = 6$ mm, $H_{eff} = 6150$ Kraftlinien pro qcm.

Die beiden andern eingezeichneten Kurven zeigen, wie wenig der Charakter der geraden Linie durch einen anderen Sättigungszustand des Eisens beeinflußt wird.[1]) Der Faktor $\zeta'$ tritt in den nachfolgenden Rechnungen vorwiegend auf, weil er die Änderung der magnetischen Zugkraft mit dem Luftraum angibt. Wir stellen die Resultate der drei Kurven zusammen:

| Ampere | Kurve | $\zeta'$ (kg cm$^{-3}$) |
|---|---|---|
| 80 | obere | 0,8 |
| 50 | mittlere | 1,22 |
| 30 | untere | 1,22. |

Ähnliche Verhältnisse gelten für alle Magnetisierungskurven gleichen Charakters.

1) Vergl. Arnold, Wechselstromtechnik, Bd. IV, S. 252 ff.

Da wir alle Kräfte auf 1 cm Umfang zurückführen, haben wir den mittleren magnetischen Zug $Z'$ noch mit der Blechpaketbreite $l$ cm zu multiplizieren:

$$Z = Z'l = Z_0'l - q\xi'l = Z_0 - p\xi \text{ kg/cm.} \tag{2}$$

Nun sind noch das Eigengewicht und die Torsionskraft in kg pro cm Umfang auszudrücken.

Es sei $\gamma =$ Eigengewicht in kg pro cm Umfang, $Q$ Gewicht des gesamten Gehäusebogens in kg, $D$ Schwerpunktsdurchmesser in cm, so ist:

$$\gamma = \frac{Q}{D\pi} \text{ kg/cm,}$$

oder genau genug, wenn $F$ in qcm der mittlere Querschnitt (Eisen, Bleche, Kupfer eingerechnet):

$$Q = D\pi F\, 7{,}8\; 10^{-3} \text{ kg;} \tag{3}$$

$$\gamma = F \cdot 7{,}8\; 10^{-3} \text{ kg/cm.}$$

Ähnlich gilt, wenn $\tau$ die Tangentialkraft in kg/cm, $Kw$ die Leistung der Maschine in Kilowatt und $\eta$ der Wirkungsgrad ist:

$$\tau = \frac{Kw\, 716{,}2 \cdot 100^{-2}}{\eta \cdot 0{,}736\, n \frac{D}{2} D} = 6{,}2 \frac{Kw}{\eta\, n\, D_m^2} \text{ kg/cm.} \tag{4}$$

$$D \text{ in } m = D_m; \quad n = \text{Umläufe/min./min.}$$

Damit haben wir alle auf Biegung wirkenden Kräfte in Kilogramm pro Zentimeter Umfang ausgedrückt.

## II.

Es sei:

$\varrho_k =$ Krümmungsradius der deformierten Kurve in cm,

$r =$ Schwerpunktsradius des Gehäusequerschnitts in cm $= \frac{D}{2}$,

$\Theta =$ Trägheitsmoment des Gehäusequerschnitts in $cm^4$,

$F' =$ tragfähiger Gehäusequerschnitt in qcm,

$M =$ Biegungsmoment der äußeren Kräfte rechts vom Schnitt in kg cm, und zwar positiv, wenn rechtsdrehend,

$\varepsilon t =$ spezifische Dehnung durch Erwärmung, $\varepsilon = \frac{1}{80000} =$ Ausdehnungskoeffizient des Gußeisens, $t^0 C$ dessen Temperaturzunahme,

$E =$ Elastizitätsmodul des Gehäusequerschnitts in kg/qcm,

so ist nach einem Satz der Festigkeitslehre über gekrümmte stabförmige Körper

$$(5)\qquad \frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta} - \frac{\varepsilon t}{r}.\text{[1]}$$

Es seien $\varrho$ und $\varphi$ die Polarkoordinaten eines Punktes der deformierten Kurve, auf das Mittel des ursprünglichen Kreises als Nullpunkt bezogen, $p$ die radiale Deformation in cm, positiv, wenn nach außen gerichtet, so ist:

$$\varrho = r + p.$$

Wenn $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi}$, $\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$ die erste und zweite Ableitung von $\varrho$ nach $\varphi$ bedeuten, so gilt nach einem bekannten Satz der Kurvengeometrie die Beziehung:

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} + \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2})^3}.$$

Genau wie bei der Theorie der elastischen Linie gerader Stäbe werden die Formänderungen so klein vorausgesetzt, daß die höheren Potenzen der radialen Deformation $p$ und deren Ableitungen, sowie ihre Produkte miteinander gegenüber den linearen Größen zu vernachlässigen sind; dann haben wir, da:

$$\varrho = r + p, \quad \varrho' = p' = \frac{dp}{d\varphi}, \quad \varrho'' = p'' = \frac{d^2p}{d\varphi^2},$$

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r+p} - \frac{p''}{r^2} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta} - r\varepsilon t,$$

---

1) Die Formel soll hier kurz abgeleitet werden. Es ist nach nebenstehender Figur 8, wenn $\sigma$ die Spannung in kg/qcm:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{y\Delta d\varphi}{ds} = \frac{My}{E\Theta}; \quad \left(\sigma = \frac{My}{\Theta} \text{ Biegungsmomentenformel}\right)$$

$$\Delta d\varphi = \frac{M\,ds}{E\Theta}.$$

Ferner ist:

$$\frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho_k}; \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} \text{ (Kreis)},$$

$$\frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta}.$$

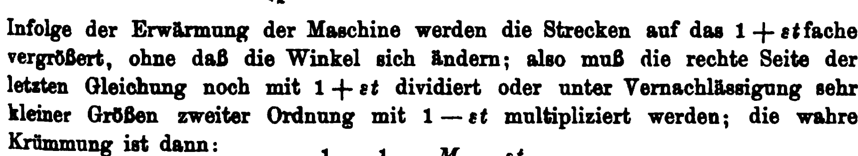


Fig. 8.

Infolge der Erwärmung der Maschine werden die Strecken auf das $1 + \varepsilon t$fache vergrößert, ohne daß die Winkel sich ändern; also muß die rechte Seite der letzten Gleichung noch mit $1 + \varepsilon t$ dividiert oder unter Vernachlässigung sehr kleiner Größen zweiter Ordnung mit $1 - \varepsilon t$ multipliziert werden; die wahre Krümmung ist dann:

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta} - \frac{\varepsilon t}{r},$$

was zu beweisen war.

oder da:

$$\frac{1}{r+p} - \frac{1}{r} = -\frac{p}{r^2},$$

$$p + p'' = -\frac{M r^2}{E\Theta} + r\varepsilon t \text{ (cm)}. \tag{6}$$

Dies ist die Fundamentalgleichung unserer Aufgabe.

Die Länge der deformierten Linie darf sich nur um die Ausdehnung durch die Erwärmung vom ursprünglichen Kreisumfang unterscheiden; daher ist als zusätzliche Bedingung zu erfüllen ($dl$ = Bogenelement):

$$\int dl - \int r\,d\varphi = \int (r+p)\,d\varphi - \int r\,d\varphi = \int p\,d\varphi = \int r\varepsilon t\,d\varphi. \tag{7}$$

Lassen wir infolge ungenauer Montage eine kleine vertikale Senkung gleich $s$ zu, so lautet die Kreisgleichung nicht mehr $\varrho = r$, sondern $\varrho = r - s\cos\varphi$, und aus Gleichung (7) wird bei Symmetrie der deformierten Kurve zur Nullachse:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dl - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r - s\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi + s = r\varepsilon t\frac{\pi}{2}. \tag{7a}$$

Bevor wir diese Gleichungen anwenden, müssen wir über die Auflagerungsbedingungen der oberen Gehäusehälfte entscheiden, die ja hauptsächlich gefährdet ist, ferner welche Normalkräfte senkrecht zum Querschnitt wir berücksichtigen wollen. Bezüglich letzterer tragen wir nach, daß die Ausdehnung infolge Erwärmung durch die elektrischen Verluste die Wirkung aller anderen Normalkräfte um ein Vielfaches überwiegt, die Normalkomponenten der Schwere und magnetischen Zugkräfte erreichen nur wenige Prozente der Formänderung durch Erwärmung. Da es sich bei den Normalkräften ohnehin nur um eine Korrektur handelt, haben wir von vornherein nur die Erwärmung in Betracht gezogen.

Bezüglich der Auflagerungsbedingungen unterscheiden wir folgende vier Fälle:

I. Gleiten und Drehen ist möglich, d. i. die Auflagerflächen können sich horizontal frei verschieben und außerdem um einen beliebigen Winkel drehen.

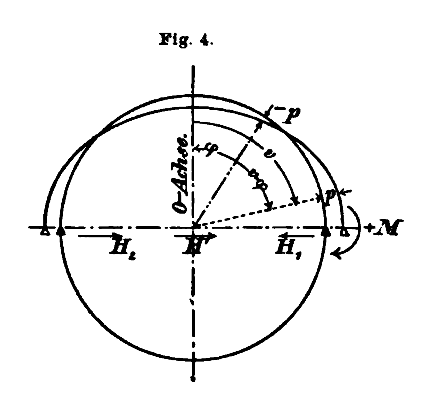
II. Gleiten möglich, Drehen unmöglich, die freie Verschiebbarkeit der Enden ist gewahrt, die freie Drehung der Enden ist aufgehoben.

III. Gleiten unmöglich, Drehen möglich, die Enden sind fest, können sich aber wie in Gelenken drehen.

IV. Gleiten und Drehen unmöglich, die Enden sind starr eingespannt.

Wie können nun diese Auflagerbedingungen[1]), insbesondere die Kräftepaare, die das Drehen in Fall II und IV verhindern, verwirklicht werden? Die Momente können, wenigstens solange sie negativ oder linksdrehend sind, stets durch das Fundament eingeleitet werden, wenn man das Gehäuse außerhalb des Schwerpunktes der Auflagerfläche im Abstand $\pm w$ cm lagert; dadurch wird ein Moment $\mp wP$ erzeugt, wenn $P$ der Druck auf die Stützfläche in kg ist.

Fig. 4.




Wir betrachten die obere Gehäusehälfte zunächst nur unter dem Einfluß des Eigengewichts und der Erwärmung und rechnen hierfür alle vier Fälle durch. Das Moment der Schwere rechts vom Schnitt ist (Fig. 4):

Moment der Bogenelemente $= M_1$.

$$M_1 = r^2\gamma\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} dv\,(\sin v - \sin\varphi) = r^2\gamma\,(-\cos v - v\sin\varphi)_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M_1 = r^2\gamma\left(\cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi\right) \text{ kg cm}.$$

Moment des Auflagerdruckes $= M_2$.

$$M_2 = -r^2\gamma\frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi) \text{ kg cm}.$$

Das resultierende Moment der Schwere ist:

$$M_\gamma = r^2\gamma\left[\cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi\right] \text{ kg cm}. \tag{8}$$

Unsere Gleichung für den Fall I, vollkommene Freiheit der Enden, lautet nun:

$$p + p'' = \frac{r^4\gamma}{E\Theta}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi)\right] + r\varepsilon t$$

und deren Lösung nach einigem Probieren[2]):

$$p = \frac{r^4\gamma}{4E\Theta}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi) + r\varepsilon t + a\cos(\varphi + \alpha)\cdot$$

1) Vergl. Dr. Ing. Julius Schenk, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Teubner 1908.

2) Kann wie alle Integrale von Differentialgleichungen durch Einsetzen in die Grundbeziehung geprüft werden.

$a$ und $\alpha$ sind die beiden Integrationskonstanten. Wir setzen den Wert $\frac{r^4 \gamma}{E \Theta}$ künftig immer gleich $k$.

Die elastische Linie ist offenbar symmetrisch, d. h. $p$, die radiale Deformation, besitzt für den gleichen aber positiven oder negativen Wert des Winkels $\varphi$ dieselbe Größe; deshalb muß sein für

$$\varphi = 0; \quad p' = 0; \quad \alpha = 0;$$

Ferner ist nach Gleichung (7):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p d\varphi = \left\{\frac{k}{4}(\varphi^2 \sin\varphi + 5\varphi\cos\varphi - 5\sin\varphi + 2\pi\varphi) + a\sin\varphi\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + r\varepsilon t\frac{\pi}{2} = r\varepsilon t\frac{\pi}{2}\,.$$

Folglich muß der Klammerausdruck zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gleich null sein; daraus bestimmt sich die Integrationskonstante:

$$a = -\frac{k}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - 5 + \pi^2\right) = -\frac{k}{4}\,7{,}34 \text{ (cm)}.$$

Damit lautet die Schlußgleichung:

$$p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi - 7{,}34\cos\varphi) + r\varepsilon t \text{ (cm)} \tag{9}$$

Die Einsenkung $e$ am höchsten Punkt des Gehäuses ist, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird:

$$e = -0{,}25\,k + r\varepsilon t \text{ (cm)}.$$

Im zweiten Fall, auf dessen Berechnung wir nun eingehen, können sich die Auflagerpunkte horizontal frei verschieben, der rechte Winkel mit der Horizontalen bleibt jedoch erhalten. Dazu muß das Fundament auf die Stützflächen ein Kräftepaar $M'$ übertragen, das der Bedingung:

$$p' = \frac{dp}{d\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

zu genügen hat. Unsere Gleichungen lauten nunmehr:

$$p + p'' = k\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi)\right] - \frac{M' r^2}{E\Theta} + r\varepsilon t,$$

$$p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi) - \frac{M' r^2}{E\Theta} + r\varepsilon t + a\cos(\varphi + \alpha),$$

$\alpha = 0$ der Symmetrie wegen, wie vorhin.

$$p' = -\frac{k}{4}(\varphi^2\sin\varphi + \varphi\cos\varphi + 3\sin\varphi) - a\sin\varphi = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

hieraus:

$$a = -\frac{k}{4}\cdot 5{,}47 = -\frac{k}{4}\left(\frac{\pi^2}{4}+3\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = \left[\frac{k}{4}(\varphi^2\sin\varphi + 5\varphi\cos\varphi - 5\sin\varphi + 2\pi\varphi) + a\sin\varphi - \frac{M' r^2\varphi}{E\Theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ r\varepsilon t\frac{\pi}{2} = r\varepsilon t\frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt, wenn der Klammerausdruck zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gleich null gesetzt wird,

$$M' = 0{,}3\,r^2\gamma \text{ kg cm}.$$

Nach Einsetzung aller Werte ist:

$$(10)\quad p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi - 5{,}47\cos\varphi + 5{,}09) + r\varepsilon t \text{ (cm)},$$

hieraus für $\varphi = 0$

$$e = -0{,}09k + r\varepsilon t \text{ (cm)}.$$

Im Falle III sind die Enden fest, jedoch drehbar. Durch das Fundament muß ein Horizontalschub $H$ übertragen werden, der die freie Verschieblichkeit der Auflagerflächen aufhebt; zum Moment der Schwere kommt daher $+Hr\cos\varphi$ hinzu und an Stelle von $r\varepsilon t$ tritt in Gleichung (6) und (7) $r\varepsilon t - \frac{rH}{EF'}\cos\varphi$ und in (7a) $r\varepsilon t\frac{\pi}{2} - \frac{rH}{EF'}$. Setzen wir $\vartheta = \sqrt{\frac{\Theta}{F'}}$ gleich dem Trägheitsradius des Gehäusequerschnitts, so lautet die Lösung des Falles III:

$$p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi) - \frac{r^3 H}{E\Theta}\frac{\varphi\sin\varphi}{2}\left(1+\frac{\vartheta^2}{r^2}\right) + r\varepsilon t + a\cos\varphi.$$

Nun ist der Trägheitsradius $\vartheta$ gegenüber dem Schwerpunktsradius $r$ bei großen Maschinen stets eine sehr kleine Zahl, umsomehr $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)^2$, so daß wir es gegen Zahlen gleich oder größer als Eins vernachlässigen dürfen; dann erhalten wir für den Horizontalschub $H$ und die Integrationskonstante $a$ folgende Gleichungen:

$$1)\quad \varphi = \frac{\pi}{2},\quad p = 0 \quad \text{(die Enden sind fest)};$$

hieraus

$$H = \frac{r\gamma}{2} + \frac{\vartheta^2}{r^2}\frac{4}{\pi}EF'\varepsilon t \text{ kg},$$

$$2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = r\varepsilon t\frac{\pi}{2} - \frac{rH}{EF'},$$

hieraus

$$a = -\frac{k}{4}\,6{,}3370 + \frac{2}{\pi}\,r\varepsilon t.$$

Nach allen Vereinfachungen erscheint:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} p = \frac{k}{4}\,(\varphi^2 \cos\varphi - 4\varphi \sin\varphi + 2\pi - 6{,}3370 \cos\varphi) \\ - r\varepsilon t\left(\frac{2}{\pi}\,(\varphi \sin\varphi - \cos\varphi) - 1\right) \end{aligned}\right.$$

und die Einsenkung $e$ für $\varphi = 0$ wird:

$$e = -0{,}0135\,k + 1{,}637\,r\varepsilon t \text{ (cm)}.$$

Im Falle IV sind die Enden starr eingespannt; durch das Fundament wird ein Kräftepaar $M'$ und ein Horizontalschub $H$ übertragen, die jedes Drehen und Gleiten verhindern; die Fälle II und III überlagern sich. Zur Bestimmung der Unbekannten haben wir drei Gleichungen:

1) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$ (Enden fest), 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $p' = 0$ (Enden nicht drehbar),

$$3)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = r\varepsilon t\,\frac{\pi}{2} - \frac{rH}{EF'}.$$

Die genauere Durchführung der Rechnung ist nach Behandlung der Fälle I—III nicht mehr nötig; wir geben das Resultat:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} p = \frac{k}{4}\,(\varphi^2 \cos\varphi - 4{,}2790\,\varphi \sin\varphi - 6{,}7464 \cos\varphi + 6{,}7214) \\ + r\varepsilon t(5{,}2788 - 3{,}3607\,(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi)) \text{ (cm)}, \end{aligned}\right.$$

$$M' = -r^2\gamma\,0{,}1095 + \frac{\vartheta^2}{r^2}\,rEF'\varepsilon t\,4{,}2788 \text{ (kg cm)},$$

$$H = r\gamma\,0{,}6395 + \frac{\vartheta^2}{r^2}\,EF'\varepsilon t \text{ (kg)},$$

$$e = -0{,}0063\,k + 1{,}918\,r\varepsilon t \text{ (cm)}.$$

Zum Schluß wollen wir noch den Fall Fig. 5 behandeln; in der horizontalen Querstange tritt ein solcher Zug auf, daß die Einsenkung am höchsten Punkt zu null wird. Die Auflagerstellen können sich wie im Fall I horizontal frei bewegen und um einen beliebigen Winkel drehen. Für diesen ungünstigsten Fall soll die Rechnung durchgeführt werden. Die Spannung in der Zugstange sei $T$ kg.

Die elastische Linie zerfällt in zwei Äste, die ohne Knick ineinander übergehen; der erste Ast reicht von $0^0$ bis $60^0$, der zweite von $60^0$ bis $90^0$. Wir haben pro Ast zwei Integrationskonstanten und außerdem die Stabspannung $T$, im ganzen also fünf Unbekannte. Hierfür haben wir auch fünf Gleichungen, nämlich:

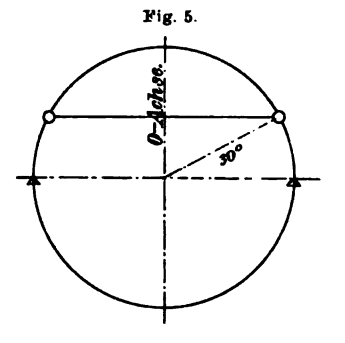


Fig. 5.

I. Ast: 1) für $\varphi = 0$, $p' = 0$, weil die Symmetrie zur Nullachse erhalten bleibt,

2) für $\varphi = 0$, $p = 0$ nach Voraussetzung.

I. und II. Ast: für $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

3) $p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}}$, 4) $p'_{\mathrm{I}} = p'_{\mathrm{II}}$, weil beide Äste kontinuierlich ineinander übergehen.

Ferner gilt die allgemeine Gleichung:

$$5)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} p_{\mathrm{I}}\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} p_{\mathrm{II}}\,d\varphi = r\varepsilon t\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Unsere Gleichungen lauten:

$$\mathrm{I}\quad p + p'' = +k\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi)\right] - Tr(\cos\varphi - 0{,}5) + r\varepsilon t$$

für $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$,

$$\mathrm{II}\quad p + p'' = +k\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi)\right] + r\varepsilon t$$

für $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Hieraus folgen für beide Äste folgende Beziehungen:

$$(13)\ \left\{\begin{array}{l}\text{I. Ast: } p = \frac{k}{4}[\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi] - \frac{Tr^3}{2E\Theta}(\varphi\sin\varphi - 1) \\ \qquad + r\varepsilon t + a\cos(\varphi + \alpha)\ \text{(cm)},\end{array}\right.$$

$$p' = -\frac{k}{4}(\varphi^2\sin\varphi + \varphi\cos\varphi + 3\sin\varphi) + \frac{Tr^3}{2E\Theta}(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi) - a\sin(\varphi + \alpha),$$

$$\int p\,d\varphi = \frac{k}{4}(\varphi^2\sin\varphi + 5\varphi\cos\varphi - 5\sin\varphi + 2\pi\varphi) + \frac{Tr^3}{2E\Theta}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi + \varphi) + r\varepsilon t\varphi + a\sin(\varphi + \alpha).$$

Die Gleichungen für den zweiten Ast entwickeln sich aus der gegegebenen durch Weglassung des Ausdruckes mit der Stabspannung $T$; an die Stelle von $a$ und $\alpha$ treten die Integrationskonstanten $b$, $\beta$.

Damit sind alle Vorarbeiten zur Aufstellung der obigen fünf Bedingungsgleichungen erledigt. Wir lassen diese rein rechnerischen Operationen weg und geben die Resultate der Elimination der fünf Unbekannten aus den fünf Gleichungen.

$$1)\ \text{Stabspannung}\ T = 1{,}22\, r\gamma - 4{,}54\, \frac{\vartheta^2}{r^2} EF'\varepsilon t\ (\text{kg}),$$

$$2)\ \alpha = 0, \qquad 3)\ a = -2{,}18\, k + 1{,}27\, r\varepsilon t,$$

$$4)\ b\cos\beta = -1{,}41\, k - 1{,}59\, r\varepsilon t, \qquad 5)\ b\sin\beta = +0{,}36\, k - 1{,}41\, r\varepsilon t.$$

Auf die zweite Dezimale sind die Rechnungen nicht mehr genau.

Es folgt eine Zusammenstellung der bisher erhaltenen Resultate. $M'$ bedeutet das Moment an den Auflagerflächen, $M_0$ das Moment im Scheitel der oberen Gehäusehälfte.

| Fall | I Drehen möglich, Gleiten möglich | II Drehen unmöglich, Gleiten möglich |
|---|---|---|
| $e$ | $-0{,}2635\, k + r\varepsilon t$ | $-0{,}0936\, k + r\varepsilon t$ |
| $M_0$ | $-0{,}5708\, r^2\gamma$ | $-0{,}2732\, r^2\gamma$ |
| $M'$ | 0 | $+0{,}2976\, r^2\gamma$ |
| $H$ | 0 | 0 |

| Fall | III Drehen möglich, Gleiten unmöglich | IV Drehen unmöglich, Gleiten unmöglich |
|---|---|---|
| $e$ | $-0{,}0135\, k + 1{,}6366\, r\varepsilon t$ | $-0{,}0063\, k + 1{,}9181\, r\varepsilon t$ |
| $M_0$ | $-0{,}071\, r^2\gamma + \frac{\vartheta^2}{r^2} EF' r\varepsilon t \cdot 1{,}273$ | $-0{,}041\, r^2\gamma - \frac{\vartheta^2}{r^2} EF' r\varepsilon t \cdot 4{,}28$ |
| $M'$ | 0 | $-0{,}1095\, r^2\gamma - \frac{\vartheta^2}{r^2} EF' r\varepsilon t \cdot 4{,}28$ |
| $H$ | $+0{,}5\, r\gamma + 1{,}27\, \frac{\vartheta^2}{r^2} EF'\varepsilon t$ | $+0{,}64\, r\gamma + 6{,}72\, \frac{\vartheta^2}{r^2} EF'\varepsilon t$ |

Die Tabelle besagt, daß die Einsenkungen durch die Schwere sehr rasch abnehmen, wenn das Gehäuse gut fundamentiert wird. Im Falle III mit festen, jedoch drehbaren Enden beträgt sie nur 5% der Durchsenkung im Falle I mit frei verschieblichen und drehbaren Enden.[1])

1) Immerhin muß der Konstrukteur auf den ungünstigsten Fall I Rücksicht nehmen, denn die provisorische Aufstellung einer Maschine im Prüffeld ist jedenfalls weit entfernt von der Solidität der stationären Aufstellung

Bei einer 1200 Kw Maschine für 125 Umläufe/min. war $r = 232$ cm $\Theta = 20 \cdot 10^4$ cm$^4$ $\gamma = 10,5$ kg/cm $E = 10^6$ kg/qcm, hieraus folgt $k = \frac{r^4 \gamma}{E \Theta} = 0,16$ cm und für $\varepsilon = \frac{1}{80000}$ (Ausdehnungskoeff. von Gußeisen) $t = 35^0$ C ist $r\varepsilon t = 0,1$ cm. Mit diesen Zahlen ergibt sich im Fall III eine Durchsenkung $e = -0,0135 \cdot 0,16 + 1,64 \cdot 0,1 = +0,16$ cm, d. h. sogar eine Hebung des Scheitels infolge der Erwärmung. Doch besteht diese Zahl nur zum Teil zu recht; denn das Polrad dehnt sich durch Erwärmung und Fliehkraft ebenfalls aus und sucht diesen Zuwachs einzuholen. Auch wird man niemals eine Luftraumdifferenz von 1,6 mm zulassen, sondern das Gehäuse im warmen Zustande einstellen; dadurch fallen aber die Temperaturspannungen während des Betriebes fort, und die Schwere und die magnetischen Zugkräfte, zu denen wir jetzt übergehen, treten in den Vordergrund.

## III.

Die Tangential- und die magnetischen Zugkräfte sind nunmehr in die Gleichung einzuführen.

Das Biegungsmoment der an den Bogenelementen angreifenden Tangentialkräfte rechts vom Schnitt ist (vgl. Fig. 4):

$$M_1 = + r^2 \tau \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} dv \,(1 - \cos(v - \varphi)) = r^2 \tau \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \cos\varphi\right),$$

des Auflagerdruckes $a$:

$$a \cdot 2r = r \cdot r\pi\tau$$

$$M_2 = - r^2 \frac{\pi}{2} \tau \,(1 - \sin\varphi),$$

des Horizontalschubes $h$:

$$h = r\tau \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi,$$

$$M_3 = + r^2 \tau \cos\varphi .$$

Das resultierende Moment $M_\tau = M_1 + M_2 + M_3$ der Tangentialkräfte lautet:

$$M_\tau = \pm r^2 \tau \left(\frac{\pi}{2} \sin\varphi - \varphi\right) \text{ (kg cm)}. \tag{14}$$

Das $+$-Zeichen gilt für Rechtslauf, das $-$-Zeichen für Linkslauf des Magnetrades.

Das Moment der an den einzelnen Bogenelementen angreifenden magnetischen Zugkräfte ist unter Vernachlässigung der Vergrößerung des Hebelarmes durch die Deformation $p$ mit demselben Recht, wie wir dies für die Schwere und Torsion getan haben (vergl. Fig. 4):

$$M_1 = r^2 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} dv\, Z \sin(v - \varphi) = r^2 \left( Z_0 (1 - \sin\varphi) - \zeta \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} p \sin(v - \varphi)\, dv \right).$$

Moment des Auflagerdruckes $a$:

$$a \cdot 2r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Z \cos\varphi\, d\varphi\,.$$

$$a = r\left( Z_0 - \tfrac{1}{2}\zeta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \cos\varphi\, d\varphi \right) \text{ (kg)}.$$

Wir setzen das konstante Integral:

$$\tfrac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \cos\varphi\, d\varphi = \mu$$

und haben

$$a = r(Z_0 - \zeta\mu)\,; \quad M_2 = -r^2(1 - \sin\varphi)(Z_0 - \zeta\mu).$$

Moment des Horizontalschubes $h$:

$$h = \frac{r}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Z \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{r}{2}\zeta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \sin\varphi\, d\varphi = -r\zeta\nu,$$

wenn das konstante Integral

$$\tfrac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \sin\varphi\, d\varphi = \nu$$

gesetzt wird; das Moment $M_3$ selbst ist dann:

$$M_3 = -r^2 \zeta\nu \cos\varphi.$$

Ist die elastische Linie symmetrisch zur Nullachse, d. h. hat $p$ für denselben positiven oder negativen Winkel $\varphi$ den gleichen Wert, so wird

$$\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \varphi \, d\varphi$$

und

$$\nu = 0.$$

Das resultierende Moment $M_z = M_1 + M_2 + M_3$ der magnetischen Zugkräfte ergibt sich zu:

$$(15)\quad M_z = r^2 \zeta \left[ -\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} p \sin (v - \varphi) \, dv + \mu (1 - \sin \varphi) - \nu \cos \varphi \right].$$

Aus diesem Ausdruck folgt für $p = 0$, d. h. wenn die Kreisform erhalten bliebe, daß die magnetischen Zugkräfte gar keinen deformierenden Einfluß ausüben. Dies wurde schon eingangs erwähnt.

Der aufgestellte Ausdruck für das Biegungsmoment der magnetischen Zugkräfte ist in dieser Form analytisch unzugänglich, weil er die gesuchte Größe $p$ unter dem Integralzeichen enthält; wir müssen vom Moment auf die Einzelkräfte übergehen, die es zusammensetzen, oder mathematisch formuliert sowohl die Funktion als die Grenzen des Integrals nach $\varphi$ differentiieren. Wird diese Operation zweimal wiederholt, so erhält man:

$$M'' = \frac{d^2 M}{d\varphi^2} = r^2 \zeta \left( -p + \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} p \sin (v - \varphi) \, dv + \mu \sin \varphi + \nu \cos \varphi \right).$$

Die Summe $M + M''$ beträgt:

$$M + M'' = r^2 \zeta (-p + \mu).$$

Dieselbe Summe ist für die Biegungsmomente der Schwere und Torsion zu bilden:

$$M_\gamma + M_\gamma'' = r^2 \gamma \left( 2 \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$M_\tau + M_\tau'' = \mp r^2 \tau \varphi.$$

Für das resultierende Moment aller Kräfte gilt:

$$(16)\quad M + M'' = r^2 \zeta (-p + \mu) + r^2 \gamma \left( 2 \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \mp r^2 \tau \varphi.$$

Andererseits ist nach der Fundamentalformel:

$$-\frac{r^2}{E\Theta} (M + M'') = p + 2p'' + p'''' - r\varepsilon t.$$

Damit lautet die Differentialgleichung unseres Problems:

$$(17)\quad p + 2p'' + p'''' = \frac{r^4\zeta}{E\Theta}(p-\mu) - \frac{r^4\gamma}{E\Theta}\left((2\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \pm \frac{r^4\tau}{E\Theta}\varphi + r\varepsilon t$$

oder, wenn wir setzen

$$m = \frac{r^4\zeta}{E\Theta},\quad k = \frac{r^4\gamma}{E\Theta},\quad w = \frac{r^4\tau}{E\Theta}:$$

$$(17\text{a})\quad p + 2p'' + p'''' = m(p-\mu) - k\left(2\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \pm w\varphi + r\varepsilon t$$

und deren Lösung mit den vier Integrationskonstanten $A$, $a$, $B$, $b$, wobei $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{m}}$, $\beta = \sqrt{1-\sqrt{m}}$ bedeutet:

$$(18)\quad \begin{cases} p = A\cos(\alpha\varphi + a) + B\cos(\beta\varphi + b) - \frac{m\mu}{1-m} + \frac{2k\cos\varphi}{m} \\ \qquad + \frac{k\frac{\pi}{2}}{1-m} \pm \frac{w\varphi}{1-m} + \frac{r\varepsilon t}{1-m}\ (\text{cm}). \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist die allgemeinste und umfassendste Lösung unserer Aufgabe für ein freitragendes Gehäuse auf Roll- und Kipplager. Er umfaßt die durch die Torsionskräfte hervorgerufene Unsymmetrie ebenso wie die Verzerrung der elastischen Linie infolge ungenauer einseitiger Montage.

Wie werden die Integrationskonstanten bestimmt? Hierfür können wir zunächst zwei Gleichungen angeben. Die erste, schon oft benützte, bezieht sich auf die Länge der elastischen Linie und lautet:

$$(7)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = r\varepsilon t\pi,$$

die zweite drückt das Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung aus. Ist $H_1$ (Fig. 4, S. 251) der Horizontalschub am rechten Ende, $H_2$ der am linken Ende und $H'$ der Horizontalschub der äußeren Kräfte (Torsion, einseitige magnetische Züge), so ist die Gleichgewichtsbedingung:

$$H_2 - H_1 = H'.$$

Nun ist sehr nahe am rechten Ende das Moment $M_1 = +r\cos\varphi H_1$ und $\frac{dM_1}{d\varphi} = -r\sin\varphi H_1 = -rH_1$ für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, analog findet man für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{dM_2}{d\varphi} = +rH_2$; hieraus folgt: $\frac{dM_1}{d\varphi} + \frac{dM_2}{d\varphi} = r(H_2 - H_1) = rH'$. Substituiert man für die Biegungsmomente $M_1$, $M_2$ nach der Funda-

mentalgleichung die Deformationen $p_1$, $p_2$ für $\varphi = +\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$, so wird die zweite Bedingungsgleichung für die Integrationskonstanten:

$$\frac{d}{d\varphi}(p_1 + p_1'' + p_2 + p_2'') = -\frac{r^3}{E\Theta}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{r^2}\right)H' = -\frac{r^3}{E\Theta}H', \tag{19}$$

da, wie schon erwähnt, $\frac{\vartheta^2}{r^2}$ ein sehr kleiner Bruch ist.

Bei Symmetrie der elastischen Linie existiert kein Horizontalschub $H'$ der äußeren Kräfte, und die vom Fundament übertragenen statisch unbestimmten Horizontalschübe $H_1$, $H_2$ werden einander gleich; obige Gleichung wird dann:

$$\frac{d}{d\varphi}(p + p'') = -\frac{r^3}{E\Theta}H \text{ für } \varphi = \pm\frac{\pi}{2};\ H_1 = H_2 = H. \tag{20}$$

Für die beiden noch übrigen Integrationskonstanten ergeben sich Gleichungen aus den Auflagerungsbedingungen Fall I bis IV, wie im zweiten Abschnitt.

Im nachfolgenden werden wir nur die leerlaufende Maschine betrachten d. h. $\tau = 0$ setzen; auch bei Vollbelastung ist $\tau$ immer wesentlich kleiner als $\gamma$. Ferner nehmen wir an, das Gehäuse sei symmetrisch montiert in bezug auf die Nullachse, so daß die Verzerrungen durch einseitige magnetische Züge verschwinden. In einem Fall werden wir eine kleine vertikale Senkung des Gehäuses zulassen, so daß durch die ungenaue Montage die magnetischen Zugkräfte an der gefährlichsten Stelle noch verstärkt werden. Noch allgemeinere Annahmen vermögen die Endresultate unserer Betrachtungen nicht wesentlich zu ändern.

Dann wird die elastische Linie symmetrisch zur Nullachse, d. h. die radiale Deformation $p$ besitzt für denselben positiven oder negativen Wert von $\varphi$ die gleiche Größe; dies ist aber nur möglich, wenn

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = 0$$

ist, so daß unsere Gleichung lautet:

$$p = A\cos\alpha\varphi + B\cos\beta\varphi - \frac{m\mu}{1-m} + \frac{k\frac{\pi}{2}}{1-m} + \frac{2k\cos\varphi}{m} + \frac{r\varepsilon t}{1-m}.$$

Da $\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\cos\varphi\, d\varphi$, $\nu = 0$ ist, folgt für $\mu$ der Wert

$$\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(A\cos\alpha\varphi + B\cos\beta\varphi)\,d\varphi - \frac{m\mu}{1-m} + \frac{k\frac{\pi}{2}}{1-m} + \frac{2k}{m}\frac{\pi}{4} + \frac{r\varepsilon t}{1-m}$$

oder

$$\frac{\mu}{1-m} = \frac{1}{\sqrt{m}}\left(-A\cos\alpha\frac{\pi}{2} + B\cos\beta\frac{\pi}{2}\right) + \frac{k\frac{\pi}{2}}{m(1-m)} + \frac{r\varepsilon t}{1-m}.$$

Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein, so erscheint die engere Lösung:

$$(21)\quad \begin{cases} p = A\left(\cos\alpha\varphi + \sqrt{m}\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right) + B\left(\cos\beta\varphi - \sqrt{m}\cos\beta\frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad + \frac{2k\cos\varphi}{m} + r\varepsilon t\ (\text{cm}), \end{cases}$$

die uns weiterhin dienen wird.

Um aus ihr den Fall I, vollkommene Freiheit der Enden, herzustellen, verfügen wir über die Integrationskonstanten $A$ und $B$ so, daß kein Horizontalschub auftritt (s. Gleichung (20)):

$$\frac{d}{d\varphi}(p + p'') = 0 \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{2};\quad A\alpha\sin\alpha\frac{\pi}{2} - B\beta\sin\beta\frac{\pi}{2} = 0.$$

Ferner besteht die Bedingungsgleichung (7a):

$$\int p\,d\varphi\,[+s] = r\varepsilon t\frac{\pi}{2};$$

$$A\left(\frac{\sin\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} - \sqrt{m}\frac{\pi}{2}\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right) + B\left(\frac{\sin\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} + \frac{\pi}{2}\sqrt{m}\cos\beta\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2k}{m} + s$$
$$+ r\varepsilon t\frac{\pi}{2} = r\varepsilon t\frac{\pi}{2}.$$

Durch diese beiden Gleichungen sind die Integrationskonstanten $A$ und $B$ bestimmt. Als Endresultat folgt für den Fall I, vollkommene Freiheit der Enden, wenn wir den Nenner:

$$(22)\qquad \Delta_1 = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{4}{\pi\sqrt{m}(m-1)}$$

setzen:

$$(22\text{a})\quad p = \frac{2k}{m}\left\{\cos\varphi - \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{\cos\alpha\varphi}{\sqrt{m}\,\alpha\frac{\pi}{2}\sin\alpha\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos\beta\varphi}{\sqrt{m}\,\beta\frac{\pi}{2}\sin\beta\frac{\pi}{2}} + \frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha\frac{\pi}{2}} - \frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta\frac{\pi}{2}}\right)\right\}$$
$$+ r\varepsilon t\ (\text{cm}).$$

Bei verschwindenden magnetischen Zugkräften wird $m = 0$ und aus obiger Gleichung bei genauer Durchrechnung:

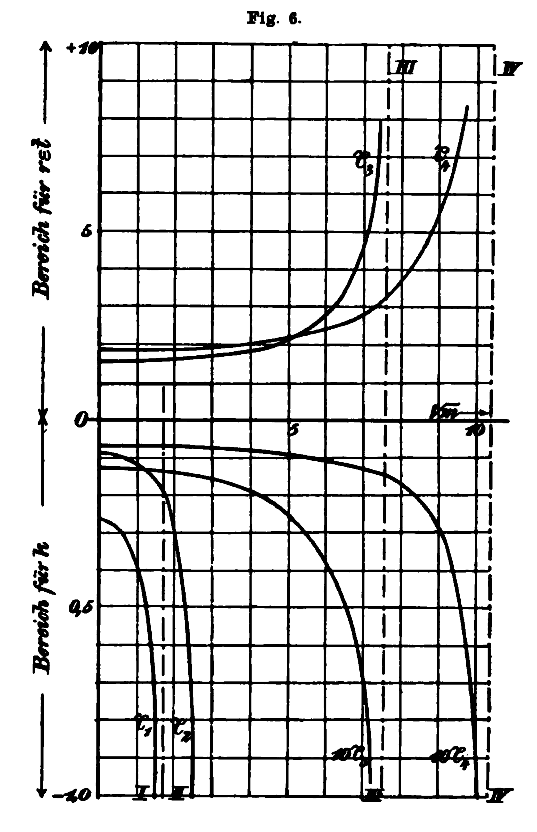
$$(9)\quad p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi - 7{,}34\cos\varphi + 2\pi) + r\varepsilon t\ (\text{cm}).$$

Dieses Resultat ist nun schon bekannt als Gleichung (9); es war indessen nötig, den organischen Zusammenhang mit den früheren Entwicklungen zu zeigen.

Für eine vertikale Senkung $s$ ist in Gleichung (22a) noch $-s \cdot \frac{1}{\Delta_1}(\cdots)$ dem Ausdruck unter runden Klammern bezw. für $m = 0$ $-s \cos\varphi$ hinzuzufügen.

Nun zur Diskussion unserer Gleichung. Es interessiert nur die Einsenkung des Scheitels der oberen Gehäusehälfte. Diese ist ersichtlich aus den Kurven I Fig. 6. Als Abszisse ist aufgetragen $\sqrt{m} = \sqrt{\frac{r^4 \zeta}{E\Theta}}$, als positive Ordinate ist aufgetragen der stets positive Faktor für die Ausdehnung durch Erwärmung, als negative Ordinate der entsprechende Faktor für die Schwere, so daß die gesamte Einsenkung ist:

Fig. 6.




$e = (-c)k + (+c')r\varepsilon t$ (cm).

Im Falle I und II wird $(+c') = 1$, weil das Gehäuse der Ausdehnung frei folgen kann. Anders verhält es sich mit der Durchbiegung infolge der Schwere.

Für $\sqrt{m} = 1$ wird hier $(-c) = -0{,}4 =$ dem Werte der Kurve; für $\sqrt{m} > 1$ wird $\beta$ imaginär und an Stelle der trigonometrischen Funktionen treten die hyperbolischen, also:

$$\text{statt} \quad +\beta \sin\beta\varphi \quad \text{tritt ein} \quad -\beta' \,\mathfrak{Sin}\,\beta'\varphi, \quad \text{wobei } \beta' = \sqrt{\sqrt{m} - 1},$$

$$\text{statt} \quad +\frac{\sin\beta\varphi}{\beta} \quad \text{tritt ein} \quad \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta'\varphi}{\beta'} \quad \text{wobei } \beta' = \sqrt{\sqrt{m} - 1}.$$

Wir sehen, wie für steigendes $\sqrt{m} = \sqrt{\frac{r^4\zeta}{E\Theta}}$, also für größere magnetische Zugkräfte oder auch schwächere Konstruktion die Ein-

senkung rasch wächst; ja sie wird unendlich für $\sqrt{m} = 1{,}7$, $m = 2{,}9$ oder genauer, wenn der Nenner:

$$\Delta_1 = -\frac{\operatorname{cotg} \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} + \frac{\operatorname{cotg} h \beta' \frac{\pi}{2}}{\beta'} - \frac{4}{\pi \sqrt{m}\,(m-1)} = 0$$

wird. Gleichzeitig wird aber auch die zusätzliche Durchbiegung infolge der ungenauen Montage $+ s$ unendlich. Denn dieses Zusatzglied

$$-\frac{s}{\Delta_1}\left(\frac{\cos \alpha \varphi}{\sqrt{m}\, \alpha \frac{\pi}{2} \sin \alpha \frac{\pi}{2}} + \cdots\right)$$

hat, wie schon oben gezeigt wurde, denselben Nenner $\Delta_1$.

Die Eigenschwere $\gamma$ mag so klein sein, wie nur möglich; lediglich infolge ungenauer Montage kann das Gehäuse bei ungenügender Steifheit zusammenbrechen. Es wäre verkehrt, eine Konstruktion nur wegen ihrer größeren Leichtigkeit als stabiler zu betrachten; denn die Ungenauigkeiten der Montage werden ihr viel gefährlicher als die nur Bruchteile von Millimetern betragenden Durchsenkungen infolge der Eigenschwere. Jedoch ist die kritische Grenze für beide Fälle dieselbe, da es für die magnetischen Zugkräfte gleichgültig ist, auf welchem Wege die sie weckende ursprüngliche Deformation zustande kommt. Deshalb genügt es dem Sinne nach, die Schwerkräfte allein zu behandeln.

Wir wenden uns nun dem Fall II zu; das Gehäuse ist frei verschiebbar, jedoch nicht drehbar gelagert. Die Bestimmungsgleichungen sind genau wie im Abschnitt II. Nach einigen Reduktionen ist:

$$p = A\left(\cos \alpha \varphi + \sqrt{m} \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right) + B\left(\cos \beta \varphi - \sqrt{m} \cos \beta \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{2k \cos \varphi}{m} - \frac{M' r^2}{E \Theta} + r \varepsilon t,$$

$$\text{a) } p' = 0 \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\, d\varphi = r \varepsilon t \frac{\pi}{2},$$

$$\text{a) } A\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} + B\beta \sin \beta \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{m} = 0,$$

$$\text{b) } A \frac{\sin \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} + B \frac{\sin \beta \frac{\pi}{2}}{\beta} + A \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \cos \alpha \frac{\pi}{2} - B \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \cos \beta \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{m}$$
$$- \frac{M' r^2 \pi}{E \Theta 2} = 0.$$

Ferner ist ungeändert

$$\text{c)}\quad A\alpha \sin\alpha\frac{\pi}{2} - B\beta\sin\beta\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Nach Elimination der Unbekannten $A\ B\ M'$ aus den Gleichungen a) b) c) und einigen Reduktionen ist:

$$(23)\quad p = \frac{2k}{m}\left\{\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos\alpha\varphi}{\alpha\sin\alpha\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos\beta\varphi}{\beta\sin\beta\frac{\pi}{2}} - \frac{4m}{\pi(m-1)}\right)\right\} + r\varepsilon t\ (\text{cm}).$$

Für $m = 0$ wird:

$$p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi - 5{,}47\cos\varphi + 5{,}09) + r\varepsilon t\ (\text{cm}),$$

also Gleichung (10) in Abschnitt II.

Kurve II in Fig. 6 (S. 263) gibt den Verlauf der Einsenkung durch die Eigenschwere als Funktion von $\sqrt{m}$. Für $\sqrt{m} = 1$ wird der Biegungspfeil $e = -0{,}11\,k$; das schon Gesagte wiederholt sich; für

$$(23\text{a})\qquad \Delta_2 = \alpha\sin\alpha\frac{\pi}{2} = 0,$$

was bei $\alpha = 2$, $\sqrt{m} = 3$, $m = 9$ eintritt, wird die kritische Grenze erreicht.

Jenseits $\sqrt{m} = 1{,}7$ im Fall I und $\sqrt{m} = 3$ im Fall II beginnen die praktisch belanglosen labilen Gleichgewichtszustände; sie finden ihr Analogon in der Knickbelastung gerader Stäbe mit frei drehbaren Enden, deren Knicklänge auch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der maximalen = Stablänge sein kann. Daß die in beiden Fällen unendlichen Durchbiegungen mathematisch abstrahiert sind und einen labilen Zustand bezeichnen, braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden.

Um die kritischen Belastungen, dargestellt durch $\sqrt{m} = 1{,}7$, $m = 2{,}9$ und $\sqrt{m} = 3$, $m = 9$ auf elementarem Wege zu kontrollieren, nimmt man an, daß der ursprüngliche Kreis infolge der Deformation in eine horizontal ausgeweitete und vertikal abgeplattete Ellipse von der sehr kleinen Exzentrizität $= \varepsilon$ übergeht, und zwar ist dann:

$$p = -\varepsilon\cos 2\varphi;\quad \text{Einsenkung } e = -\varepsilon;\quad \text{Ausweitung } w = +\varepsilon;$$

Für diese *angenommene* Gleichung der elastischen Linie berechnet man das Biegungsmoment der magnetischen Zugkräfte nach dem bekannten Kraftgesetz:

$$(2)\qquad Z = Z_0 - p\zeta\ \text{kg/cm}.$$

Die Einsenkung $e$ und Ausweitung $w$ wird bestimmt nach den bekannten Formeln der Festigkeitslehre:

$$e = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M x\, ds}{E\Theta}; \quad w = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M y\, ds}{E\Theta} \quad (x \text{ u. } y \text{ Koord. von Bogenelement } ds):$$

diese Gleichungen enthalten die Exzentrizität $\varepsilon$ der Ellipse. Wenn diese *angenommene* Exzentrizität aber gleich wird der entstehenden, d. i. $\varepsilon = -\frac{e+w}{2}$, so ist der labile Zustand oder die kritische Belastung vorhanden. $\varepsilon$ hebt sich auf beiden Seiten weg, und man erhält für das minimale Trägheitsmoment:

$$\text{Annäherungsrechnung I } \Theta > 0{,}37\,\frac{r^4 \zeta}{E}, \quad \text{II } \Theta > 0{,}11\,\frac{r^4 \zeta}{E},$$

$$\text{genaue Rechnung I } \Theta > 0{,}35\,\frac{r^4 \zeta}{E}, \quad \text{II } \Theta > 0{,}11\,\frac{r^4 \zeta}{E}.$$

Die Übereinstimmung beider Methoden ist der Beweis für die Richtigkeit des Annäherungsverfahrens, der aber von vornherein ohne die genaue Rechnung nicht zu führen war.

Die Behandlung der Fälle III und IV schließt sich eng an die vorhergehenden Ausführungen und an die entsprechenden Lösungen im Abschnitt II an, die Bedingungsgleichungen für die Integrationskonstanten sind dieselben wie dort. Wir ersparen uns die detaillierte Durchführung der Rechnungen und geben gleich die Resultate zunächst für:

Fall III, Enden fest, jedoch drehbar gelagert:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} p = \frac{2k}{m} \Bigg\{ & \cos\varphi - \frac{1}{\Delta_s}\left(\frac{\cos\alpha\varphi}{\cos\alpha\frac{\pi}{2}}(\sqrt{m}-1) - 2\sqrt{m} + \frac{\cos\beta\varphi}{\cos\beta\frac{\pi}{2}}(\sqrt{m}+1)\right)\Bigg\} \\ & + r\varepsilon t \Bigg\{ 1 - \frac{1}{\Delta_s}\Bigg(\left(\frac{\cos\alpha\varphi}{\cos\alpha\frac{\pi}{2}} + \sqrt{m}\right)\left(\frac{\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{\pi}{2}\sqrt{m}\right) \\ & \qquad - \left(\frac{\cos\beta\varphi}{\cos\beta\frac{\pi}{2}} - \sqrt{m}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} + \frac{\pi}{2}\sqrt{m}\right)\Bigg)\Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

$$(24\text{a}) \qquad \Delta_s = \frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha}(\sqrt{m}-1) + \frac{\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta}(\sqrt{m}+1) - \pi\sqrt{m}.$$

$\Delta_s = 0$ für $\underline{\sqrt{m} = 7{,}58}$; $m = 57{,}55$ gibt die *kritische Grenze.*

Fall IV, Enden starr eingespannt gegen Gleiten und Drehen:

$$
(25)\quad \begin{cases}
p = \dfrac{2k}{m}\left\{\cos\varphi + \dfrac{1}{\Delta_4}\left(\dfrac{\cos\alpha\varphi - \cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha\frac{\pi}{2}\sin\alpha\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1} + \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta}\right)\right.\right. \\
\qquad\left.\left. - \dfrac{\cos\beta\varphi - \cos\beta\frac{\pi}{2}}{\beta\frac{\pi}{2}\sin\beta\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1} + \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha}\right)\right)\right\} \\
\quad - \dfrac{r\varepsilon t}{\Delta_4}\left(\dfrac{\cos\alpha\varphi - \cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha\sin\alpha\frac{\pi}{2}} - \dfrac{\cos\beta\varphi - \cos\beta\frac{\pi}{2}}{\beta\sin\beta\frac{\pi}{2}}\right).
\end{cases}
$$

$$
(25a)\qquad \Delta_4 = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{4\sqrt{m}}{\pi(m-1)}.
$$

$\Delta_4 = 0$ für $\sqrt{m} = 10{,}42$; $m = 108{,}5$ gibt die *kritische Grenze.*

Nun zur Diskussion der Fälle III und IV. Die Einsenkungen $e$ sind in Fig. 6 als Kurven III und IV dargestellt, bei der Schwere der zehnfache Betrag, weil die Ordinaten, verglichen mit $e_1$ und $e_2$, sonst zu klein würden. Der allgemeine Charakter der Kurven bleibt erhalten; die kritischen Grenzen, dargestellt durch $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$, treten für $m = 57{,}55$, $\sqrt{m} = 7{,}58$ bezw. $m = 108{,}5$, $\sqrt{m} = 10{,}42$ ein. Die Ausdehnung durch Erwärmung ist in den Fällen III und IV nicht mehr frei, weil die Enden festgehalten werden. Daher tritt eine Hebung des Scheitels der oberen Gehäusehälfte ein; die magnetischen Zugkräfte verstärken jede Abweichung von der Kreisform im positiven oder negativen Sinn. Bei den angegebenen Belastungsgrenzen $\sqrt{m} = 7{,}58$ und $10{,}42$ kann eine stabile Gehäuseform überhaupt nicht mehr aufrecht erhalten werden.

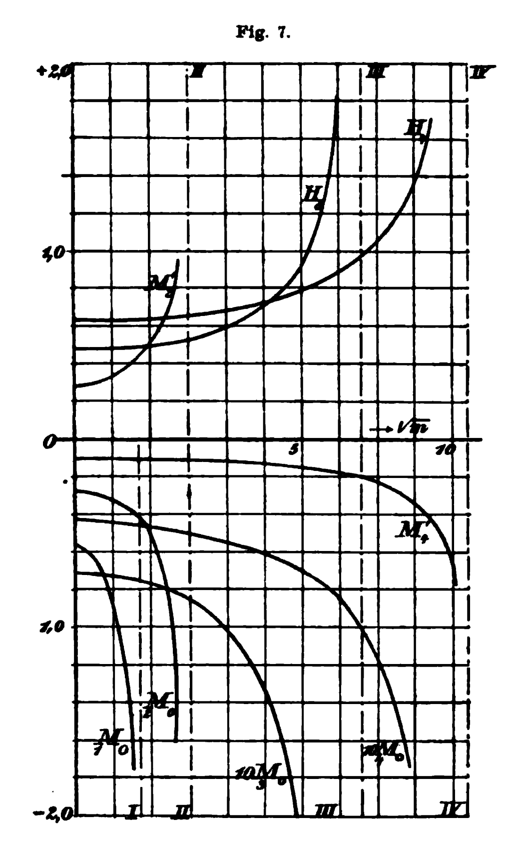
Die Ausführungen am Schluß des Abschnitts II sind zu wiederholen; gestattet man den Auflagerpunkten, der Ausdehnung durch Erwärmung bei Dauerbetrieb und nur dieser zu folgen, so verschwinden die Temperaturspannungen, und der Einfluß der Schwere und magnetischen Zugkräfte hat die Vorherrschaft bei der Deformation.

Um bei Anwendungen die Berechnung der komplizierten Funktionen in den Formeln zu vermeiden, haben wir in den Kurven Fig. 7 die Biegungsmomente $M_0$ im Scheitel nnd $M'$ an den Auflagerflächen, ferner die Horizontalschübe $H$ abhängig von $\sqrt{m}$ graphisch dargestellt, jedoch nur für die Schwere. Es ist:

$$M = r^2\gamma \cdot c \text{ kg cm}, \quad H = r\gamma c \text{ kg};$$

die Faktoren $c$ sind den Kurven zu entnehmen; die Scheitelmomente $M_0$ III und $M_0$ IV sind zehnfach vergrößert gezeichnet. Die unteren Grenzen für die Trägheitsmomente wollen wir noch zahlenmäßig angeben:

Fig. 7.



| Fall I | II |
|---|---|
| $m = 2{,}9$ | 9 |
| $\Theta > 0{,}35$ | 0,11 |
| III | IV |
| 57,55 | 108,5 |
| 0,018 | $0{,}009 \frac{r^4 t}{E}$. |

Es sollen die bisherigen Rechnungen an drei Maschinen a), b), c), deren Gehäusequerschnitte in Fig. 8—10 (S. 269) im Maßstab 1 : 10 dargestellt sind, zahlenmäßig durchgeführt werden. Daß die charakteristischen Werte für drei irgendwie herausgegriffene Maschinen verschiedener Firmen und Konstrukteure in eine Reihe passen, kann nicht erwartet werden. Ein Konstrukteur bestimmt den Gehäusequerschnitt auf zulässige Durchbiegung, ein andrer auf zulässige Spannung im Gußeisen, fast alle nach mehr oder weniger bestimmten Erfahrungen mit Hilfe empirischer Faustformeln; ein ausgeprägt einheitliches Prinzip liegt nicht zugrunde.

Die Magnetisierungskurve für Maschine a) wurde bereits in Fig. 1 (S. 246), die Kurve der magnetischen Zugkräfte in Fig. 2 (S. 247) gezeichnet.

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| Leistung in Kilowatt induktionsfrei | 1200 | 800 | 3000 Kw. |
| Umläufe in der Minute | 125 | 79 | 71,5 |
| Durchmesser der Gehäusebohrung | 414 | 600 | 802,4 cm |
| Blechpaketbreite + Luftschlitze | 28 + 3 · 1 | 27 | 29 + 4 · 1,5 cm |
| Luftraum einseitig | 0,6 | 0,7 | 1,2 cm. |

Welche Rolle spielt das aus einzelnen Segmenten geschichtete Blechpaket bei Berechnung des Trägheitsmoments? Wenn die Stoß-

fuge durch das ganze Blechpaket geht, wie man bei älteren Maschinen noch sehen kann, trägt der Anker überhaupt nichts, weil ein solcher Ring, seines Haltes beraubt, zusammenstürzt. Wenn die Segmente

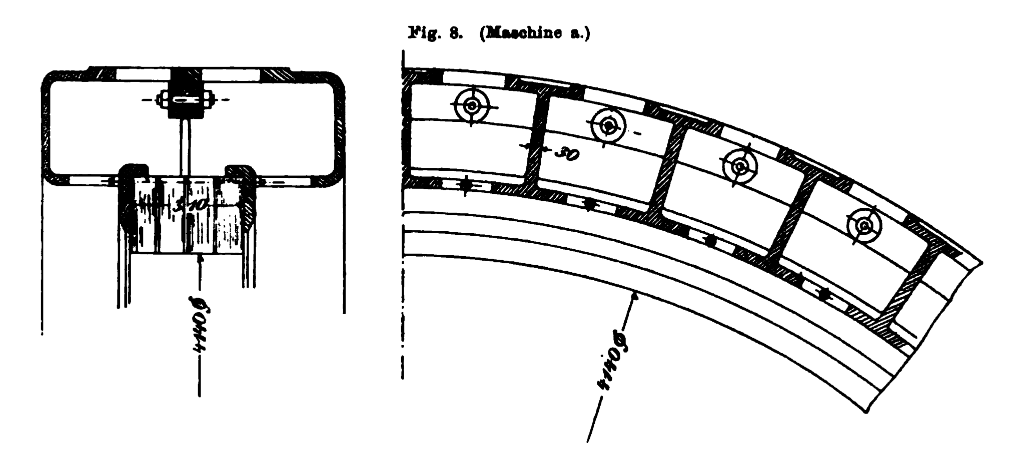



Fig. 8. (Maschine a.)

sich abwechselnd überdecken und wie eine starre Kette um den ganzen Ring herum sich fortsetzen, so trägt mindestens ein Teil bei dem hohen Druck, unter dem das Paket steht und bleibt, auch wenn die Isolation schwindet. Der durchlochte Nutenrand trägt natürlich gar nicht. In

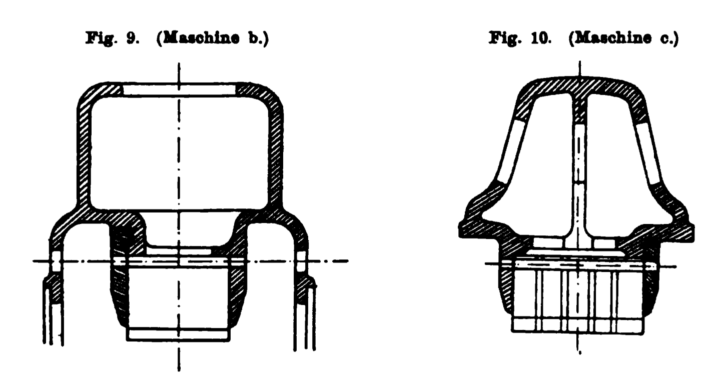


Fig. 9. (Maschine b.) Fig. 10. (Maschine c.)

den nachfolgenden Angaben ist das Blechpaket halb, also wie ein gußeiserner Querschnitt gerechnet, da Schmiedeisen den doppelten Elastizitätsmodul besitzt. Am besten wird das Produkt $E\Theta$ durch einen Versuch für eine Type bestimmt; zieht man etwa die Enden der horizontal liegenden Gehäusehälfte durch eine bekannte Kraft $P$ möglichst reibungsfrei zusammen, so ist die Durchmesserdifferenz

$$D - D' = \frac{\pi}{2} \frac{r^3 P}{E\Theta} \text{ cm } (P \text{ in kg}).$$

Als totales Gewicht des ganzen Gehäuseumfangs, einschließlich Blechpaket mit Wicklung ergibt sich:

| | | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|---|
| | $Q =$ | 16500 | 32000 | 32000 kg |
| Schwerpunktsradius | $r =$ | 232 | 332 | 428 cm |
| Schwere pro cm Umfang | $\gamma =$ | 11,3 | 15,3 | 12 kg/cm |
| Torsion pro cm Umfang | $\tau =$ | 2,9 | 1,5 | 3,7 kg/cm |
| Mittl. Trägheitsmoment über die Polleitung | $\Theta =$ | $20 \cdot 10^4$ | $45 \cdot 10^4$ | $36 \cdot 10^4$ cm⁴. |

Wir sehen, daß bei der Maschine b) (Fig. 9) mit 600 cm Gehäusebohrung an Material vergleichsweise mit den andern nicht sehr gespart wurde. Die Zahlen sind Annäherungswerte. Mit $E = 10^6$ kg/qcm Elastizitätsmodul für Gußeisen ergibt sich:

$$k = \text{a)}\ \frac{232^4 \cdot 11{,}3}{20 \cdot 10^{10}} = 0{,}16 \quad \text{b)}\ 0{,}41 \text{ cm} \quad \text{c)}\ 1{,}12 \text{ cm}$$

$$\zeta = \text{a)}\ 38 \quad \text{b)}\ 33 \quad 43 \text{ kg/cm}$$

$$m = \quad 0{,}55 \quad 0{,}88 \quad 4{,}0$$

$$\sqrt{m} = \quad 0{,}74 \quad 0{,}94 \quad 2{,}0$$

Bei der Maschine c) (Fig. 10) mit 802,4 cm Bohrung ist also die kritische Grenze für Fall I mit vollkommener Freiheit der Enden überschritten.

Die Durchsenkungen infolge des Eigengewichts sind im Falle I nach Kurve I (Fig. 6, S. 263):

$$e_1 = \text{a)}\ -0{,}32 \cdot 0{,}16 = -0{,}05 \text{ cm}, \quad \text{b)}\ = -0{,}37 \cdot 0{,}41 = -0{,}15 \text{ cm}, \quad \text{c)}\ - - -$$

So ungenügend ist keine Fundamentierung, wie sie Fall I voraussetzt; den tatsächlichen Verhältnissen wird Fall III mit festen, jedoch noch drehbaren Enden weit mehr entsprechen. Hierfür ist:

$$e_3 = \text{a)}\ -0{,}013 \cdot 0{,}16 = -0{,}002, \quad \text{b)}\ = -0{,}013 \cdot 0{,}41 = -0{,}006 \text{ cm}, \quad \text{c)}\ = -0{,}014 \cdot 1{,}12 = -0{,}016 \text{ cm}.$$

Die magnetischen Zugkräfte, welche im Falle I die Maschine c) wahrscheinlich zum Bruche geführt hätten, sind bei der Auflagerungsbedingung III kaum merkbar, wie aus dem Charakter der Kurve III (Fig. 6) hervorgeht, und die Durchbiegung selbst verschwindend.

Die größte Spannung im Gußeisen pflegt einzutreten, wenn die obere Gehäusehälfte bei der Montage am Kranhacken hängt und etwa in der Mitte durch ein Seil befestigt ist; das zugehörige Moment ist $r^2\gamma$;

ꞏs Widerstandsmoment des Querschnitts in cm³, dann wird,

, = a) 61 · 10⁴, b) 169 · 10⁴, c) 220 · 10⁴ kgcm,

= a) 8000, b) 12000, c) 9000 cm³,

= a) 75, b) 140 c) 250 kg/qcm,

$\sigma$ = 300 kg/qcm als zulässige Spannung für Gußeisen bei Belastung gewöhnlich angenommen wird. Die Spannungen ›rigens sehr herabgemindert, wenn das Gehäuse in seitlichen ;t, und es kann dann möglicher Weise eines der Momente $M_0$ die wir in den Kurven Fig. 7 aufgetragen haben, den Aus- die zulässige Spannung geben.

IV.

tatischen Berechnung folgt eine mehr qualitative Betrachtung nischen Vorgänge. Bei Kurzschluß und plötzlichen Be- ßen werden durch die Störung des Gleichgewichts elastische gen ausgelöst. Wir bestimmen zunächst die Eigenschwingungs- ehäusebogens unter dem Einfluß der magnetischen Zugkräfte; elastischen Kräfte üben keinen Einfluß auf sie aus. Der ing erfolgt nach dem Prinzip von d'Alembert: die Be- gskräfte müssen durch die Resultierende der äußeren und tischen Kräfte aufgebracht werden. Die Lösung ist in gemeinen Gleichung (17) bereits enthalten, wir haben nur gerichteten Beschleunigungskräfte $-\frac{\gamma}{g}\frac{d^2p}{dt^2}$ als neues Glied n:

$$+\frac{\partial^4 p}{\partial\varphi^4}=m(p-\mu)-\frac{r^4\gamma}{E\Theta g}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(p-\mu);\quad \mu=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}p\cos\varphi\,d\varphi.$$

partiellen Differentialgleichung genügen unendlich viele ;ungen $u\sin\frac{\pi x}{30}t$ als Einzellösungen, da außer dem Grund- iendlich viele Obertöne erregt werden können; durch die Lage und Geschwindigkeit, die jeder Punkt bei Anfang der Bewegung besaß, ist jedoch die Lösung eindeutig bestimmt. Setzen wir, um die Schwingungszahlen $x$/min zu erhalten, obige periodische Lösung für $p$ ein, so wird

$$u+2\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{d^4u}{d\varphi^4}=\left(m+\frac{r^4\gamma}{E\Theta g}\left(\frac{\pi x}{30}\right)^2\right)(u-U);\quad U=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u\cos\varphi\,d\varphi.$$

Setzen wir $\varkappa = m + \frac{r^4 \gamma}{E\Theta g}\left(\frac{\pi x}{30}\right)^2$; $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{\varkappa}}$, $\beta = \sqrt{1-\sqrt{\varkappa}}$, dann ist die Lösung mit den Integrationskonstanten $A$ und $B$

$$(26) \quad u = A\left(\cos\alpha\varphi + \sqrt{\varkappa}\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right) + B\left(\cos\beta\varphi - \sqrt{\varkappa}\cos\beta\frac{\pi}{2}\right),$$

wenn wir gleich Symmetrie der Schwingungslinie zur Nullachse annehmen. Für die Integrationskonstanten $A$ und $B$ und die Eigenschwingungszahlen $x$ ergeben sich aus der Eigenart der Auflagerung Fall I—IV weitere Bedingungsgleichungen. Zunächst muß stets $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,d\varphi = 0$ sein, denn die dynamischen Radialschwingungen können die Länge der elastischen Linie nicht ändern, ferner ist bei völliger Freiheit der Enden, sich zu verschieben und zu drehen (Fall I), ein Horizontalschub $H$ nicht vorhanden, also $\frac{d}{d\varphi}(u + u'') = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{a)} \quad \int p\,d\varphi = 0; \quad A\left(\frac{\sin\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\varkappa}\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right) + B\left(\frac{\sin\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\varkappa}\right) = 0,$$

$$\text{b)} \quad H = 0; \qquad A\alpha\sin\alpha\frac{\pi}{2} - B\beta\sin\beta\frac{\pi}{2} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar nur dann mit einander verträglich, wenn sie für das Verhältnis $\frac{B}{A}$ den gleichen Wert ergeben, d. i. wenn die sogenannte Resultante der beiden linearen Gleichungen gleich Null ist. Dies ergibt nach einigen Vereinfachungen den uns aus Gleichung (22) bekannten Ausdruck:

$$\Delta_1 = -\frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{4}{\pi\sqrt{\varkappa}(\varkappa - 1)} = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch unendlich viele Werte $\varkappa_0\, \varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots$, uns interessiert nur die Schwingungszahl des Grundtons, gegeben durch

$$\varkappa_0 = 2{,}9; \quad x_0 = 300\sqrt{\frac{\varkappa_0 - m}{k}} \text{ volle Schwingungen/min.}$$

Das vollständige Integral würde sein:

$$p = \sum_{x = x_0 x_1 \cdots x_n}^{x = x_0 x_1 \cdots x_n} u \sin\frac{x\pi}{30} t.$$

Läuft das Magnetrad exzentrisch, so verdichten sich dort die Kraftlinien, der magnetische Zug wächst dort und [illegible]

Magnetrad herum. Trifft der tiefste Schwingungs[illegible] und zeitlich jedesmal mit dem eben vorbeipassierenden Maximum der verdichteten magnetischen Zugkräfte zusammen, so ist [illegible] Resonanz vorhanden, und die dynamischen Deformationen werden [illegible]. Bedingung ist [illegible], daß die Schwingungszahl [illegible] tones der elastischen Eigenoszillation mit der Betriebstourenzahl übereinstimmt. Bei Maschine [illegible] könnte dies eintreten, wenn [illegible] raum die [illegible] Aufteilung zu wenig [illegible]. Eine [illegible] Resonanz wurde bei einer Maschine beobachtet, deren [illegible] halb des Schwerpunktes gestützt war; bei einer bestimmten Tourenzahl schwankte die [illegible] [illegible] Tourenzahl trat wieder ruhiger Gang ein. Dennoch wurden [illegible] die Stützen durch [illegible] in der horizontalen Trennungsebene [illegible] zugleich durch den Schwerpunkt geht.

Bezüglich der Auflagerungsbedingungen [illegible] I—[illegible] geben wir an, daß analog Fall I die Beziehungen:

$$J_2 = c \sin x \frac{\pi}{2} = \ldots \quad [illegible]$$

$$J_3 = \frac{\cos x \frac{\pi}{2}}{x} - \frac{\cos \xi \frac{\pi}{2}}{\xi} - \ldots = 0 \quad [illegible]$$

die entsprechenden Schwingungszahlen des [illegible] Lösungen für $x$ und die Bedingungsgleichungen für die Konstanten [illegible] und $B$ dieselben sind, wie in [illegible] Fall [illegible] machen.

In letzterer Zeit sind durch [illegible] schnellaufende Generatoren mit großen Leistungen [illegible] kommen. Die Durchmesser der [illegible] werden [illegible] sie als praktisch starr zu betrachten sind. [illegible] Erscheinungen an Wellen kleiner Dimensionen, wie sie [illegible] die De Laval-Turbine charakterisiert werden, durch die [illegible] magnetischen Zugkräfte beeinflußt. Es gibt [illegible] eine kritische Tourenzahl, bei welcher mit Erfolge [illegible] der unvermeidlichen Exzentrizität des Schwerpunktes [illegible] elastische Resonanz entsteht, wenn die Eigenschwingungszahl [illegible] gleich ist ihrer Betriebstourenzahl. [illegible] Bewegungsgleichungen für diese Erscheinungen [illegible] Mechanik IV. T. Dynamik). Die gewöhnlichen [illegible] baues laufen möglichst weit unter dieser Grenze [illegible] mal möglichst weit jenseits, wo ja wieder [illegible]

[illegible] mit dem Schwerpunkt eintritt. Die Form der Gleichungen bleibt unter Zuziehung der magnetischen Zugkräfte dieselbe, nur die auftretenden Konstanten ändern sich[1], und zwar wird durch die magnetischen Züge die kritische Tourenzahl herabgesetzt.

Dem Maschinenkonstrukteur ist im allgemeinen die höchste Ökonomie weniger erreichbar als dem Elektriker, der sein Material hinreichend kennt, um Gewicht der Wicklungen und Polteilung, Nutzeffekt und Spannungsabfall auf Prozente genau voraus zu bestimmen; es laufen zu viele [illegible] Nebenerscheinungen mit unter, die nicht minder ausschlaggebend sind.

Aufgabe einer das Wesentliche voll beachtenden und auf die Erfahrung gegründeten Untersuchung soll es sein, die Unterlagen zur Bestimmung der Grenzen der Konstruktion zu liefern, wozu das Gegebene ein Beitrag sein soll.

— —

## Dynamische Kraftpläne.

Von Ferdinand Wittenbauer in Graz.

Von einem eben bewegten Getriebe seien die treibenden und widerstehenden Kräfte sowie die Massenverteilung des Getriebes bekannt; es sind die Spannungen der einzelnen Stäbe des Getriebes sowie die Drücke in den Gelenken während der Bewegung zu finden.

Diese wenig behandelte Frage der technischen Mechanik ist von nicht zu unterschätzender Bedeutung; sie wurde bisher in Ermanglung bestimmter Methoden meist durch Annäherung gelöst. In Wirklichkeit bildet sie das dynamische Analogon zu der graphischen Spannungsermittlung eines Stabwerks und gestattet wie diese eine übersichtliche zeichnerische Behandlung, die als Beitrag zur graphischen Dynamik betrachtet werden möge. Die Lösung der eingangs genannten Frage erfordert folgende vier Arbeiten:

---

[1] Nach Föppl ist die kritische Umdrehungszahl $n$ der Welle: $n = 300\sqrt{\frac{\alpha}{G}}$ Umdr/min, wenn $G$ das Gewicht des Schwungkörpers (hier der Anker) in kg ist und $\alpha$ in kg/cm die Kraft angibt, die die Welle um 1 cm durchbiegt. Wie leicht einzusehen, wird durch die Exzentrizität $e$ der Welle eine Resultierende $R$ der magnetischen Zugkräfte geweckt, die im Sinne der Durchbiegung $e$ wirkt; $R = 2\int_0^{\pi} Z\cos\varphi\, d\varphi \cdot r$, $R = 2\int_0^{\pi} (Z_0 - e\cos\varphi\,\zeta)\cos\varphi\, r\, d\varphi = er\zeta\pi$ kg ($r$ = Radius der Bohrung). Die Kraft, die die Welle um $e$ cm durchbiegt, ist dann $P = \alpha e - er\zeta\pi = (\alpha - r\zeta\pi)e$ kg und die kritische Tourenzahl $n = 300\sqrt{\frac{\alpha - r\zeta\pi}{G}}$.

1. Zunächst müßte man sämtliche Kräfte und Massen des Getriebes auf graphischem Wege nach einem ausgezeichneten Punkt des Getriebes reduzieren und sodann die Beschleunigung und Geschwindigkeit dieses Punktes konstruieren. Diesen ersten Teil der Aufgabe habe ich in meiner Abhandlung: Graphische Dynamik der Getriebe (diese Zeitschrift, Band 50) ausführlich behandelt.

2. Aus der Beschleunigung und Geschwindigkeit des Reduktionspunktes sind sodann die Beschleunigungs- und Geschwindigkeitspläne des Getriebes zu entwerfen, was wohl am besten nach dem von O. Mohr gegebenen Verfahren (diese Zeitchrift, Band 49, Seite 393 auch: O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906) geschehen wird.

3. Sodann hat man in jedem bewegten Punkte des Getriebes die Trägheitskraft dieses Punktes (entgegengesetzt dem Beschleunigungsdrucke) anzubringen und aus der Gesamtheit dieser Trägheitskräfte und der gegebenen Kräfte ein Gleichgewichtssystem zu bilden (D'Alembertsches Prinzip).

4. Endlich hat man mit Hilfe von Knotenschnitten, die man durch dieses Gleichgewichtssystem führt, die Stabspannungen und die Gelenkdrücke des Getriebes zn bestimmen.

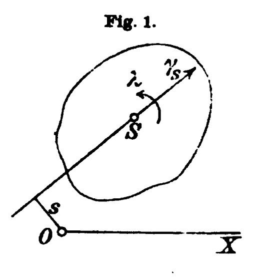
Mit der Durchführung der dritten und vierten dieser Arbeiten soll sich vorliegende Abhandlung beschäftigen. (Vgl. O. Mohr: Beitrag zur Kinetik ebener Getriebe, diese Zeitschrift, Band 51, S. 29, auch im obengen. Werke).

## Die Beschleunigungsdrücke eines ebenen Systems und ihr Ersatz durch die Beschleunigungsdrücke von Punkten.

1. Die Beschleunigungsdrücke eines ebenen Systems lassen sich bekanntlich auf folgende zwei Wirkungen zurückführen (Fig. 1):

1. auf den Beschleunigungsdruck $M\gamma_S$ der im Schwerpunkte $S$ des Systems vereinigten Masse $M$ des Systems, wenn $\gamma_S$ die Beschleunigung dieses Punktes ist;
2. auf ein Kraftpaar vom Momente $Mk^2\lambda$, worin $k$ der Trägheitshalbmesser des Systems in bezug auf den Schwerpunkt und $\lambda$ die Winkelbeschleunigung des Systems ist; der Drehungssinn des Kraftpaares stimmt mit $\lambda$ überein.

Fig. 1.




Die Projektion der Beschleunigungsdrücke des Systems auf eine beliebige Achse ist demnach $M\gamma_{S_x}$, das Moment der Beschleunigungsdrücke um einen beliebigen Punkt $O$ der Ebene

$$M\gamma_S \cdot s - Mk^2\lambda \;\ldots \tag{1}$$

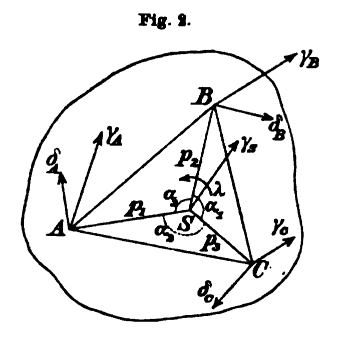
Es soll nun gezeigt werden, daß man die Beschleunigungsdrücke des Systems in bequemer Weise durch die Beschleunigungsdrücke dreier beliebig gewählter Punkte ersetzen kann.

Es seien (Fig. 2) $A$, $B$, $C$ drei beliebig gewählte Punkte des ebenen Systems, $p_1 p_2 p_3$ ihre Abstände vom Schwerpunkt $S$; $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Winkel zwischen diesen Abständen, $\gamma_A \gamma_B \gamma_C$ die Beschleunigungen der drei Punkte.

Die Masse $M$ des Systems werde nach dem Schwerpunktsgesetze in die drei Punkte $ABC$ derart verteilt, daß

$$M = m_A + m_B + m_C$$

Fig. 2.



ist; es sind dann diese in $ABC$ liegenden Punktmassen

$$m_A = \frac{Md}{p_1} \sin \alpha_1 ,$$

$$m_B = \frac{Md}{p_2} \sin \alpha_2 , \qquad m_C = \frac{Md}{p_3} \sin \alpha_3 ,$$

worin

$$(2) \qquad \frac{1}{d} = \frac{\sin \alpha_1}{p_1} + \frac{\sin \alpha_2}{p_2} + \frac{\sin \alpha_3}{p_3}$$

bezeichnet.

Man bringe nun in den Punkten $ABC$ die neuen Beschleunigungen $\delta_A \delta_B \delta_C$ normal zu beziehungsweise $p_1 p_2 p_3$ derart an, daß sie um $S$ im Gegensinn von $\lambda$ drehen; die Größen dieser Beschleunigungen seien

$$(3) \qquad \delta_A = n \lambda p_1 , \qquad \delta_B = n \lambda p_2 , \qquad \delta_C = n \lambda p_3$$

Hierin bezeichnet

$$(4) \qquad n = 1 - \frac{k^2}{l d}$$

worin $d$ durch Gleichung (2) festgelegt und

$$(5) \qquad l = p_1 \sin \alpha_1 + p_2 \sin \alpha_2 + p_3 \sin \alpha_3$$

bezeichnet wurde.

Es kann nun behauptet werden, daß die drei Massenpunkte $m_A m_B m_C$ zusammengenommen dieselben Beschleunigungsdrücke besitzen wie das ganze System.

2. Bevor hierfür der Beweis erbracht wird, soll daran erinnert werden, daß eine eben bewegte Masse sich hinsichtlich ihres Trägheitsmomentes um jeden beliebigen Punkt der Ebene ebenfalls durch drei beliebig gewählte Punkte $ABC$ ersetzen läßt, wenn in ihnen bestimmte Massen $M_A M_B M_C$ und im Schwerpunkt $S$ überdies eine Masse $M_0$ angebracht werden, derart daß

$$M = M_0 + M_A + M_B + M_C$$

und $S$ auch der Schwerpunkt dieser vier Massen ist. Ich habe in der genannten Abhandlung: Graphische Dynamik der Getriebe, S. 70 diese Massen bestimmt und mit Hinweis auf Fig. 2 gefunden:

$$M_A = M\frac{k^2}{lp_1}\sin\alpha_1, \qquad M_B = M\frac{k^2}{lp_2}\sin\alpha_2, \qquad M_C = M\frac{k^2}{lp_3}\sin\alpha_3$$

$$M_0 = M - (M_A + M_B + M_C).$$

Die in Gleichung (4) festgelegte Konstante $n$ kann dann geschrieben werden

$$n = \frac{M_0}{M}$$

und das Trägheitsmoment der Masse $M$ um ihren Schwerpunkt nimmt die Form an:

$$Mk^2 = M_A p_1^2 + M_B p_2^2 + M_C p_3^2 = (1-n)(m_A p_1^2 + m_B p_2^2 + m_C p_3^2)$$

oder

$$(6) \qquad Mk^2 = (1-n)\Sigma mp^2.$$

3. Nun kann der Beweis für die am Schlusse von (1) aufgestellte Behauptung erbracht werden.

Bilden wir die Projektionen der Beschleunigungsdrücke der drei Massenpunkte $m$ (mit den Beschleunigungen $\gamma$ und $\delta$) auf irgend eine Achse $X$, so ist sie (Fig. 3):

$$\Sigma m.\gamma_x + \Sigma m\delta.\sin\varphi$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (3)

$$\Sigma m\gamma_x + n\lambda\Sigma mp\sin\varphi$$

oder

$$M\gamma_{Sx} + n\lambda\,\Sigma m\eta.$$

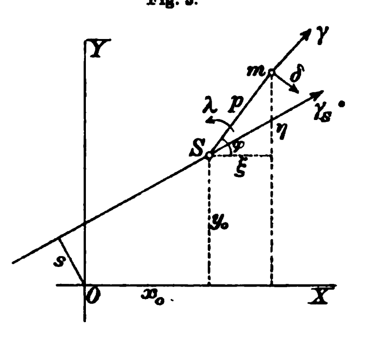


Fig. 3.

Da $\Sigma m\eta$ verschwindet, so bleibt als Summe der Projektionen der Beschleunigungsdrücke $M\gamma_{Sx}$, d. i. die Projektion des wirklichen Beschleunigungsdruckes, übrig.

Bilden wir hingegen die Summe der Momente der Beschleunigungsdrücke der drei Punkte $ABC$ um irgend einen Punkt $O$ der Ebene, so ist sie nach Fig. 3

$$(7) \qquad \Sigma m(\gamma_x y - \gamma_y x) + \Sigma m\delta(p + x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi).$$

Der zweite Teil dieses Ausdruckes wird

$$n\lambda\,[\Sigma mp^2 + x_0\Sigma m\xi + y_0\Sigma m\eta]$$

und da

$$\Sigma m\xi = 0, \qquad \Sigma m\eta = 0,$$

so bleibt

$$n\lambda\,\Sigma m p^2.$$

Der erste Teil des Ausdruckes (7) wird

$$\begin{aligned}\Sigma m(\gamma_x y - \gamma_y x) &= \Sigma m[\gamma_x(y_0 + \eta) - \gamma_y(x_0 + \xi)] \\ &= y_0 \Sigma m \gamma_x - x_0 \Sigma m \gamma_y + \Sigma m(\gamma_x \eta - \gamma_y \xi) \\ &= M(y_0 \gamma_{Sx} - x_0 \gamma_{Sy}) + \Sigma m\left[\eta \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2\eta}{dt^2}\right].\end{aligned}$$

Nun ist

$$\xi = p\cos\varphi, \qquad \eta = p\sin\varphi,$$

also

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\xi\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \eta\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\eta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \xi\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Setzt man noch $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda$, so wird

$$\begin{aligned}\Sigma m(\gamma_x y - \gamma_y x) &= M(y_0 \gamma_{Sx} - x_0 \gamma_{Sy}) - \Sigma m(\eta^2 + \xi^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ &= M\gamma_S \cdot s - \lambda\,\Sigma m p^2.\end{aligned}$$

Das Moment der Beschleunigungsdrücke der drei Punkte $ABC$ um $O$ wird also nach (7)

$$M\gamma_S \cdot s - \lambda\,\Sigma m p^2 + n\lambda\,\Sigma m p^2$$

oder mit Benutzung von Gleichung (6)

$$M\gamma_S \cdot s - Mk^2\lambda,$$

welcher Ausdruck aber nach 1. das Moment des wirklichen Beschleunigungsdruckes des Systems um $O$ ist. Damit ist bewiesen, daß die drei Massenpunkte $ABC$ das System hinsichtlich des Beschleunigungsdruckes vollständig ersetzen, wenn in ihnen außer ihren wirklichen Beschleunigungen $\gamma$ noch die Beschleunigungen $\delta$ angebracht werden.

4. Wählt man die Punkte $ABC$ auf einem mit dem Trägheitshalbmesser $k$ um den Schwerpunkt $S$ beschriebenen Kreise, so ist

$$p_1 = p_2 = p_3 = k, \qquad \Sigma m p^2 = Mk^2$$

und nach den Gleichungen (2), (5), (4)

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{k}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3), \qquad l = k(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3)$$

$$n = 0$$

und somit

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C = 0,$$

d. h.: *Verteilt man die Masse $M$ des Systems nach dem Schwerpunktsgesetze in drei beliebige Produkte des mit dem Trägheitshalbmesser $k$*

*um den Schwerpunkt beschriebenen Kreises, so ersetzen diese Punkte das System hinsichtlich der Beschleunigungsdrücke vollständig.*

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebig viele Punkte des Kreises $k$ ist gestattet.

5. Der Ersatz der Systemmasse hinsichtlich der Beschleunigungsdrücke kann auch durch zwei Punkte $A$ und $B$ geschehen; nur müssen diese so gewählt werden, daß der Systemschwerpunkt $S$ auf ihrer Verbindungslinie liegt (Fig. 4).

Die Massen der Punkte $A$ und $B$ sind dann

$$m_A = M\frac{p_2}{l}, \qquad m_B = M.\frac{p_1}{l}$$

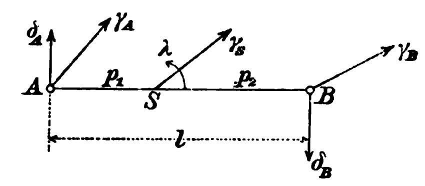
und ihre Beschleunigungen außer $\gamma_A \gamma_B$, den Beschleunigungen der Systempunkte, noch

$$\delta_A = n\lambda p_1, \qquad \delta_B = n\lambda p_2;$$

diesen letzteren Beschleunigungen entsprechen die Beschleunigungsdrücke

$$m_A\delta_A = m_B\delta_B = Mn\lambda\frac{p_1 p_2}{l}.$$

Fig. 4.




Sie bilden also ein Kraftpaar vom Momente

$$Mn\lambda p_1 p_2.$$

Um die Konstante $n$ zu bestimmen, die gleich $\frac{M_0}{M}$ ermittelt wurde, verteile man die Systemmasse $M$ in die drei Punkte $ABS$ derart, daß das Trägheitsmoment dieser drei Massen für jeden Punkt der Ebene ebenso groß ist wie jenes des Systems. Hierfür fand ich in der Graphischen Dynamik S. 71

$$M_A = \frac{Mk^2}{p_1 l}, \qquad M_B = \frac{Mk^2}{p_2 l} \qquad M_0 = M\left(1 - \frac{k^2}{p_1 p_2}\right),$$

es ist also

$$n = 1 - \frac{k^2}{p_1 p_2}$$

und das Kraftpaar der Beschleunigungsdrücke $\delta$

$$M\lambda(p_1 p_2 - k^2).$$

Sein Drehungssinn ist jenem von $\lambda$ entgegengesetzt (Vgl. H. Lorenz, Techn. Mechanik starrer Systeme S. 343.)

6. Die Glieder eines Getriebes bestehen meistens aus Stangen, deren Enden Gelenke sind. Um in diesen Fällen die Masse der Stange durch Punkte zu ersetzen, empfehlen sich zwei Wege. Man wählt die

Punkte $A$ und $B$ entweder zu beiden Seiten des Schwerpunktes $S$ in der Entfernung gleich dem Trägheitshalbmesser $k$ (Fig. 5) und bringt in ihnen die halbe Masse der Stange an; sind $\gamma_A \gamma_B$ die Systembeschleunigungen von $A$ und $B$, so ersetzen die beiden Kräfte $\frac{1}{2}M\gamma_A$ und $\frac{1}{2}M\gamma_B$ die Beschleunigungsdrücke des Systems vollständig.

Fig. 5.

Oder man wählt die Punkte $A$ und $B$ in den Endpunkten (Gelenken) der Stange und verteilt die Masse $M$ nach dem Schwerpunktsgesetze dorthin (Fig. 6). Dann ersetzen die Kräfte $m_A\gamma_A$ und $m_B\gamma_B$, sowie das Kraftpaar $m_A\delta_A = m_B\delta_B$ mit dem Arme $l$ die Beschleunigungsdrücke der Stange vollständig.

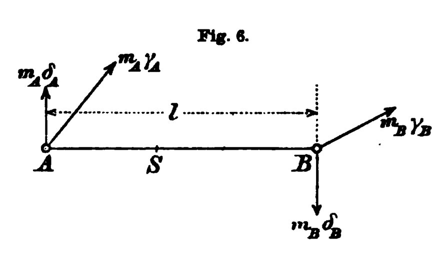


Fig. 6.

Wenn die Bewegung der Stange eine dauernde Drehung um ihren Endpunkt $A$ ist (Kurbel), so wird $\gamma_A = 0$, die Kraft $m_A\gamma_A$ entfällt. In diesem Falle also genügt die Anbringung der Kraft $m_B\gamma_B$ und des Momentes

$$M\lambda(p_1 \cdot p_2 - k^2).$$

Von diesen beiden letzten Arten, die Masse der Stange zu ersetzen, soll im folgenden ausschließlich Gebrauch gemacht werden.

## Die Ermittlung der Stabspannungen und Gelenkdrücke eines bewegten Getriebes.

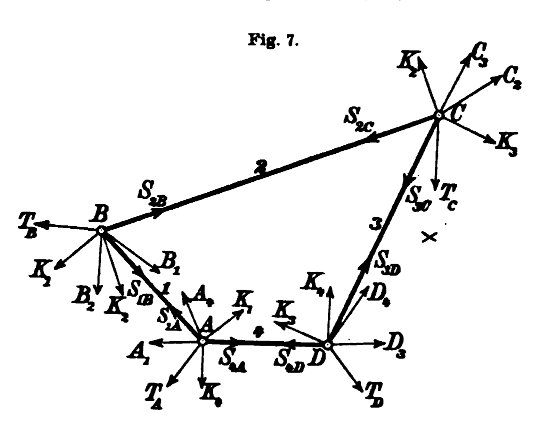
7. Das bewegte Getriebe ist ein Körper, der unter dem Einflusse seiner äußeren Kräfte und seiner Trägheitskräfte (den entgegengesetzten der Beschleunigungsdrücke) im Gleichgewicht bleibt.

Die äußeren Kräfte wollen wir uns ausschließlich in den Gelenken wirkend denken. Sollten Kräfte vorkommen, die in irgend einem Punkte $C$ der Stange $AB$ angreifen, so hindert nichts, $C$ als Gelenk des dreieckigen Gliedes $ABC$ zu behandeln. Auch die Gewichte der Glieder denken wir uns immer auf die Gelenke verteilt. Die Beschleunigungsdrücke der einzelnen Glieder werden nach dem bisher Mitgeteilten ersetzt durch die Beschleunigungsdrücke der in die Gelenke verteilten Massen der Glieder.

Da die in der Praxis verwendeten Getriebe meistens aus Gelenkvierecken zusammengesetzt sind, soll an einem solchen in allgemeinster Art die graphische Ermittlung der Stabspannungen und Gelenkdrücke gezeigt werden.

Es sei $ABCD$ ein aus vier gelenkig verbundenen Stäben 1, 2, 3, 4 bestehendes Viereck, von dem kein Glied festgelegt ist. (Fig. 7.) Der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand dieses Gelenkvierecks sei als gegeben vorausgesetzt. Fig. 7a gibt den Geschwindigkeitsplan; er ist nach dem Verfahren Mohrs konstruiert. (Vgl. dessen Arbeit: Beiträge zur Geometrie der Bewegung ebener Getriebe, diese Zeitschrift 49. Bd., S. 398.) Sein Zusammenhang mit dem Bilde des Getriebes besteht darin, daß die Seiten des Geschwindigkeitsplanes senkrecht stehen zu den entsprechenden des Getriebes, z. B. $A'B' \perp AB$.

Fig. 7.



Der Geschwindigkeitspol wurde als unwesentlich fortgelassen; es bedeutet $v_1 = A'B'$ die Geschwindigkeit des Punktes $B$ bezüglich $A$

Fig. 7a.

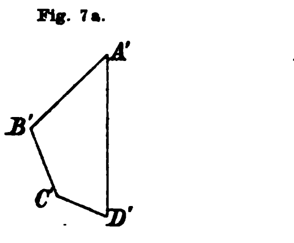
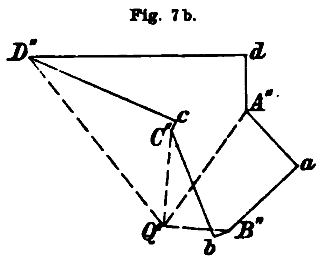



Fig. 7b.




und $v_2 = B'C'$ die Geschwindigkeit des Punktes $C$ bezüglich $B$. Die Seiten des Geschwindigkeitsplanes bedeuten also die relativen Geschwindigkeiten der Gelenke gegeneinander.

In Fig. 7b wurde ebenfalls nach Mohr (a. a. O. S. 405) der Beschleunigungsplan des Gelenkviereckes gezeichnet. $Q''$, der Pol des Beschleunigungsplanes wurde beliebig angenommen; es sind dann

$$\gamma_A = Q''A'', \quad \gamma_B = Q''B'', \quad \gamma_C = Q''C'', \quad \gamma_D = Q''D''$$

die Beschleunigungen der vier Gelenke.

Ferner bedeutet $A''B''$ die relative Beschleunigung von $B$ gegen $A$; sie besteht aus der relativen Normalbeschleunigung $A''a = \frac{v_1^2}{l_1} = \frac{\overline{A'B'}^2}{AB}$

mit der Richtung von $B$ nach $A$ und der relativen Tangentialbeschleunigung:

$$aB'' = l_1 \lambda_1 = AB \cdot \lambda_1,$$

worin $\lambda_1$ die Winkelbeschleunigung des Stabes $AB$ (Glied 1) ist.

In gleicher Weise bedeutet $B''C''$ die relative Beschleunigung von $C$ gegen $B$; sie besteht aus der relativen Normalbeschleunigung $B''b = \frac{v_2^2}{l_2} = \frac{\overline{B'C'}^2}{BC}$ mit der Richtung von $C$ nach $B$ und der relativen Tangentialbeschleunigung $bC'' = l_2 \lambda_2 = BC \cdot \lambda_2$, worin $\lambda_2$ die Winkelbeschleunigung des Stabes $BC$ (Glied 2) ist.

Aus dem Beschleunigungsplan sind also die Winkelbeschleunigungen der vier Glieder in folgender Weise zu entnehmen:

$$\lambda_1 = \frac{aB''}{l_1}, \quad \lambda_2 = \frac{bC''}{l_2}, \quad \lambda_3 = \frac{cD''}{l_3}, \quad \lambda_4 = \frac{dA''}{l_4}.$$

8. Um die Trägheitskräfte eines dieser Glieder zu bilden, hat man zuerst (nach 5) die Masse dieses Gliedes in die Gelenke zu verteilen z. B. für den Stab $AB$ (Glied 1) in die Gelenke $A$ und $B$; diese Teile seien $m_{1A}$, $m_{1B}$; die Trägheitskräfte dieser Massenpunkte sind

$$T_{1A} = -m_{1A} \cdot \gamma_A, \quad T_{1B} = -m_{1B} \cdot \gamma_B$$

d. h. sie sind den Beschleunigungen $\gamma_A$, $\gamma_B$ entgegengesetzt anzubringen.

Da in jedes Gelenk die Massen aller angrenzenden Glieder zu verteilen sind, so besteht auch die Trägheitskraft jeder Gelenkmasse aus mehreren Teilen, die aber dieselbe Richtung besitzen. So fällt z. B. in das Gelenk $B$ die Masse $m_{1B}$ des Gliedes 1 und die Masse $m_{2B}$ des Gliedes 2; also ist die Trägheitskraft des Gelenkes $B$

$$T_B = T_{1B} + T_{2B} = -(m_{1B} + m_{2B}) \cdot \gamma_B.$$

Sodann sind noch an allen Gliedern die Trägheitskräfte $K$ derart anzubringen, daß sie den in Abschnitt 5 entwickelten Beschleunigungsdrücken $m_A \delta_A$ und $m_B \delta_B$ entgegengesetzt sind; ihr Moment ist also

$$Kl = M\lambda(p_1 p_2 - k^2),$$

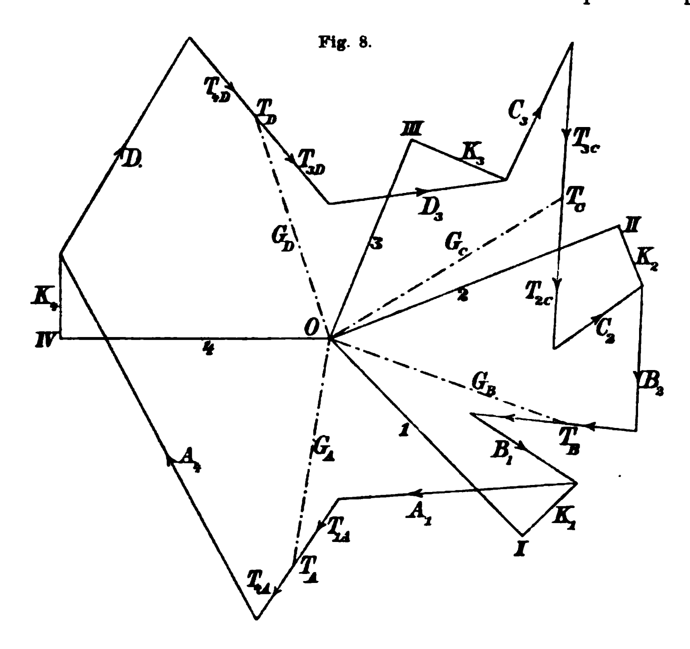
sein Drehungssinn stimmt mit jenem von $\lambda$ überein. Diese Kräfte $K$ wirken am Ende jeder Stange des Viereckes und sind mit dem Stellenzeiger des zugehörigen Gliedes bezeichnet worden; so z. B. wirken die beiden Kräfte $K_1$ $K_1$ in den Gelenken des Gliedes 1. Ihr Drehungssinn stimmt mit jenem von $\lambda_1$ überein, der aus dem Beschleunigungsplan zu entnehmen ist; so ist z. B. die Tangentialbeschleunigung von $B$ gegen $A$ nach früher $\lambda_1 l_1 = aB''$, dreht also, wenn sie in $B$ angesetzt

wird, um $A$ gegen den Sinn des Uhrzeigers; in gleichem Sinne ist das Kraftpaar $K_1$ $K_1$ am Gliede 1 anzubringen.

Die Trägheitskräfte des Kurbelvierecks bestehen also aus den vier Gelenkkräften $T_A$, $T_B$, $T_C$, $T_D$ und den vier Kraftpaaren $K_1 l_1$, $K_2 l_2$, $K_3 l_3$, $K_4 l_4$ (Fig. 7).

9. Außerdem wirken in den Gelenken jedes Gliedes die äußeren Kräfte; sie sind übereinstimmend mit den Gelenken bezeichnet und tragen als Stellenzeiger die Ziffern des Stabes; so wirken z. B. in den Gelenken $A$ und $B$ des Stabes 1 die äußeren Kräfte $A_1$ und $B_1$.

Fig. 8.



10. Nachdem alle Trägheitskräfte und äußern Kräfte (zu denen auch die Gewichte der Stangen gefügt werden können) angebracht sind, kann nun die Konstruktion des dynamischen Kraftplanes vorgenommen werden. Da alle Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden, muß der Kraftzug sich schließen, was in Fig. 8 ersichtlich gemacht wurde. Hierbei können die Kräfte $K$ nach Belieben weggelassen werden, da sie ohne dies nur im Kraftpaar auftreten.

Diese Kräfte $K$ dürfen aber nicht weggelassen werden, wenn es sich um die Ermittlung der Stabspannungen und der Gelenkdrücke handelt. Zu diesem Zwecke wollen wir jedes Gelenk für sich auf sein Gleichgewicht prüfen. Um z. B. die Stabspannungen 1 und 4 zu finden, setzen wir sie ins Gleichgewicht mit den übrigen Kräften des Gelenkes $A$, nämlich den äußeren Kräften $A_1 A_4$ und den Trägheitskräften $T_A$, $K_1$, $K_4$;

man ziehe also im Kraftplan durch I und IV die Parallelen zu 1 und 4; dann sind $O$ I und IV $O$ die gesuchten Stabspannungen.

Dies führt zu folgendem Resultat: Zieht man durch die Punkte I II III IV des Kraftplanes die Parallelen zu den Stäben 1 2 3 4, so müssen sich diese Parallelen in einem Punkt $O$ treffen, der die Größe der vier Stabspannungen bestimmt.

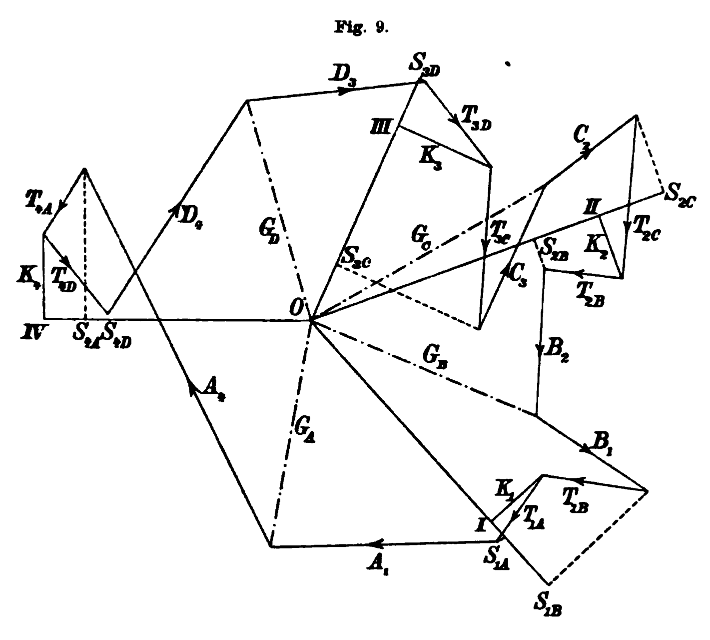
Um den Gelenkdruck z. B. für das Gelenk $A$ zu bestimmen, bedenken wir, daß hier die äußere Kraft $A_1$, die Trägheitskräfte $T_{1A}$ und $K_1$ und endlich die Stabspannung 1 Gleichgewicht halten mit der äußeren Kraft $A_4$, den Trägheitskräften $T_{4A}$ und $K_4$ und der Stabspannung 4; sowohl die erste Gruppe von Kräften wie auch die zweite muß als Mittelkraft den Gelenkdruck $G_A$ in $A$ ergeben, wie dies Fig. 8 deutlich zeigt. Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion der Gelenkdrücke: Man verbinde den Punkt $O$ mit den vier Teilungspunkten der Trägheitskräfte $T_A T_B T_C T_D$; diese Verbindungslinien sind bereits nach Größe und Richtung die vier Gelenkdrücke. Man kann dieses Ergebnis auch anders darstellen. Betrachten wir nicht das Gleichgewicht eines Gelenkes, sondern jenes einer Stange, z. B. der Stange 4. Die auf diese wirkenden Kräfte: die äußeren Kräfte $A_4$ und $D_4$, die Trägheitskräfte $T_{4A}$ und $T_{4D}$, sowie das Kraftpaar $K_4 l_4$ halten Gleichgewicht mit den Gelenkdrücken $G_A$ und $G_D$, welche die benachbarten Glieder 1 und 3 ausüben; der Kraftzug dieser acht Kräfte muß sich also schließen; dabei können die Kräfte $K_4$ des Kraftpaares weggelassen werden, wie Fig. 8 lehrt.

11. Der bisher besprochene Kraftplan Fig. 8 liefert jedoch nicht die *wirklichen* Spannungen in den Stäben des Kurbelvierecks. Die wirklichen Spannungen werden von dem einen Ende des Stabes zum anderen wachsen oder abnehmen infolge des Einflusses des *wirklichen* Beschleunigungsdruckes; der bisher benützte Kraftplan liefert in den Strecken $O$ I, $O$ II, $O$ III, $O$ IV nur eine Annäherung an die wahre Spannung der Stäbe; es ist dies eine Folge davon, daß die Massen der Stäbe nach dem Schwerpunktsgesetze auf die Enden derselben verteilt wurden, wodurch auch die Beschleunigsdrücke bez. Trägheitskräfte auf die Enden verteilt wurden. Zulässig erscheint dies nur für die normal zur Stabrichtung fallenden Teile dieser Kräfte; die in die Stabrichtung selbst fallenden Teile hingegen wachsen oder nehmen ab, je weiter der Querschnitt des Stabes vorschreitet und verändern hierdurch die Spannung im Stabe.

Man kann aber leicht zu den wirklichen Spannungen an den Enden jedes Stabes gelangen, wenn man den Kraftplan Fig. 8, der uns die Gelenkdrücke geliefert hat, in anderer Anordnung zeichnet. Dies ist in Fig. 9 geschehen. Hier sind die an demselben Gelenke wirkenden

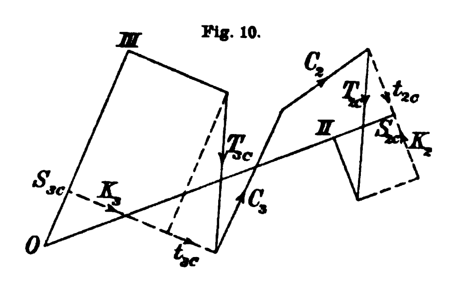
äußeren Kräfte z. B. $C_2$ und $C_3$ zusammengerückt, die Trägheitskräfte hingegen in ihre Teile aufgelöst und auseinandergerückt z. B. $T_C$ in

Fig. 9.




seine Teile $T_{3C}$ und $T_{2C}$. Auf diese Weise rücken die Trägheitskräfte eines Gliedes z. B. $T_{3C}$ und $T_{3D}$ zusammen und zwar an den Endpunkt von $K_3$, so daß alle Trägheitskräfte eines Gliedes, z. B. die Trägheitskräfte $T_{3C}$, $T_{3D}$, $+K_3$, $-K_3$ des Gliedes 3, in einem ununterbrochenen Zuge erscheinen. Der größeren Deutlichkeit wegen wurde der zwischen $O$ II und $O$ III liegende Teil des Kraftplanes in Fig. 10 herausgezeichnet und die Zerlegung von $T_{3C}$ und $T_{2C}$ in ihre achsialen und transversalen Teile

Fig. 10.




vorgenommen; die letzteren sind mit $t_{3C}$ und $t_{2C}$ bezeichnet. Der Kraftzug $K_3$, $t_{3C}$, $C_3$, $C_2$, $t_{2C}$, $K_2$ schneidet jetzt auf den Strahlen $O$ III und $O$ II die wirklichen Stabspannungen $S_{3C}$ und $S_{2C}$ der Stäbe 3 und 2 im Gelenke $C$ ab.

Im Kraftplan Fig. 9 wurde dies für alle acht Stabspannungen des Gelenkvierecks durchgeführt. Man entnimmt auch deutlich, daß sich die Spannungen desselben Stabes an dessen Enden nur um die achsialen Teile der Trägheitskräfte unterscheiden, so z. B. $S_{3D}$ und $S_{3C}$ um die Projektionen von $T_{3D}$ und $T_{3C}$ auf die Stabrichtung.

12. Der dynamische Kraftplan des Gelenkvierecks vereinfacht sich wesentlich, wenn ein Glied desselben festgelegt und die Anzahl der äußeren Kräfte vermindert wird. Da dieses bei den in der Anwendung vorkommenden Fällen meistens zutrifft, soll in Fig. 11 und 12 dieser Kraftplan näher erörtert werden.

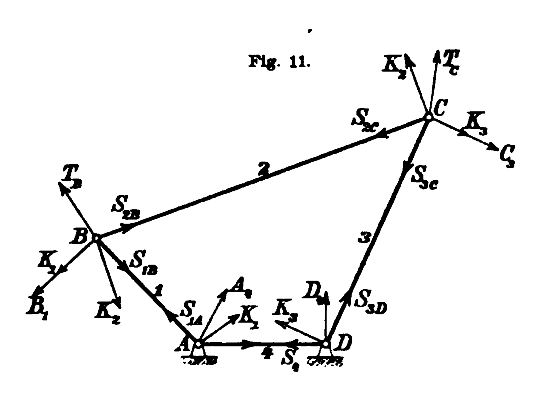

Fig. 11.

Fig. 11 zeigt das Kurbelviereck von früher, jedoch mit festgelegtem Gliede 4; seine Gelenke $A$ und $D$ haben keine Beschleunigung, die Trägheitskräfte $T_A T_D$ und $K_4$ sind Null. Wir wollen das Gelenk $D$ verschiebbar annehmen; infolgedessen ist die äußere Kraft $D_4$ (Widerstand des Auflagers) normal zur Unterlage; hingegen ist die Richtung des Widerstandes $A_4$ noch unbestimmt. Von den übrigen äußeren Kräften wollen wir nur die treibende Kraft $B_1$ der Kurbel 1, normal zu $AB$, und den Widerstand $C_3$ der Kurbel 3, normal zu $CD$, als vorhanden annehmen. Die Trägheitskräfte $T_B$ und $T_C$ der in die Gelenke $B$ und $C$ verteilten Massen werden wie früher ermittelt, ebenso die Trägheitskräfte $K_1 K_2 K_3$.

Fig. 11a und 11b zeigen den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan dieses Gelenkvierecks; sie wurden wieder nach dem Mohrschen

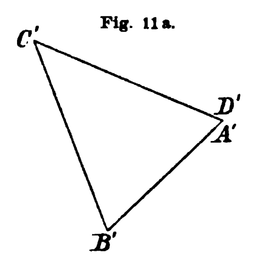


Fig. 11a.

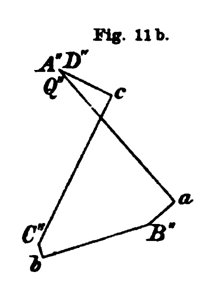


Fig. 11b.

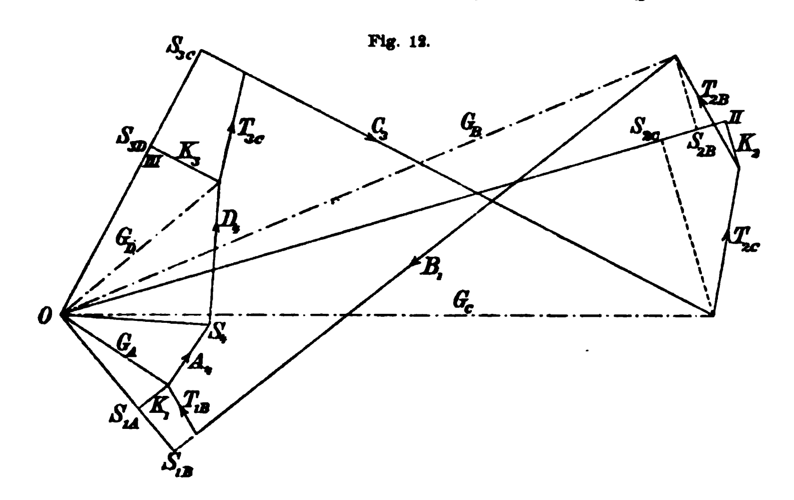
Verfahren entwickelt. Im Geschwindigkeitsplan fallen jetzt $A'$ und $D'$ mit dem Geschwindigkeitspol zusammen, da die Geschwindigkeiten der Punkte $A$ und $D$ Null sind; im Beschleunigungsplan fallen ebenso $A''$ und $D''$ mit dem Beschleunigungspol $Q''$ zusammen, da die Beschleunigungen der Punkte $A$ und $D$ Null sind.

Der dynamische Kraftplan Fig. 12 wurde wie jener in Fig. 9 entwickelt, nur fallen die äußeren Kräfte $A_1 B_2 C_2 D_3$ und die Trägheits-

kräfte $T_A T_D K_4$ fort. Mit Hilfe des Kraftzuges $K_3 T_{3C} C_3 T_{2C} K_2$ erhielt man die Punkte III und II; die Parallelen zu den Stäben 3 und 2 lieferten den Punkt $O$; die Parallele zum Stabe 4 durch $O$ die Spannung $S_4$ und die Auflagerdrücke $D_4$, $A_4$.

Die strichpunktierten, von $O$ ausgehenden Linien geben die Gelenkdrücke $G_A G_B G_C G_D$, während die vollen, von $O$ ausgehenden Linien

Fig. 12.



die Stabspannungen bedeuten, und zwar liegen in jeder Linie zwei Stabspannungen, entsprechend den beiden Enden jedes Stabes. So sind z. B. $OS_{3C}$ und $OS_{3D}$ die Spannungen des Stabes 3 an den Gelenken $C$ und $D$. Der in Ruhe befindliche Stab 4 hingegen hat an beiden Enden die Spannung $OS_4$.

---

## Anfrage.

v. B., R. Auf welcher deutschen öffentlichen Bibliothek findet man die Tafeln der natürlichen Logarithmen von Z. Dase, Wien 1850?

---

# Abhandlungsregister 1904—1905.

Von ERNST WÖLFFING in Stuttgart.

(Die Zahlen über 2604 beziehen sich auf das Technische Abhandlungsregister 1903—1904.)

(Schluß.)

### Ozeanographie.

**2189.** *G. Wegemann.* Ursachen der vertikalen Temperaturverteilung im Weltmeere unter besonderer Berücksichtigung der Wärmeleitung. A.H. 33. 206.

**2190.** *L. Forch.* Der osmotische Druck im Meerwasser. A.H. 32. 335.

### Meeresströme.

**2191.** *F. Nansen.* Die Ursache der Meeresströmungen P.G.M. 51. 1; 25; 82.

**2192.** *C. Forch.* Über die Berechnungen von Meeresströmungen. A.H. 32. 433.

**2193.** *R. Lütgens.* O. Pettersons Untersuchungen über den Einfluß der Eisschmelze auf die Meeresströmungen. A. H. 33. 150.

Siehe auch 611; 930.

### Ebbe und Flut.

**2194.** *A. K. Bartlett.* Origin of the tides. P.A. 11. 494.

**2195.** *A. Müller.* Zur Theorie von Ebbe und Flut. N.O. 49. 617.

**2196.** *Baum.* Zur Theorie von Ebbe und Flut. N.O. 50. 240; 570. — *A. Müller* 357.

**2197.** *J. F. Ruthren.* Moxly's new theory of the tides. N.M.L. 72. 228. — *J. H. S. Moxly* 285.

**2198.** *K. Honda, Y. Yoshida* and *T. Terada.* On the secondary undulations of oceanic tide. P.T.M. 2. 222.

**2199.** *K. Honda, Y. Yoshida* und *T. Terada.* Über die sekundären Wellenbewegungen der Meeresgezeiten. P. Z. 6. 115.

**2200.** *K. Honda, Y. Yoshida* et *T. Terada.* Des ondulations secondaires de la marée océanique. A.S.G. (4) 19. 472.

Siehe auch 2593; 2594.

### Hydrologie.

**2201.** *E. Maillet.* Sur les décrues des rivières. C.R. 138. 1030.

**2202.** *K. Honda* and *T. Terada.* On the geyser in Atami. P.T.M. 2. Nr. 12.

**2203.** *P. Schreiber.* Über die Beziehungen zwischen dem Niederschlag und der Wasserführung der Flüsse in Mitteleuropa. M.Z. 21. 441. — *W. Ule* 22. 282.

**2204.** *G. Chrystal.* Some results in the mathematical theory of seiches. P. R.S.C. 25. 328; 637.

Siehe auch 178; 299; 3372; 3396.

### Seen.

Siehe 3402; 3469.

### Flüsse.

Siehe 3377; 3386; 3422; 3437.

### Hochwasser.

Siehe 3381; 3448.

### Quellen.

**2205.** *E. Maillet.* Sur les nappes souterraines et les sources. F.T. (10) 4. 1.

**2206.** *J. Boussinesq.* Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau

infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. J.M. (5) 10. 1.

Siehe auch 3445.

**Mathematische Meteorologie.**

**2207.** *F. H. Bigelow.* Application of mathematics in meteorology. M.W.R. 33. 90.

**Geschichte der Meteorologie.**

Siehe 2249; 2272.

**Höhere Luftschichten.**

Siehe 179.

**Höhe der Atmosphäre.**

Siehe 1889.

**Luftdruck.**

**2208.** *W. N. Shaw* and *W. H. Dines.* The study of the minor fluctuations of athmospheric pressure. Q.J.M.S. 31. 39.

Siehe auch 2176; 2275.

**Dynamische Meteorologie.**

**2209.** *S. Mars.* De algemeene circulatie van den dampkring. H.E.D. 2. 118; 184.

**2210.** *G. Greim.* Über die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre. G.Z. 1904. 39.

**2211.** *A. Woeikof.* Remarks on Bigelow's studies on the circulation of the atmosphere. M.W.R. 32. 118.

**2212.** *W. N. Shaw.* On the general circulation of the athmosphere in middle and higher latitudes. M.W.R. 32. 264.

**2213.** *F. H. Bigelow.* Studies on the circulation of the athmosphere of the sun and of the earth. M.W.R. 32. 166.

**2214.** *H. v. Hasenkamp.* F. Ahlborns Untersuchungen über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes. A.H. 32. 504.

**2215.** *M. Gorodensky.* Über die Frage nach dem Einflusse der Erdrotation auf die atmosphärischen Störungen (russ). A.P.M. (8) 15. Nr. 9. 1.

**2216.** *W. Meinardus.* Die Schwankungen der nordatlantischen Zirkulation und ihre Folgen. G.L. 41. 20.

Siehe auch 2150.

**Luftbewegung.**

**2217.** *E. Herrmann.* Zur Gültigkeit der Ferrelschen allgemeinen Zirkulation der Athmosphäre. M.Z. 21. 412.

**2218.** *L. de Marchi.* La circolazione atmosferica negli strati inferiori. R.A.L.R. (5) 13 A. 619.

**2219.** *Wegemann.* Erweiterung des barischen Windgesetzes nebst Anwendungen. A.H. 32. 408.

**2220.** *M. Dechevrens.* The vertical component of the wind. M.W.R. 32. 118.

**2221.** *W. A. Eddy.* Perpendicular cold air movements as related to cloud velocity. M.W.R. 32. 559.

Siehe auch 149; 2258.

**Zyklonen.**

**2222.** *W. Krebs.* Tornados. D.W.B. 5. 177.

**2223.** *M. Margules.* Über die Energie der Stürme. J.Z.M.E. (2) 40.

**2224.** *B. Brunhes.* Sur le rôle de la force centrifuge composée dans la détermination du sens de rotation des cyclones et tourbillons. C.R. 138. 1093.

**2225.** *S. Hanslik.* Some relations between direction and velocity of movements and pressure at the center of ellipsoidical cyclones. M.W.R. 32. 562,

**2226.** *H. H. Clayton.* Various researches on the temperature in cyclones and anticyclones in temperate latitudes. B.P.A. 1. 93.

**2227.** *E. Rosenthal.* Über den vertikalen Temperaturgradienten in Zyklonen. I.A.M. 9. 117.

Siehe auch 2260.

**Meteorologische Optik.**

**2228.** *A. Bemporad.* Sulla teoria della estinzione atmosferica. M.S.S.I. 32. 49; 97.

**2229.** *A. Bemporad.* Sul vero ammontore dell' assorbimento esercitato dall' atmosfera sulla luce degli astri. B.G.C. 80. 8.

**2230.** *A. Bemporad.* Zur Theorie der Extinktion des Lichts in der Erdatmosphäre. M.S.H. 4.

**2231.** *A. A. Nijland.* Der Einfluß der atmosphärischen Dispersion auf die photographische Messung gleichfarbiger Sterne. A.N.K. 168. 333.

**2232.** *C. Jensen.* Die blaue Himmelsfarbe. D.W.B. 5. 65.

**2233.** *E. Marchand.* Les lueurs crepusculaires et phénomènes connexes. A.S.M.F. 53. 40.

**2234.** *G. Haecker.* Untersuchungen über Nebeltransparenz. S.V.K. 13. 75.

Siehe auch 1911; 3614.

### Refraktion.

**2235.** *A. Bemporad.* Una osservazione alla teoria di rifrazione di Bessel. M. S.S.I. 31. 278.

**2236.** *Loewy.* Nouvelles méthodes pour la détermination directe de la réfraction à toutes les hauteurs. C.R. 141. 157.

**2237.** *Loewy.* Étude de la réfraction à toutes les hauteurs. Formules relatives à la détermination des coordonnées des astres. C.R. 141. 289.

**2238.** *L. Courvoisier.* Erwiderung auf Herrn Pannekoeks Bemerkungen zur „jährlichen Refraktion." A.N.K. 168. 51; 367. — *A. Pannekoek* 257.

**2239.** *L. de Ball.* Neue Refraktionstafeln. A.N.K. 166. 353.

**2240.** *L. de Ball.* Eine zweite neue Form von Refraktionstafeln. A.N.K. 168. 245.

**2241.** *L. de Ball.* Über eine Tafel zur logarithmischen Berechnung der Refraktion. A.N.K. 169. 209.

**2242.** *L. de Ball.* Über den Einfluß des Dampfdruckes auf die Refraktion. A.N.K. 169. 179.

**2243.** *R. T. Crawford.* The constant of refraction. P.A.S.F. 16. 78.

**2244.** *G. A. Hill.* An untried method of determining the constant of refraction. S. (2) 17. 108.

**2245.** *M. d'Ocagne.* Sur la dépression de l'horizon de la mer et le nivellement géodésique. N.A. (4) 4. 197.

**2246.** *P. Harzer.* Über die kosmische Strahlenbrechung. A.N.K. 168. 261.

**2247.** *L. Courvoisier.* Untersuchungen über die astronomische Refraktion. V. S.H. 3.

**2248.** *O. Wiedefeld.* Die Größe der astronomischen Refraktion am Horizont. M.V.A.P. 14. 69.

**2249.** *J. Maurer.* Zur Geschichte der terrestrischen Refraktion. M.Z. 22. 262.

**2250.** *J. Maurer.* Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung bei typischen Formen der Luftdruckverteilung. M.Z. 22. 50.

**2251.** *F. v. Schrötter.* Der Einfluß der irdischen Strahlenbrechung auf die Navigierung. A.H. 33. 158.

Siehe auch 1850; 3604.

### Regenbogen.

**2252.** *D. Hammer.* Airy's theory of the rainbow. M.W.R. 32. 503.

**2253.** *N. N.* Pernter's theory of the rainbow. M.W.R. 33. 61.

**2254.** *N. N.* The primary and secon-d v. M.W.R. 32. 371.

**2255.** *K. Aichi* and *T. Tanakadate.* Theory of the rainbow due to a circular source of light. P.M. (6) 8. 598.

**2256.** *K. Aichi* and *P. Panakadate.* Extension of Aiyr's theory on the rainbow to that do to a circular source. P. T.M. 2. 79.

**2257.** *J. M. Pernter.* Zur Theorie des von einer kreisförmigen Lichtquelle erzeugten Regenbogens. S.A.W. 114. 785.

### Lufttemperatur.

**2258.** *J. Schubert.* Der jährliche Wärmeaustausch in der Atmosphäre und an der Erdoberfläche und die Stärke der Luft- und Dampfströmung in der Atmosphäre. I.A.M. 8. 213.

**2259.** *A. Bemporad.* La teoria della estinzione atmosferica nella ipotesi di un dicresimento uniforme della temperatura dell' aria coll' altezza. M.S.S.I. 33. 31.

**2260.** *A. L. Rotch.* Temperature in cyclones and anticyclones. S. (2) 20. 890.

**2261.** *P. David.* Inversions de température en altitude. A.S.M.F. 52. 216.

**2262.** *F. Eredia* Sulla differenza di temperatura fra Rocca e Monte Cavo. R.A.L.R 13B. 261.

### Thermostatik der Atmosphäre.

**2263.** *M. Moreno y Anda.* El decrecimiento de la temperatura con la altitud. M.yR.M. 19. 137.

**2264.** *J. Hann.* Über die Temperaturabnahme mit der Höhe bis zu 10 km nach den Ergebnissen der internationalen Ballonaufstiege. S.A.W. 113. 571.

**2265.** *A. Schmidt.* Labile Gleichgewichtszustände in der Atmosphäre. B. G. 5. 389.

Siehe auch 1390; 2261.

### Thermodynamik der Atmosphäre.

**2266.** *J. F. Hoffmann.* Einige Ursachen und Folgen senkrechter Luftbewegungen. B.G. 6. 543.

Siehe auch 2226; 2227.

### Luftfeuchtigkeit.

Siehe 2242.

### Bewölkung.

**2267.** *W. Foerster.* Über die Bestimmungen von Wolkenhöhen und Wolkengeschwindigkeiten. M.V.A.P. 15. 40.

Siehe auch 2221; 3659.

## Nebel.

Haecker. Untersuchungen über nsparenz. M.Z. 22. 343.
Siehe auch 2234.

## Niederschläge.

*A. Defant.* Gesetzmäßigkeiten Verteilung der verschiedenen größen bei Regenfällen. S.A.W. 5.
Siehe auch 2203; 2289.

## Hagel.

*G. Kessler.* Grandine e anello o. A.A.O.V. 33.

## Hagelschießen.

*J. Violle.* Sur l'action des ca-ragrêle. C.R. 140. 342.
Siehe auch 2270.

## Luftelektrizität.

*C. Negro.* Antichi studi di tà atmosferica. B.C. 5. 13.
*P. Longevin.* Sur les ions de sphère. C.R 140. 282; S F.P.
*A. Righi.* Sull' ionizzazione a prodotta da una punta elettriz-I.I.B. (5) 10. 371; R.I.B. (2) 7. 58.
*A. Gockel.* Über den Ionen-der Atmosphäre und dessen Zu-hang mit Luftdruckänderungen. 97.
*A. Schuster.* On the rate at ons are generated in the athmos-S.P.M. 48. No. 12.
*H. Mache* und *E. v. Schweidler.* ie spezifische Geschwindigkeit n in der Atmosphäre. P.Z. 6. 71.
*H. Gerdien.* Über die spezi-eschwindigkeit der positiv ge-Träger der athmosphärischen tiven Induktionen. P.Z. 6. 465.
*H. A. Bumstead.* Athmosphä-adioaktivität. P.Z. 5. 504.
*A. Occhialini.* Relazione fra nte dielettrica e la densità dell' t. A.L.R. (5) 14 A. 618.
he auch 1424; 2600; 2601.

## Gewitter.

*C. Negro.* Fulmine. R.F.M.

## Polarlichter.

**2282.** *C. Negro.* Sull' altezza dell' aurora polare. R.F.M. 5B. 265.
**2283.** *N. N.* The Aurora borealis and Hertzian waves. A.I. 12. 296.

## Kosmische Geophysik und Meteorologie.

**2284.** *W. Foerster.* Über die Beziehungen der Stellungen der Himmelskörper zu dem Eintritt von Erderschütterungen. M.V.A.P. 19. 76.
**2285.** *J. Lizner.* Über die Abhängigkeit des täglichen Ganges der erdmagnetischen Elemente in Batavia vom Sonnenfleckenstande. S.A.W. 113. 791.
**2286.** *P. Langley.* On a possible variation of the solar radiation and its probable effect on terrestrial temperatures. A.J.C. 19. 305.
**2287.** *R. Merecki.* Wplyw zmiennej dzialalności slońca na nieokresowe ruchy atmosfery ziemskiej. (Der Einfluß der veränderlichen Sonnentätigkeit auf die unperiodischen Bewegungen der Erdathmosphäre.) T.W. 16. 233.
**2288.** *A. W. Klossowsky.* Prüfung der Wettervorhersagungsmethode des Herrn Demtschinsky (russ.). M.U.O. 95. 63.
**2289.** *L. Besson.* Influence de la lune sur les précipitations. A.S.M.F. 53. 26.
**2290.** *Möller.* Über die atmosphärische Flut- und insbesondere über die Ebbebewegung der Luft. M.Z. 21. 311.
**2291.** *Seisan.* On lunar phases and weather. J.M.S.J. 23. 9.
Siehe auch 1940; 1941.

## Mathematische Chemie.

**2292.** *W. G. Alexejeff.* Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung. A.U.J. 1903. 5—6. 1; R.U.J. 7. 37.
**2293.** *W. G. Alexejeff.* Über die Entwicklung des Begriffes der höheren arithmetischen Gesetzmäßigkeit in Natur- und Geisteswissenschaften. A.U.J. 1904. Nr. 2.
**2294.** *W. G. Alexejeff.* Sur la nécessité pour les naturalistes d'apprendre les mathématiques. R.U.J. 5. 1.
**2295.** *A. Werner.* Beitrag zum Ausbau des periodischen Systems. C.B. 38. 914.
**2296.** *de Forcrand.* Sur la possibilité des reactions chimiques. C.R. 139. 905.
**2297.** *de Forcrand.* Sur la prévision des reactions chimiques. C.R. 139. 908.

### Refraktion.

**2235.** *A. Bemporad.* Una osservazione alla teoria di rifrazione di Bessel. M. S.S.I. 31. 278.
**2236.** *Loewy.* Nouvelles méthodes pour la détermination directe de la réfraction à toutes les hauteurs. C.R. 141. 157.
**2237.** *Loewy.* Étude de la réfraction à toutes les hauteurs. Formules relatives à la détermination des coordonnées des astres. C.R. 141. 289.
**2238.** *L. Courvoisier.* Erwiderung auf Herrn Pannekoeks Bemerkungen zur „jährlichen Refraktion." A.N.K. 168. 51; 367. — *A. Pannekoek* 257.
**2239.** *L. de Ball.* Neue Refraktionstafeln. A.N.K. 166. 353.
**2240.** *L. de Ball.* Eine zweite neue Form von Refraktionstafeln. A.N.K. 168. 245.
**2241.** *L. de Ball.* Über eine Tafel zur logarithmischen Berechnung der Refraktion. A.N.K. 169. 209.
**2242.** *L. de Ball.* Über den Einfluß des Dampfdruckes auf die Refraktion. A.N.K. 169. 179.
**2243.** *R. T. Crawford.* The constant of refraction. P.A.S.F. 16. 78.
**2244.** *G. A. Hill.* An untried method of determining the constant of refraction. S. (2) 17. 108.
**2245.** *M. d'Ocagne.* Sur la dépression de l'horizon de la mer et le nivellement géodésique. N.A. (4) 4. 197.
**2246.** *P. Harzer.* Über die kosmische Strahlenbrechung. A.N.K. 168. 261.
**2247.** *L. Courvoisier.* Untersuchungen über die astronomische Refraktion. V. S.H. 3.
**2248.** *O. Wiedefeld.* Die Größe der astronomischen Refraktion am Horizont. M.V.A.P. 14. 69.
**2249.** *J. Maurer.* Zur Geschichte der terrestrischen Refraktion. M.Z. 22. 262.
**2250.** *J. Maurer.* Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung bei typischen Formen der Luftdruckverteilung. M.Z. 22. 50.
**2251.** *F. v. Schrötter.* Der Einfluß der irdischen Strahlenbrechung auf die Navigierung. A.H. 33. 158.

Siehe auch 1850; 3604.

### Regenbogen.

**2252.** *D. Hammer.* Airy's theory of the rainbow. M.W.R. 32. 503.
**2253.** *N. N.* Pernter's theory of the rainbow. M.W.R. 33. 61.
**2254.** *N. N.* The primary and secondary rainbow. M.W.R. 32. 371.
**2255.** *K. Aichi* and *T. Tanakadate.* Theory of the rainbow due to a circular source of light. P.M. (6) 8. 598.
**2256.** *K. Aichi* and *P. Panakadate.* Extension of Aiyr's theory on the rainbow to that do to a circular source. P. T.M. 2. 79.
**2257.** *J. M. Pernter.* Zur Theorie des von einer kreisförmigen Lichtquelle erzeugten Regenbogens. S.A.W. 114. 785.

### Lufttemperatur.

**2258.** *J. Schubert.* Der jährliche Wärmeaustausch in der Atmosphäre und an der Erdoberfläche und die Stärke der Luft- und Dampfströmung in der Atmosphäre. I.A.M. 8. 213.
**2259.** *A. Bemporad.* La teoria della estinzione atmosferica nella ipotesi di un dicresimento uniforme della temperatura dell' aria coll' altezza. M.S.S.I. 33. 31.
**2260.** *A. L. Rotch.* Temperature in cyclones and anticyclones. S. (2) 20. 890.
**2261.** *P. David.* Inversions de température en altitude. A.S.M.F. 52. 216.
**2262.** *F. Eredia.* Sulla differenza di temperatura fra Rocca e Monte Cavo. R.A.L.R. 13B. 261.

### Thermostatik der Atmosphäre.

**2263.** *M. Moreno y Anda.* El decrecimiento de la temperatura con la altitud. M.yR.M. 19. 137.
**2264.** *J. Hann.* Über die Temperaturabnahme mit der Höhe bis zu 10 km nach den Ergebnissen der internationalen Ballonaufstiege. S.A.W. 113. 571.
**2265.** *A. Schmidt.* Labile Gleichgewichtszustände in der Atmosphäre. B. G. 5. 389.

Siehe auch 1390; 2261.

### Thermodynamik der Atmosphäre.

**2266.** *J. F. Hoffmann.* Einige Ursachen und Folgen senkrechter Luftbewegungen. B.G. 6. 543.

Siehe auch 2226; 2227.

### Luftfeuchtigkeit.

S[illegible]

**2267** [illegible]
mun[illegible]
ge[illegible]

### Nebel.

**2268.** *Haecker.* Untersuchungen über Nebeltransparenz. M.Z. 22. 343.

Siehe auch 2234.

### Niederschläge.

**2269.** *A. Defant.* Gesetzmäßigkeiten in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrößen bei Regenfällen. S.A.W. 114. 585.

Siehe auch 2203; 2289.

### Hagel.

**2270.** *G. Kessler.* Grandine e anello vorticoso. A.A.O.V. 33.

### Hagelschießen.

**2271.** *J. Violle.* Sur l'action des canons paragrêle. C.R. 140. 342.

Siehe auch 2270.

### Luftelektrizität.

**2272.** *C. Negro.* Antichi studi di elettricità atmosferica. B.C. 5. 13.

**2273.** *P. Longevin.* Sur les ions de l'athmosphère. C.R. 140. 232; S.F.P. 230. 4.

**2274.** *A. Righi.* Sull' ionizzazione dell' aria prodotta da una punta elettrizzata. M.I.B. (5) 10. 371; R.I.B. (2) 7. 58.

**2275.** *A. Gockel.* Über den Ionengehalt der Atmosphäre und dessen Zusammenhang mit Luftdruckänderungen. M.Z. 22. 97.

**2276.** *A. Schuster.* On the rate at which ions are generated in the athmosphere. S.P.M. 48. No. 12.

**2277.** *H. Mache* und *E. v. Schweidler.* Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in der Atmosphäre. P.Z. 6. 71.

**2278.** *H. Gerdien.* Über die spezifische Geschwindigkeit der positiv ge-[illegible] Träger der athmosphärischen [illegible] Induktionen. P.Z. 6. 465.

[illegible] nä-

### Polarlichter.

**2282.** *C. Negro.* Sull' altezza dell' aurora polare. R.F.M. 58. 263.

**2283.** *N. N.* The Aurora borealis and Hertzian waves. A.I. 12. 296.

### Kosmische Geophysik und Meteorologie.

**2284.** *W. Foerster.* Über die Beziehungen der Stellungen der Himmelskörper zu dem Eintritt von Erderschütterungen. M.V.A.P. 19. 76.

**2285.** *J. Liznar.* Über die Abhängigkeit des täglichen Ganges der erdmagnetischen Elemente in Batavia vom Sonnenfleckenstande. S.A.W. 113. 791.

**2286.** *P. Langley.* On a possible variation of the solar radiation and its probable effect on terrestrial temperatures. A.J.C. 19. 305.

**2287.** *R. Merecki.* Wpływ zmiennej działalności słońca na nieokresowe ruchy atmosfery ziemskiej. (Der Einfluß der veränderlichen Sonnentätigkeit auf die unperiodischen Bewegungen der Erdathmosphäre.) T.W. 16. 233.

**2288.** *A. W. Klossowsky.* Prüfung der Wettervorhersagungsmethode des Herrn Demtschinsky (russ.). M.U.O. 95. 63.

**2289.** *L. Besson.* Influence de la lune sur les précipitations. A.S.M.F. 53. 26.

**2290.** *Möller.* Über die atmosphärische Flut- und insbesondere über die Ebbebewegung der Luft. M.Z. 21. 311.

**2291.** *Seisan.* On lunar phases and weather. J.M.S.J. 23. 9.

Siehe auch 1940; 1941.

### Mathematische Chemie.

**2292.** *W. G. Alexejeff.* Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung. A.U.J. 1903. 5—6. 1; R.U.J. 7. 37.

**2293.** *W. G. Alexejeff.* Über die Entwicklung des Begriffes der höheren arithmetischen Gesetzmäßigkeit in Natur- und Geisteswissenschaften. A.U.J. 1904. Nr. 2.

**2294.** *W. G. Alexejeff.* Sur la nécessité pour les naturalistes d'apprendre les mathématiques. R.U.J. 5. 1.

**2295.** *A. Werner.* Beitrag zum Ausbau des periodischen Systems. C.B. 38. 914.

**2296.** *de Forcrand.* Sur la possibilité des reactions chimiques. C.R. 139. 905.

**2297.** *de Forcrand.* Sur la prévision des reactions chimiques. C.R. 139. 908.

### Refraktion.

**2235.** *A. Bemporad.* Una osservazione alla teoria di rifrazione di Bessel. M. S.S.I. 31. 278.

**2236.** *Loewy.* Nouvelles méthodes pour la détermination directe de la réfraction à toutes les hauteurs. C.R. 141. 157.

**2237.** *Loewy.* Étude de la réfraction à toutes les hauteurs. Formules relatives à la détermination des coordonnées des astres. C.R. 141. 289.

**2238.** *L. Courvoisier.* Erwiderung auf Herrn Pannekoeks Bemerkungen zur „jährlichen Refraktion." A.N.K. 168. 51; 367. — *A. Pannekoek* 257.

**2239.** *L. de Ball.* Neue Refraktionstafeln. A.N.K. 166. 353.

**2240.** *L. de Ball.* Eine zweite neue Form von Refraktionstafeln. A.N.K. 168. 245.

**2241.** *L. de Ball.* Über eine Tafel zur logarithmischen Berechnung der Refraktion. A.N.K. 169. 209.

**2242.** *L. de Ball.* Über den Einfluß des Dampfdruckes auf die Refraktion. A.N.K. 169. 179.

**2243.** *R. T. Crawford.* The constant of refraction. P.A.S.F. 16. 78.

**2244.** *G. A. Hill.* An untried method of determining the constant of refraction. S. (2) 17. 108.

**2245.** *M. d'Ocagne.* Sur la dépression de l'horizon de la mer et le nivellement géodésique. N.A. (4) 4. 197.

**2246.** *P. Harzer.* Über die kosmische Strahlenbrechung. A.N.K. 168. 261.

**2247.** *L. Courvoisier.* Untersuchungen über die astronomische Refraktion. V. S.H. 3.

**2248.** *O. Wiedefeld.* Die Größe der astronomischen Refraktion am Horizont. M.V.A.P. 14. 69.

**2249.** *J. Maurer.* Zur Geschichte der terrestrischen Refraktion. M.Z. 22. 262.

**2250.** *J. Maurer.* Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung bei typischen Formen der Luftdruckverteilung. M.Z. 22. 50.

**2251.** *F. v. Schrötter.* Der Einfluß der irdischen Strahlenbrechung auf die Navigierung. A.H. 33. 158.

Siehe auch 1850; 3604.

### Regenbogen.

**2252.** *D. Hammer.* Airy's theory of the rainbow. M.W.R. 32. 503.

**2253.** *N. N.* Pernter's theory of the rainbow. M.W.R. 33. 61.

**2254.** *N. N.* The primary and secondary rainbow. M.W.R. 32. 371.

**2255.** *K. Aichi* and *T. Tanakadat* Theory of the rainbow due to a circul source of light. P.M. (6) 8. 598.

**2256.** *K. Aichi* and *P. Panakadat* Extension of Aiyr's theory on the rai bow to that do to a circular source. T.M. 2. 79.

**2257.** *J. M. Pernter.* Zur Theorie de von einer kreisförmigen Lichtquelle e zeugten Regenbogens. S.A.W. 114. 78

### Lufttemperatur.

**2258.** *J. Schubert.* Der jährliche Wä meaustausch in der Atmosphäre und a der Erdoberfläche und die Stärke d Luft- und Dampfströmung in der Atmo sphäre. I.A.M. 8. 213.

**2259.** *A. Bemporad.* La teoria dell estinzione atmosferica nella ipotesi d un dicresimento uniforme della tempe ratura dell' aria coll' altezza. M.S.S. 33. 31.

**2260.** *A. L. Rotch.* Temperature i cyclones and anticyclones. S. (2) 20. 89

**2261.** *P. David.* Inversions de ten pérature en altitude. A.S.M.F. 52. 21

**2262.** *F. Eredia* Sulla differenza temperatura fra Rocca e Monte Ca R.A.L.R 13B. 261.

### Thermostatik der Atmosphäre.

**2263.** *M. Moreno y Anda.* El dec cimiento de la temperatura con la a tud. M.y R.M. 19. 137.

**2264.** *J. Hann.* Über die Temp turabnahme mit der Höhe bis zu 1 nach den Ergebnissen der internation Ballonaufstiege. S.A.W. 113. 571.

**2265.** *A. Schmidt.* Labile Glei wichtszustände in der Atmosphär G. 5. 389.

Siehe auch 1390; 2261.

### Thermodynamik der Atmosph

**2266.** *J. F. Hoffmann.* Eini sachen und Folgen senkrechter wegungen. B.G. 6. 543.

Siehe auch 2226; 2227.

### Luftfeuchtigkeit.

Siehe 2242.

### Bewölkung.

**2267.** *W. Foerster* mungen von W geschwindi

### Nebel.

**2268.** *Haecker.* Untersuchungen über Nebeltransparenz. M.Z. 22. 343.

Siehe auch 2234.

### Niederschläge.

**2269.** *A. Defant.* Gesetzmäßigkeiten in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrößen bei Regenfällen. S.A.W. 114. 585.

Siehe auch 2203; 2289.

### Hagel.

**2270.** *G. Kessler.* Grandine e anello vorticoso. A.A.O.V. 33.

### Hagelschießen.

**2271.** *J. Violle.* Sur l'action des canons paragrèle. C.R. 140. 342.

Siehe auch 2270.

### Luftelektrizität.

**2272.** *C. Negro.* Antichi studi di elettricità atmosferica. B.C. 5. 13.

**2273.** *P. Longevin.* Sur les ions de l'athmosphère. C.R 140. 232; S F.P. 230. 4.

**2274.** *A. Righi.* Sull' ionizzazione dell' aria prodotta da una punta elettrizzata. M.I.B. (5) 10. 371; R.I.B. (2) 7. 58.

**2275.** *A. Gockel.* Über den Ionengehalt der Atmosphäre und dessen Zusammenhang mit Luftdruckänderungen. M.Z. 22. 97.

**2276.** *A. Schuster.* On the rate at which ions are generated in the athmosphere. S.P.M. 48. No. 12.

**2277.** *H. Mache* und *E. v. Schweidler.* Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in der Atmosphäre. P.Z. 6. 71.

**2278.** *H. Gerdien.* Über die spezifische Geschwindigkeit der positiv geladenen Träger der athmosphärischen radioaktiven Induktionen. P.Z. 6. 465.

**2279.** *H. A. Bumstead.* Athmosphärische Radioaktivität. P.Z. 5. 504.

**2280.** *A. Occhialini.* Relazione fra la costante dielettrica e la densità dell' aria. R.A.L.R. (5) 14 A. 613.

Siehe au[illegible] 2600; 2601.

### Polarlichter.

**2282.** *C. Negro.* Sull' altezza dell' aurora polare. R.F.M. 5 B. 265.

**2283.** *N. N.* The Aurora borealis and Hertzian waves. A.I. 12. 296.

### Kosmische Geophysik und Meteorologie.

**2284.** *W. Foerster.* Über die Beziehungen der Stellungen der Himmelskörper zu dem Eintritt von Erderschütterungen. M.V.A.P. 19. 76.

**2285.** *J. Lizner.* Über die Abhängigkeit des täglichen Ganges der erdmagnetischen Elemente in Batavia vom Sonnenfleckenstande. S.A.W. 113. 791.

**2286.** *P. Langley.* On a possible variation of the solar radiation and its probable effect on terrestrial temperatures. A.J.C. 19. 305.

**2287.** *R. Merecki.* Wplyw zmiennej dzialalności słońca na nieokresowe ruchy atmosfery ziemskiej. (Der Einfluß der veränderlichen Sonnentätigkeit auf die unperiodischen Bewegungen der Erdathmosphäre.) T.W. 16. 233.

**2288.** *A. W. Klossowsky.* Prüfung der Wettervorhersagungsmethode des Herrn Demtschinsky (russ.). M.U.O. 95. 63.

**2289.** *L. Besson.* Influence de la lune sur les précipitations. A.S.M.F. 53. 26.

**2290.** *Möller.* Über die atmosphärische Flut- und insbesondere über die Ebbebewegung der Luft. M.Z. 21. 311.

**2291.** *Seisan.* On lunar phases and weather. J.M.S.J. 23. 9.

Siehe auch 1940; 1941.

### Mathematische Chemie.

**2292.** *W. G. Alexejeff.* Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung. A.U.J. 1903. 5—6. 1; R.U.J. 7. 37.

**2293.** *W. G. Alexejeff.* Über die Entwicklung des Begriffes der höheren arithmetischen Gesetzmäßigkeit in Natur- und Geisteswissenschaften. A.U.J. 1904. Nr. 2.

**2294.** *W. G. Alexejeff.* Sur la nécessité pour les naturalistes d'apprendre les mathématiques. R.U.J. 5. 1.

**2295.** *A. Werner.* Beitrag zum Ausbau des periodischen Systems. C.B. 38. 914.

**2296.** *de Forcrand.* Sur la possibilité des reactions chimiques. C.R. 139. 905.

**2297.** *de Forcrand.* Sur la prévision des reactions chimiques. C.R. 139. 908.

### Refraktion.

**2235.** *A. Bemporad.* Una osservazione alla teoria di rifrazione di Bessel. M. S.S.I. 31. 278.

**2236.** *Loewy.* Nouvelles méthodes pour la détermination directe de la réfraction à toutes les hauteurs. C.R. 141. 157.

**2237.** *Loewy.* Étude de la réfraction à toutes les hauteurs. Formules relatives à la détermination des coordonnées des astres. C.R. 141. 289.

**2238.** *L. Courvoisier.* Erwiderung auf Herrn Pannekoeks Bemerkungen zur „jährlichen Refraktion." A.N.K. 168. 51; 367. — *A. Pannekoek* 257.

**2239.** *L. de Ball.* Neue Refraktionstafeln. A.N.K. 166. 353.

**2240.** *L. de Ball.* Eine zweite neue Form von Refraktionstafeln. A.N.K. 168. 245.

**2241.** *L. de Ball.* Über eine Tafel zur logarithmischen Berechnung der Refraktion. A.N.K. 169. 209.

**2242.** *L. de Ball.* Über den Einfluß des Dampfdruckes auf die Refraktion. A.N.K. 169. 179.

**2243.** *R. T. Crawford.* The constant of refraction. P.A.S.F. 16. 78.

**2244.** *G. A. Hill.* An untried method of determining the constant of refraction. S. (2) 17. 108.

**2245.** *M. d'Ocagne.* Sur la dépression de l'horizon de la mer et le nivellement géodésique. N.A. (4) 4. 197.

**2246.** *P. Harzer.* Über die kosmische Strahlenbrechung. A.N.K. 168. 261.

**2247.** *L. Courvoisier.* Untersuchungen über die astronomische Refraktion. V. S.H. 3.

**2248.** *O. Wiedefeld.* Die Größe der astronomischen Refraktion am Horizont. M.V.A.P. 14. 69.

**2249.** *J. Maurer.* Zur Geschichte der terrestrischen Refraktion. M.Z. 22. 262.

**2250.** *J. Maurer.* Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung bei typischen Formen der Luftdruckverteilung. M.Z. 22. 50.

**2251.** *F. v. Schrötter.* Der Einfluß der irdischen Strahlenbrechung auf die Navigierung. A.H. 33. 158.

Siehe auch 1850; 3604.

### Regenbogen.

**2252.** *D. Hammer.* Airy's theory of the rainbow. M.W.R. 32. 503.

**2253.** *N. N.* Pernter's theory of the rainbow. M.W.R. 33. 61.

**2254.** *N. N.* The primary and secondary rainbow. M.W.R. 32. 371.

**2255.** *K. Aichi* and *T. Tanakadate.* Theory of the rainbow due to a circular source of light. P.M. (6) 8. 598.

**2256.** *K. Aichi* and *P. Panakadate.* Extension of Aiyr's theory on the rainbow to that do to a circular source. P. T.M. 2. 79.

**2257.** *J. M. Pernter.* Zur Theorie des von einer kreisförmigen Lichtquelle erzeugten Regenbogens. S.A.W. 114. 785.

### Lufttemperatur.

**2258.** *J. Schubert.* Der jährliche Wärmeaustausch in der Atmosphäre und an der Erdoberfläche und die Stärke der Luft- und Dampfströmung in der Atmosphäre. I.A.M. 8. 213.

**2259.** *A. Bemporad.* La teoria della estinzione atmosferica nella ipotesi di un dicresimento uniforme della temperatura dell' aria coll' altezza. M.S.S.I. 33. 31.

**2260.** *A. L. Rotch.* Temperature in cyclones and anticyclones. S. (2) 20. 890.

**2261.** *P. David.* Inversions de température en altitude. A.S.M.F. 52. 216.

**2262.** *F. Eredia* Sulla differenza di temperatura fra Rocca e Monte Cavo. R.A.L.R. 13B. 261.

### Thermostatik der Atmosphäre.

**2263.** *M. Moreno y Anda.* El decrecimiento de la temperatura con la altitud. M.y R.M. 19. 137.

**2264.** *J. Hann.* Über die Temperaturabnahme mit der Höhe bis zu 10 km nach den Ergebnissen der internationalen Ballonaufstiege. S.A.W. 113. 571.

**2265.** *A. Schmidt.* Labile Gleichgewichtszustände in der Atmosphäre. B. G. 5. 389.

Siehe auch 1390; 2261.

### Thermodynamik der Atmosphäre.

**2266.** *J. F. Hoffmann.* Einige Ursachen und Folgen senkrechter Luftbewegungen. B.G. 6. 543.

Siehe auch 2226; 2227.

### Luftfeuchtigkeit.

Siehe 2242.

### Bewölkung.

**2267.** *W. Foerster.* Über die Bestimmungen von Wolkenhöhen und Wolkengeschwindigkeiten. M.V.A.P. 15. 40.

Siehe auch 2221; 3659.

### Nebel.

**2268.** *Haecker*. Untersuchungen über Nebeltransparenz. M.Z. 22. 343.

Siehe auch 2234.

### Niederschläge.

**2269.** *A. Defant*. Gesetzmäßigkeiten in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrößen bei Regenfällen. S.A.W. 114. 585.

Siehe auch 2203; 2289.

### Hagel.

**2270.** *G. Kessler*. Grandine e anello vorticoso. A.A.O.V. 33.

### Hagelschießen.

**2271.** *J. Violle*. Sur l'action des canons paragrèle. C.R. 140. 342.

Siehe auch 2270.

### Luftelektrizität.

**2272.** *C. Negro*. Antichi studi di elettricità atmosferica. B.C. 5. 13.

**2273.** *P. Longevin*. Sur les ions de l'athmosphère. C.R 140. 232; S.F.P. 230. 4.

**2274.** *A. Righi*. Sull' ionizzazione dell' aria prodotta da una punta elettrizzata. M.I.B. (5) 10. 371; R.I.B. (2) 7. 58.

**2275.** *A. Gockel*. Über den Ionengehalt der Atmosphäre und dessen Zusammenhang mit Luftdruckänderungen. M.Z. 22. 97.

**2276.** *A. Schuster*. On the rate at which ions are generated in the athmosphere. S.P.M. 48. No. 12.

**2277.** *H. Mache* und *E. v. Schweidler*. Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in der Atmosphäre. P.Z. 6. 71.

**2278.** *H. Gerdien*. Über die spezifische Geschwindigkeit der positiv geladenen Träger der athmosphärischen radioaktiven Induktionen. P.Z. 6. 465.

**2279.** *H. A. Bumstead*. Athmosphärische Radioaktivität. P.Z. 5. 504.

**2280.** *A. Occhialini*. Relazione fra la costante dielettrica e la densità dell' aria. R.A.L.R. (5) 14A. 613.

Siehe auch 1424; 2600; 2601.

### Gewitter.

**2281.** *C. Negro*. Fulmine. R.F.M. 5I. 323.

### Polarlichter.

**2282.** *C. Negro*. Sull' altezza dell' aurora polare. R.F.M. 5B. 265.

**2283.** *N. N.* The Aurora borealis and Hertzian waves. A.I. 12. 296.

### Kosmische Geophysik und Meteorologie.

**2284.** *W. Foerster*. Über die Beziehungen der Stellungen der Himmelskörper zu dem Eintritt von Erderschütterungen. M.V.A.P. 19. 76.

**2285.** *J. Lizner*. Über die Abhängigkeit des täglichen Ganges der erdmagnetischen Elemente in Batavia vom Sonnenfleckenstande. S.A.W. 113. 791.

**2286.** *P. Langley*. On a possible variation of the solar radiation and its probable effect on terrestrial temperatures. A.J.C. 19. 305.

**2287.** *R. Merecki*. Wplyw zmiennej dzialalności słońca na nieokresowe ruchy atmosfery ziemskiej. (Der Einfluß der veränderlichen Sonnentätigkeit auf die unperiodischen Bewegungen der Erdathmosphäre.) T.W. 16. 233.

**2288.** *A. W. Klossowsky*. Prüfung der Wettervorhersagungsmethode des Herrn Demtschinsky (russ.). M.U.O. 95. 63.

**2289.** *L. Besson*. Influence de la lune sur les précipitations. A.S.M.F. 53. 26.

**2290.** *Möller*. Über die atmosphärische Flut- und insbesondere über die Ebbebewegung der Luft. M.Z. 21. 311.

**2291.** *Seisan*. On lunar phases and weather. J.M.S.J. 23. 9.

Siehe auch 1940; 1941.

### Mathematische Chemie.

**2292.** *W. G. Alexejeff*. Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung. A.U.J. 1903. 5—6. 1; R.U.J. 7. 37.

**2293.** *W. G. Alexejeff*. Über die Entwicklung des Begriffes der höheren arithmetischen Gesetzmäßigkeit in Natur- und Geisteswissenschaften. A.U.J. 1904. Nr. 2.

**2294.** *W. G. Alexejeff*. Sur la nécessité pour les naturalistes d'apprendre les mathématiques. R.U.J. 5. 1.

**2295.** *A. Werner*. Beitrag zum Ausbau des periodischen Systems. C.B. 38. 914.

**2296.** *de Forcrand*. Sur la possibilité des reactions chimiques. C.R. 139. 905.

**2297.** *de Forcrand*. Sur la prévision des reactions chimiques. C.R. 139. 908.

**2298.** *H. Euler.* Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit. Z.P.C. 40. 498. — *R. Wegscheider.* 41. 62.

**2299.** *H. O. Jones* and *O. W. Richardson.* Irreversible simultaneous linear reactions. P.C.P.S. 12. 215.

**2300.** *J. K. Clement.* Über die Bildung des Ozons bei hoher Temperatur. A.P. L. (4) 14. 334.

**2301.** *P. Landrieu.* Équilibre entre l'acétone et le chlorhydrate d'hydroxylamine. C.R. 140. 1392.

**2301 a.** *W. Federlin.* Die Reaktion zwischen Kaliumpersulfat, Jodwasserstoff und phosphoriger Säure. Z.P.C. 41. 565.

**2301 b.** *J. Scobai.* Über die Zersetzung des Kaliumchlorats nebst einigen Beobachtungen über die Zersetzung des Natriumchlorats und des Natriumperchlorats. Z.P.C. 44. 319.

**2301 c.** *G. N. Lewis.* Autocatalyptic decomposition of Silver oxide. P.A.Bo. 40. 719.

**2301 d.** *F. G. Dornan.* On the reactivity of alkyl iodides. P.S.D. (2) 10. 195.

**2301 e.** *A. A. Blanchard.* Über die Zersetzung des Ammoniumnitrits. Z.P.C. 41. 681.

**2301 f.** *L. Bruner.* Chemische Dynamik der Bromsubstitution. Z.P.C. 41. 513.

**2301 g.** *S. Bugarszky.* Über die Geschwindigkeit der Einwirkung von Bi auf $C_4H_6O_2$. II. Z.P.C. 42. 545.

**2301 h.** *W. Müller.* Über die Zersetzungsgeschwindigkeit der Brombernsteinsäure in wässeriger Lösung. Z.P.C. 41. 483.

**2301 i.** *C. E. Fawsitt.* Zersetzung des Harnstoffs. Z.P.C. 41. 601.

**2301 j.** *J. Walker.* Das Gleichgewicht zwischen Harnstoff und Ammoniumcyanat. Z.P.C. 42. 207.

**2301 k.** *A. Wogrinz.* Über die Hydrolyse der Trisaccharide durch verdünnte Säuren. Z.P.C. 44. 571.

**2301 l.** *R. Wegscheider.* Über die Verseifung von Carbon- und Sulfonsäureestern. Z.P.C. 41. 52.

**2301 m.** *Lenormand.* Nouvelle méthode pour doser les matières organiques dans les eaux et plus particulièrement dans celles qui contiennent des chlorures et des bromures. T.S.U.R. 2. 375.

**2301 n.** *M. Nicloux.* Étude de l'action lipolytique du cytoplasma de la graine de ricin. C.R. 138. 1288.

**2301 o.** *R. O. Herzog.* Over the working van emulsine. C.A.A. 12. 486.

**2301 p.** *J. Slaboszewicz.* Über die Oxydation von Alkohol und Aldehyd. Z.P.C. 42. 343.

Siehe auch 221; 562; 750; 893; 2678.

## Physikalische Chemie.

**2301 q.** *W. D. Bancroft.* Future developments in physical chemistry. J.P.C. 9. 216.

**2301 r.** *W. Fischer.* Physikalisch-chemische Studien an Metallhydroxyden. J.S.G. 82. 146.

**2301 s.** *M. S. Sherill.* Über die Komplexbildung und einige physikochemische Konstanten der Hg-haloide. Z.P.C. 43. 705.

**2301 t.** *F. Haber.* Zeitgrößen der Komplexbildung, Komplexkonstanten und atomistischer Dimensionen. Z.E. 10. 433. — *G. Bodländer.* 604; *H. Danneel.* 609.

**2302.** *W. Vaubel.* Über die Beziehungen zwischen den Größen der Molekularkomplexe und der Ausdehnungskoeffizienten in den verschiedenen Aggregatzuständen. J.F.P.C. (2) 70. 503.

**2303.** *P. A. Guye.* Nouvelle méthode pour la détermination exacte du poids moléculaire des gaz permanents; poids atomiques de l' *H*, du *C* et l' *N*. C.R. 138. 1213.

**2304.** *P. A. Guye.* Poids atomique dell' azote déduit du rapport des densités de *N* et de *O*. C.R. 140. 1386.

**2305.** *A. Jaquerod* et *O. Scheuer.* Sur la compressibilité des différents gaz audessous de 1 atm. et la détermination de leur poids moléculaire. C.R. 140. 1384.

**2306.** *C. Marie.* Recherches ébullioscopiques sur les mélanges de liquides volatils. C.R. 139. 595.

**2307.** *H. Kamerlingh-Onnes* and *C. Zakrzewsky.* The validity of the law of corresponding states for mixtures of methyl chloride and carbon dioxide. C.P.L. 92. 13.

**2308.** *G. G. Longinescu.* Nouvelles données sur la polymérisation des molécules à l'état liquide et à l'état solide. A.S.U.J. 3. 26.

**2309.** *A. Mittasch.* Über die chemische Dynamik des Ni $(CO)_4$. Z.P.C. 40. 1.

Siehe auch 2681.

## Phasenlehre.

**2310.** *R. Wegscheider.* Zur Kenntnis der Phasenregel. Z.P.C. 43. 93; 376. — *W. Nernst.* 113; *J. J. von Laer.* 741.

**2311.** *C. H. Wind.* Nouvelle démonstration de la règle des phases. R.S. (5) 345.

**2312.** *F. Wald.* Neue Ableitung der Gibbschen Phasenregel. A.N.L. 3. 283.

**2313.** *J. Hirnjak.* Rolja staloi, plinnoi i gasovoi fazi v chemičnij rivnovazi.

(Die Bedeutung der festen, flüssigen und gasförmigen Phase im chemischen Gleichgewicht.) R.S.M. 9 Nr. 2.

**2314.** *J. D. van der Waals.* De afleiding der formule welke de betrekking aangeft tuschen de samenstelling van coëxisteerende phasen bij binaire mengsels. C.A.A. 13. 145.

**2315.** *J. D. van der Waals.* Déduction de la formule qui fait connaître la relation entre les compositions des phases coexistantes d'un mélange binaire. A.N. (2) 10. 111.

**2316.** *J. J. von Laar.* Sur les allures possibles de la courbe de fusion de mélanges binaires de substances isomorphes. A.M.T. (2) 8. 517.

**2317.** *H. Kamerlingh-Onnes* and *C. Zakrzewsky.* The determination of the conditions of coexistence of vapour and liquid phases of mixtures of gases at low temperatures. C.P.L. 92. 3.

**2318.** *C. L. Jungius.* Theoretische beschouwing omtrent gressreacties welke verlopen in 2 of meer achter eenvolgende phasen. C.A.A. 12. 928.

**2319.** *P. Saurel.* On the stability of the equilibrium of a homogeneous phase. J.P.C. 8. 325.

**2320.** *P. Saurel.* On the stability of the equilibrium of bivariant systems. J.P.C. 8. 436.

**2321.** *P. Saurel.* On the stability of the equilibrium of multivariant systems. J.P.C. 8. 488.

**2322.** *B. M. van Dalfsen.* Over de functie $\frac{a}{b}$ bij meervoudige mengsels. C.A.A. 13. 167.

**2323.** *Bakhuis Roozeboom.* Über die Anwendung der Phasenlehre auf die Gemische von Fe und C. Z.E. 10. 489.

**2324.** *E. Heyn.* Labile und metastabile Gleichgewichte in Fe-C-legierungen. Z.E. 10. 491.

**2325.** *A. Smits.* Sur l'allure de la courbe de solubilité dans le voisinage de la température critique de mélanges binaires. A.N. (2) 9. 251.

**2326.** *W. Reinders.* Die Phasenlehre und der Potentialsprung zwischen einer Elektrode, welche aus 2 Metallen besteht, und einem Elektrolyt, der die Salze dieser Metalle enthält. Z.P.C. 42. 225.

Siehe auch 275.

**Photochemie.**

**2327.** *P. Villard.* Sur les actions chimiques de la lumière. S.F.P. Nr. 219; J.P. (4) 4. 619.

**2328.** *G. Ciamician* e *P. Silber.* Azioni chimiche della luce. M.I.B. (6) 1.

**2329.** *M. Wildermann.* Über die chemische Dynamik und über das chemische Gleichgewicht unter dem Einflusse von Licht. Z.P.C. 41. 87.

**2330.** *M. Wildermann.* Über chemische Dynamik und Statik unter dem Einfluß des Lichtes. Z.P.C. 42. 257.

**2331.** *E. Goldberg.* Beitrag zur Kinetik photochemischer Reaktionen. Z.P.C. 41. 1.

**2332.** *R. Luther* und *F. Weigert.* Über umkehrbare photochemische Reaktionen im homogenen System I. S.A.B. 1904. 828.

**2333.** *F. Weigert.* Über umkehrbare photochemische Reaktionen im homogenen System. D.V.N. 76B. 103.

**2334.** *Berthelot.* Effets chimiques de la lumière: action de l'acide chlorhydrique sur le Pt et sur l'Au. A.C.P. (8) 3. 295.

**Thermochemie.**

**2335.** *Quartaroli.* Termochimica. A. U.T. 24.

**2336.** *K. von Wesendonk.* Über die thermodynamische Herleitung der physikalisch-chemischen Gleichgewichtsbedingungen. P.Z. 5. 521.

**2337.** *M. Planck.* Zur Thermodynamik und Dissoziationstheorie binärer Elektrolyte. Z.P.C. 41. 212.

**2338.** *C. J. Reed.* The thermochemistry of electrolytic dissociation. T. A.E.C. 5. 255.

**2339.** *J. Plotnikow.* Über die Beziehung zwischen der logarithmischen Temperaturkonstante und der Wärmetönung. Z.E. 11. 389; 434.

**2340.** *D. Tommasi.* The transformation of thermochemical energy into voltaic energy or electromotive force. C.N. 90. 41.

**2341.** *G. Bredig.* Adiabatische Reaktionsgeschwindigkeit chemischer Systeme. D.V.N. 76B. 96; P.Z. 5. 698.

**2342.** *F. Auerbach.* Reaktionsgeschwindigkeit und Temperatur. Z.E. 11. 296.

**2343.** *F. Auerbach.* Reaktionsgeschwindigkeit, Gleichgewicht und Temperatur. Z.E. 11. 433.

**2344.** *M. Cantor.* Über das mechanische Äquivalent chemischer Reaktionen und die Arbeitsleistung von Wärmemotoren. P.Z. 5. 379.

**2345.** *C. Kullgren.* Die Änderung der Inversionsgeschwindigkeit mit der Temperatur. Z.P.C. 43. 701.

**2846.** *C. Puschl.* Über das Gesetz von Dulong und Petit. S.A.W. 112. 1230.

**2847.** *T. W. Richards.* Die Beziehung zwischen Änderung der Wärmekapazität und Änderungen der freien Energie, Reaktionswärme, Volumänderung und chemischer Affinität. Z.P.C. 42. 129.

**2848.** *J. M. Bell.* Free energy and heat capacity. J.P.C. 9. 381.

**2849.** *H. von Jüptner.* Zur Kenntnis der freien Bildungsenergien. Z.A.C. 42. 235.

**2850.** *R. Liouville.* Sur la relation qui existe entre la vitesse de combustion des poudres et la pression. C.R. 140. 1089.

**2851.** *A. Bouzat.* Courbes de pression des systèmes univariants qui comprennent une phase gazeuze. A.C.P. (8) 4. 145.

**2852.** *E. Ariès.* Sur les formules de la tonométrie et de la cryoscopie. C. R. 139. 462.

**2853.** *J. E. Trevor.* On certain heats of dilution. J.P.C. 9. 90.

**2854.** *R. Wegscheider.* Lösungs- und Verdünnungswärmen. M.C.W. 26. 647; A.A.W. 1905. 128.

**2855.** *E. von Stackelberg.* Die Methoden zur Bestimmung der Lösungswärme beim Sättigungspunkt. Z.P.C. 41. 96.

**2856.** *A. Findlay.* Vorläufige Mitteilung über eine Methode zur Berechnung von Löslichkeiten und Gleichgewichtskonstanten chemischer Reaktionen und eine Formel für die latente Verdampfungswärme. Z.P.C. 41. 28; 42. 110.

**2857.** *G. Preuner.* Die Isotherme der Schwefeldissoziation bei 448°. Z.P.C. 44. 733.

**2858.** *V. Ssobolewa.* Über die Extrapolation des Schmelzpunktes für den chemisch homogenen Stoff aus Messungen an der Isobare der Volume in der Nähe des Schmelzpunktes. Z.P.C. 42. 75.

**2859.** *L. J. Henderson.* The laws of combustion of atoms and molecules. J.P.C. 9. 49.

**2860.** *R. Hollmann.* Physikalisches und natürliches Gleichgewicht zwischen den Modifikationen des Acetaldehyds I. Z.P.C. 43. 129.

**2861.** *H. Kühl.* Beiträge zur Kinetik des Kohlenoxydknallgases. Z.P.C. 44. 385.

**2862.** *P. Lemoult.* Relations générales entre la chaleur de combustion des composés organiques et leur formule de constitution. Calcul des chaleurs de combustion. A.C.P. (8) 5. 5.

Siehe auch 1201; 2679; 3805; 3814; 3846; 3851; 3883; 3904.

## Elektrochemie.

**2863.** *G. Carrara.* Teorie nuove e applicazioni recenti nel campo dell' elettrochimica. A.S.C.M. 11.

**2864.** *K. Elbs.* Über die stereochemische Hinderung bei elektrochemischen Reaktionen. Z.E. 10. 579.

**2865.** *J. Perrin.* Mécanique d'électrisation de contact et solutions colloidales. J.C.P. 2. 601; 3. 50.

**2866.** *C. J. Reed.* Molecular conductivity. T.A.E.S. 5. 103.

**2867.** *R. Ruß.* Über Reaktionsbeschleunigungen und -hemmungen bei elektrischen Reduktionen und Oxydationen. Z.P.C. 44. 641.

**2868.** *R. Abegg.* Elektrodenvorgänge und Potentialbildung bei minimalen Jonenkonzentrationen. Z.E. 10. 607.

**2869.** *O. Nagel.* Structure and tension. E.I. 2. 97.

**2870.** *E. Bloch.* L'ionisation par le phosphore et par les actions chimiques. J.P. (4) 3 913.

**2871.** *G. W. van Dijk.* Détermination de l'équivalent électrochimique de l'argent. A.N. (2) 9. 442.

**2872.** *F. Haber.* Eine Bemerkung über die Amalgampotentiale und über die Einatomigkeit in Hg gelöster Metalle. Z.P.C. 41. 399.

**2873.** *G. Preuner.* Über die Dissoziationskonstante des Wassers und die elektromotorische Kraft der Knallgaskette. Z.P.C. 42. 50.

**2874.** *H. E. Medway.* Material und Form der rotierenden Kathode. Z.A.C. 42. 110; 114.

Siehe auch 3151.

## Elektrolyse.

**2875.** *C. Fredenhagen.* Grundlagen einer allgemeinen Theorie der elektrolytischen Lösungstensionen einzelner Stoffe gegen beliebige Lösungsmittel. Z.E. 11. 496.

**2876.** *C. Fredenhagen.* Entwurf einer allgemeinen Theorie elektrolytischer Lösungskonstanten und Spannungsreihen, sowie der Löslichkeit und Dissoziation von Säuren und Basen. A.P.L. (4) 17. 285.

**2877.** *L. Kahlenberg.* Recent investigations bearing on the theory of electrolytic dissociation. T.F.S. 1. 42.

**2878.** *R. Mewes.* Einige Bemerkungen über den 2. Hauptsatz mit besonderer Berücksichtigung seiner Beziehungen zur Theorie der Elektrolyse. E.C.Z. 12. 74.

**2879.** *W. Moldenhauer.* Beziehungen zwischen elektrolytischen Vorgängen und der Elektrodentemperatur. Z.E. 11. 307.

**2880.** *A. Brochet* et *J. Petit.* Contribution à l'étude de l'électrolyse par courant alternatif. A.C.P. (8) 3. 433; 5. 387.

**2881.** *A. Brochet* et *J. Petit.* Elektrolyse mit Wechselstrom. Z.E. 11. 102.

**2882.** *A. Brochet* et *J. Petit.* Beiträge zu unsern Kenntnissen über die Elektrolyse mit Wechselströmen. Z.E. 10. 909; 11. 445.

**2883.** *N. N.* Der Einfluß der Stromdichte auf Wechselstromelektrolyse. E. Z. 11. 149.

**2884.** *T. Godlewski.* Sur la dissociation des électrolytes dans les solutions alcooliques. J.C.P. 3. 393.

**2885.** *L. Kahlenberg.* Recent investigations bearing on the theory of electrolytic dissociation. P.M. (6) 9. 214.

**2886.** *C. Liebenow.* Zur Frage der Dissoziation der Elektrolyte. Z.E. 11. 301.

**2887.** *R. Drucker.* Die Dissoziationsverhältnisse ternärer Elektrolyte. Z.E. 11. 211. — *G. Kümmel.* 341..

**2888.** *W. Biernacki.* Zwierciadelka żelazne otrzymane przez rozpylanie żelaza prądem. (Über die Eisenspiegel, welche bei der galvanischen Zerstäubung des Eisens entstehen.) T.W. 16. 133.

**2889.** *S. R. Cook.* On the theory of the electrolytic rectifier. P.R 20. 312.

**2890.** *W. Nernst* und *F. von Lerch.* Über die Verwendung des elektrolytischen Detektors in der Brückenkombination. N.G.G. 1904. 166.

**2891.** *Y. Osaka.* On the equilibrium of the electrolytic dissociation of partially neutralised acids and bases. M.C. K. 1. 103.

**2892.** *A. Nodon.* Recherches expérimentales sur les clapets électrolytiques. A.T. (2) 6. 145.

Siehe auch 632; 1491; 1620; 2337; 2338; 2680; 3101; 3219.

### Mathematische Biologie.

**2893.** *J. J. Deschamps.* Principes de la biologie rationelle. S.P. (9) 4. 127.

**2894.** *C. Henry.* Sur une méthode de décomposition des ensembles statistiques complexes en ensembles irréducibles. C. R. 139. 1033.

**2895.** *C. Henry* et *L. Bastian.* Sur la croissance de l'homme et sur la croissance des êtres vivants en général. C.R. 139. 811.

**2896.** *M. Stefanouska.* Sur la loi de variation de poids du pencillium glaucum en fonction de l'âge. C.R. 139. 879.

### Mathematische Physiologie.

**2897.** *I. Joteyko.* Sur les modifications des constantes ergographiques dans les diverses conditions expérimentales. C. R. 138. 1292.

**2898.** *C. Henry.* Sur les lois des travaux dits statiques du muscle. C.R. 138. 1731.

**2899.** *C. Henry.* Sur la mesure de l'énergie disponible par un dynamomètre totaliseur enrégistreur. C.R. 140. 809.

**2400.** *N. N.* Sur la mesure et sur les lois des variations de l'énergie disponible à l'ergographe suivant la fréquence des contractions et le poids soulevé C.R. 139. 876.

Siehe auch 908; 2555; 3868.

### Mathematische Botanik.

Siehe 86; 89.

### Technische Mechanik.

**2401.** *A. Sommerfeld.* The scientific methods and aims of modern applied mechanics. M.G,S. 3. 26.

**2402.** *C. A. Waldo.* The relation of mathematics to engineering. N. 69. 500.

**2403.** *P. Fournel.* Procédé de tractions des fils métalliques. J.P. (4) 4. 26.

Siehe auch 2727; 2747; 2794; 2813; 2814; 3566; 3688.

### Stäbe.

Siehe 2901; 2902; 3707; 3736.

### Balken.

**2404.** *M. Greco.* Sul calcolo della sezione e delle armature di una trave in cemento armato sottoposta a flessione retta semplice. A.A.T. 40. 395; 507.

**2405.** *Levi.* Travi soggette a flessione semplice. R.A.G. 1904. Mai.

Siehe auch 2823; 2824; 2826; 2834; 2839; 2843; 2855; 2885; 2907; 3282; 3299; 3305; 3326; 3750; 3753.

### Träger.

**2406.** *A. Kherndl.* Beiträge zur graphischen Theorie der Gelenkträger mit

statisch unbestimmten Auflagerdrücken. (ung.) M.T.E. 22. 61.

Siehe auch 2820; 2846; 2850; 2861; 2881; 2882; 2890; 2894; 2897; 2903; 3267; 3304; 3342; 3694; 3696; 3704; 3709; 3737; 3747; 3752; 3755; 3758.

### Bogenträger.

**2407.** *J. Šolín.* Neue Konstruktion der Kämpferdrucklinie eines vollwandigen Bogenträgers mit 2 Gelenken (tschech.). M.A.T.P. 1903. Nr. 3.

Siehe auch 2837; 2838; 3738; 3739; 3749.

### Bogen und Gewölbe.

**2408.** *Pigeaud.* Sur le calcul des arcs encastrés. C.R. 140. 774.

**2409.** *Belzecki.* Sur l'equilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. C.R. 140. 1060.

Siehe auch 840; 2819; 2830; 2872; 2879; 2883; 2892; 3268; 3284; 3294; 3302; 3477; 3683; 3684; 3689; 3702; 3724; 3728; 3731; 3732; 3735; 3740; 3744.

### Erdbau.

Siehe 3483.

### Festungsbau.

Siehe 2822.

### Tunnelbau.

Siehe 2674; 3234; 3256; 3295.

### Straßenbau.

**2410.** *Gamann.* Berechnung der Lichtweite eines Straßendurchlasses. R.T. 1904. 168.

Siehe auch 2139; 2768; 2821; 3255; 3348.

### Brückenbau.

**2411.** *Considère.* Calcul des ponts en arc et des ponts suspendus. C.R. 140. 202.

Siehe auch 2827; 2847; 2864; 2865; 2891; 2900; 2908; 2909; 3249; 3296; 3304; 3458; 3682; 3686; 3687; 3690; 3700; 3701; 3712; 3719; 3720; 3722; 3726; 3754.

### Baustatik.

**2412.** *A. G. M. Mitchell.* The limits of economy of material in frame-structures. P.M. (6) 8. 589.

**2413.** *de Montesnes de Ballore.* L'art de construire dans les pays à tremblements de terre. B.G. 7. 137.

Siehe auch 834; 845; 2833; 2856; 2896; 3258; 3307; 3328; 3489; 3714; 3717.

### Baumaterialien.

**2414.** *A. T. Pizarro.* Argamasas, Morteros ó mezclas. M.y R.M. 19. 289.

Siehe auch 2844; 2862; 2913; 3252; 3270; 3271; 3275; 3276; 3278; 3291; 3300; 3306; 3313; 3339; 3340; 3836.

### Fahrzeuge.

**2415.** *G. Marié.* Oscillation des véhicules de chemin de fer sur leurs ressorts de suspension. C.R. 140. 637.

**2416.** *G. Marié.* Oscillations des véhicules de chemin de fer à l'entrée en courbe et à la sortie. C.R. 140. 1222.

**2417.** *G. Marié.* Oscillations des locomotives sous l'action de diverses forces perturbatrices. C.R. 140. 1435.

**2418.** *F. Kötter.* Die Kreiselwirkung der Räderpaare bei regelmäßiger Bewegung des Wagens in kreisförmigen Bahnen. S.M.B. 1904. 36.

**2419.** *A. Petot.* Sur le mode de fonctionnement du différentiel des automobiles. C.R. 140. 497.

Siehe auch 2706; 2713; 2752; 2779; 3215.

### Fahrrad.

**2420.** *O. E. Glenn.* Motion of a bicycle on a helix track. P.I.A.S. 1902. 75.

### Eisenbahnwesen.

**2421.** *P. Appell.* Machine à déterminer les balourds. J.E.P. (2) 9. 151.

Siehe auch 2415; 2416; 2657; 2674; 2686; 2696; 2700; 2703; 2707; 2720; 2725; 2729; 2742—45; 2749; 2754; 2765; 2775; 2776; 2781—83; 2789; 2811; 2836; 2876; 3488; 3671; 3676; 3678; 3730; 3746; 3751.

### Lokomotiven.

Siehe 2417; 2691; 2696; 2704; 2708; 2716—19; 2724; 2731; 2732; 2734; 2761; 2769; 2790; 2802; 2858; 3251; 3681; 3790; 3794; 3884—86; 3906.

### Maschinenlehre.

**2422.** *A. Emch.* Theory of compound curves in field engineering. C.C.S. 2. 135.

**2423.** *F. J. Vaes.* Krukbeweging. N.A.W. (2) 6. 387.
**2424.** *M. Brillouin.* Indétermination de la trajectoire limite des planeurs rigides. C.R. 140. 570.
**2425.** *L. Illmer.* A proposed modification of the perfect heat-engine formula. J.F.I. 158. 367.
**2426.** *E. Meyer.* Die Bedeutung der Verbrennungskraftmaschinen für die Erzeugung motorischer Kraft. D.V.N. 76. A. 54.

Siehe auch 1246; 2344; 2477; 2618; 2619; 2687; 2699; 2702; 2715; 2722; 2738; 2771; 2778; 2810; 2812; 2815—17; 3274; 3564; 3590; 3795; 3796; 3804; 3806; 3817; 3842; 3869; 3879; 3904.

### Maschinenelemente.

Siehe 2688; 2698; 2701; 2709; 2723; 2736; 2753; 2758b; 2760; 2770; 2772; 2780; 2788; 2792; 2807; 2808; 2825; 2848; 3524; 3565.

### Dampfkessel.

**2427.** *P. Fuchs.* Der Wärmeübergang und seine Verschiedenheiten innerhalb einer Dampfkesselheizfläche. M.F.I. 22. 59.
**2428.** *L. Lecornu.* Sur les explosions des chaudières. C.R. 139. 724.

Siehe auch 2528; 3281; 3285; 3343—45; 3789; 3821; 3828; 3837; 3902; 3903.

### Dampfmaschinen.

**2429.** *V. Grasioli.* Delle macchine a vapore compound. R.F.M. 51. 213.

Siehe auch 2609; 2615; 2630; 2631; 2644; 2726; 2869; 3035; 3061; 3277; 3441; 3787; 3792; 3793; 3802; 3827; 3840; 3842; 3856; 3858; 3859; 3861; 3866; 3881; 3882; 3900; 3901.

### Schiffsmaschinen.

Siehe 2682; 3390; 3429; 3431; 3432; 3473.

### Steuerungen.

Siehe 2738; 3825.

### Indikatoren.

Siehe 2761; 2795; 3570; 3880.

### Regulatoren.

Siehe 2712; 2740; 2757; 3008; 3059; 3140.

### Gasmaschinen.

**2430.** *K. Schreber.* Zur Theorie der Turbinengasmaschinen. Z.G.T. 1. 177.

Siehe auch 2608; 2635—38; 2645; 2759; 2763; 3515; 3791; 3830; 3842; 3870; 3893; 3901.

### Hydraulik.

**2431.** *E. Fontaneau.* Préliminaires d'hydraulique. A.F. 1903. 32; 1904. 1.
**2432.** *A. Ciappi.* Utilizacion de las fuerzas hidráulicas. A.S.A. 57. 203.
**2433.** *H. Bellet.* Nouveau mode d'application du tube de Pitot-Darcy à la mesure de la vitesse des conduites d'eau sous pression. C.R. 140. 1531.
**2434.** *E. Maillet.* Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les souterrains perméables, spongieux et fissurés. S.M. 33. 2.
**2435.** *Lauda.* Der normal- und schiefgestellte hydrometrische Flügel. Ö.W.Ö.B. 1903. 598; 615.
**2436.** *E. Maillet.* Sur la vidange des systèmes de reservoirs. C.R. 140. 712.

Siehe auch 1426; 3365; 3367; 3405; 3412—14; 3439; 3449; 3460; 3467; 3468; 3865.

### Hydraulische Presse.

Siehe 3434.

### Hydraulische Hebemaschine.

Siehe 3407; 3410; 3466.

### Wassermotoren.

Siehe 3371; 3450.

### Hydraulische Schnecke.

Siehe 598.

### Wasserleitung.

Siehe 3419; 3426; 3536.

### Wasserbau.

**2437.** *C. Wauters.* El dique de embalse del Cadillal. A.S.A. 57. 49; 113; 241; 305.

Siehe auch 2912; 3279; 3288; 3362; 3375; 3382; 3383; 3387; 3398; 3407; 3414; 3420; 3425; 3430; 3437; 3444; 3458; 3463; 3464; 3471.

### Wehre.

Siehe 3416; 3452.

### Wasserräder.

Siehe 3395; 3397; 3400.

### Turbinen.

**2438.** *J. Benetti.* Teoria fondamentale delle turbine idrauliche. M.I.B. (5) 10. 149.

**2439.** *J. Benetti.* Alcune nuove equazioni per la teoria generale delle turbine idrauliche motrici od operatrici. M.I.B. (5) 10. 479; R.I.B. (2) 7. 126.

**2440.** *J. Benetti.* I principi scientifici per le turbine a vapore. M.I.B. (6) 1 179; R.I.B. (2) 8. 75.

**2441.** *H. Lorenz.* Die Wasserströmung in rotierenden Kanälen. P.Z. 6. 82; 206.

Siehe auch 599; 2608; 2609; 2612; 2615; 2630; 2631; 2635—38; 2644; 2645; 2689; 2764; 3361; 3368; 3374; 3378; 3384; 3441; 3442; 3457; 3470; 3787; 3792; 3793; 3827; 3840; 3856; 3859, 3881; 3882.

### Kanalbau.

Siehe 3391; 3408; 3415; 3424; 3453; 3459.

### Schiffsbau.

Siehe 2793; 2829; 2898; 3257; 3324; 3337; 3366; 3409; 3443; 3461; 3462; 3584.

### Schiffsbewegung.

**2442.** *L. E. Berton.* Position d'équilibre des navires sur la houle. S.N.C. (4) 1. 1.

**2443.** *G. A. Crocco.* Su un modo di ottenere la verticale a bordo delle navi. N.C.P. (5) 9. 224.

**2444.** *Fournier.* Résistance de l'eau à la translation des navires. Carènes de moindre résistances. C.R. 140. 48.

**2445.** *E. Bertin.* Sur la giration des navires. C.R. 140. 337.

**2446.** *Fournier.* Critérium des navires à grandes vitesses. C.R. 139. 964.

Siehe auch 607; 2755; 2756; 3265; 3373; 3382; 3385; 3390; 3399; 3429; 3433; 3435; 3451; 3455; 3472.

### Pumpen.

Siehe 2606; 2695; 3369; 3370; 3394; 3417.

### Ventilation.

Siehe 2626; 2627; 2639; 2646; 3875.

### Luftschiffahrt.

**2447.** *G. A. Crocco.* Sur la stabilité des dirigeables. C.R. 139. 1195.

**2448.** *G. A. Crocco.* Sulla stabilità dei dirigibili. R.A.L.R. 13 B. 427.

**2449.** *C. Renard.* Ballons dirigeables. Stabilité longitudinale. C.R. 139. 183.

**2450.** *L. Torres.* Sur la stabilité longitudinale des ballons dirigeables. C.R. 140. 1019.

**2451.** *P. Renard.* Sur la mesure indirecte, de la vitesse propre des navires aériens. C.R. 139. 353.

**2452.** *C. Renard.* Sur la vitesse critique des ballons dirigeables. C.R. 138 1405.

**2453.** *C. Renard.* Sur l'empennage des carènes des ballons dirigeables. C.R. 138. 1576.

**2454.** *E. Taffoureau.* Sur les hélices sustentatrices. C.R. 139. 356.

**2455.** *C. Rénard.* Sur un nouveau mode de construction des hélices aériennes. C.R. 139. 721.

Siehe auch 290; 662; 665; 669; 2044; 2617; 2651; 2654; 2805.

### Beleuchtung.

Siehe 3607; 3609; 3615; 3629; 3630; 3650; 3651; 3867.

### Photographie.

**2456.** *J. Thovert.* Sur la profondeur de champ et de foyer des objectives photographiques. C.R. 139. 500.

**2457.** *J. Precht* und *E. Stenger.* Untersuchungen über die Grundlagen der Dreifarbenphotographie. P.Z. 6. 329.

Siehe auch 1055; 1092; 2569; 3622.

### Spektralanalyse.

**2458.** *R. A. Houstoun.* Some spectroscopic notes. P.M. (6) 7. 456.

**2459.** *P. M. Corbino.* Sull' osservazione spettroscopica della luce di intensità periodicamente variabile. R.A.L.R. (5) 14 A. 332.

**2460.** *J. Barnes.* On the analysis of bright spectrum lines. P.M. (6) 7. 485.

**2461.** *J. E. Lilienfeld.* Über eine allgemeine und hervorragend empfindliche Methode zur spektralen qualitativen Elementaranalyse von Gasgemischen. A.P.L. (4) 16. 931.

Siehe auch 1048; 1056; 1172; 1173; 1176.

### Heizung.

Siehe 3454; 3814; 3823; 3862; 3867; 3871; 3874; 3876; 3890.

**Beleuchtung.**

**2462.** *M. F. Alvarez.* Estudio sobre luces y vistas en las habitaciones y altura de estas en calles y patios. M.y R.M. 20. 291.

**Elektrotechnik.**

Siehe 2711; 2737; 3053; 3137; 3194; 3562; 3605; 3889.

**Elektrische Leitungen.**

Siehe 2917; 2938; 2981; 2982; 2984; 2997; 2998; 3005; 3022; 3061; 3067; 3081; 3083; 3107—10; 3158; 3167; 3186; 3188; 3189; 3207; 3218; 3599.

**Elektrische Kraftübertragungen.**

Siehe 2758 a; 3040; 3058; 3059; 3091.

**Elektrische Eisenbahnen.**

Siehe 2798; 2800; 2934; 2965; 2985; 2994; 3093; 3103; 3182; 3210.

**Dynamomaschinen.**

**2463.** *Caldarera.* Generatrici asincrone R.A.G. 1903. Dez.

**2464.** *Steinmann.* Détermination rapide de la force électromotrice et de la résistance électrique d'un générateur électrique. V.S.N.G. 87. 76.

**2465.** *D. J. Puljuj.* Krugova diagrama generatoriv dlja pereminiich prudiv. (Über das Kreisdiagramm der Wechselstromgeneratoren.) R.S.M. 10. No. 2.

Siehe auch 2690; 2784; 2799; 2842; 2875; 2926; 2927; 2935; 2943; 2956; 2958; 2959; 2961; 2966; 2972; 2976; 2999; 3012; 3029; 3035; 3036; 3039; 3075; 3088; 3094; 3096; 3097; 3111; 3117; 3121; 3122; 3140; 3148; 3150; 3160; 3162; 3169; 3178; 3200; 3202; 6212; 3220.

**Elektromotore.**

**2466.** *J. K. Sumec.* Der einphasige Induktionsmotor. A.Gr. (3) 8. 306.

Siehe auch 2693; 2695; 2697; 2705; 2748; 2751; 2804; 2916; 2928; 2936; 2941; 2942; 2945—47; 2949; 2950; 2955; 2968; 2979; 2986; 2995; 3009; 3011; 3022—24; 3030—32; 3069—75; 3078; 3100; 3113—16; 3118; 3129—33, 3140; 3154; 3155; 3159; 3190—93; 3199; 3204; 3214; 3221; 3545; 3546; 3551; 3677.

**Elektrische Beleuchtung**

**2467.** *W. Voege.* Untersuchungen über die Strahlungseigenschaft der neueren Glühlampen. J.H.W.A. 21.

Siehe auch 1410; 1411; 2521; 3087; 3157; 3608; 3613; 3646.

**Telephon.**

**2468.** *S. Petéra.* O Pupinově telefoni. (Über Pupins Telephonie.) C. 34. 301.

Siehe auch 1525; 1626; 1627; 2914; 2974; 2975; 2978; 3028; 3205; 3222; 3245.

**Telegraphenwesen.**

Siehe 3062,

**Drahtlose Telegraphie.**

**2469.** *J. Zenneck.* Theorie und Praxis in der drahtlosen Telegraphie. P.Z. 5. 586; 6. 196. — *E. F. Huth* 378.

**2470.** *F. Pietsch.* O systémech telegrafie bez drátu před Marconim. (Über Systeme drahtloser Telegraphie nach Marconi.) C. 34. 72.

**2471.** *G. Seibt.* Über den Zusammenhang zwischen dem direkt und dem induktiv gekoppelten Sendersystem für drahtlose Telegraphie. P.Z. 5. 452; 627. — *J. Zenneck* 575; 811.

**2472.** *T. Mizuno.* On the Filings coherer and wireless telegraphy M.G.K. 1. 28.

Siehe auch 1565; 2921; 2993; 3006; 3063—65; 3079; 3146; 3176; 3177; 3179; 3180; 3223; 3224.

**Kabel.**

**2473.** *Devaux-Charbonnel.* La capacité des longs câbles sousmarins. S.F.P. Nr. 225. 9.

Siehe auch 2918—20; 2948; 2973; 3000; 3001; 3004; 3041—43; 3045; 3056; 3057; 3081; 3084; 3142; 3197; 3211; 3217; 3290.

**Technologie.**

**2474.** *T. Oliver.* The diameters of twisted threads with an account of the history of the mathematical setting of cloths. P.R.S.E. 25 481.

Siehe auch 2663; 2710; 2714; 2735; 2774; 2803; 2809; 3347; 3516; 3565.

**Instrumentenkunde.**

**2475.** *G. Millochau.* Sur un nouveau système de micromètre. C.R. 139. 590.

**2476.** *G. Millochau.* Sur un nouveau micromètre. Historique de la question. C.R. 139. 665.

**2477.** *C. Renard.* Sur un nouvel appareil destiné à la mesure de la puissance des moteurs. C.R. 138. 1083.

Siehe auch 342; 343; 403; 404; 440; 597; 672; 2694; 2728; 2730; 2767; 2785; 2797; 2804; 2937; 3568; 3574; 3762.

### Fallmaschine.

**2478.** *Gieseler.* Apparat zur Messung der Fallzeit eines freifallenden Körpers. S.N.G.B. 1904. 38.

### Physikalische Instrumente.

**2479.** *Gieseler.* Apparat zur Bestimmung des mechanischen Äquivalents der Wärme. S.N.G.B. 1904. 49.

**2480.** *G. P. Grimaldi* e *A. Accolla.* Sopra un apparecchio per la misura di piccoli allungamenti. N.C.P. (2) 7. 222; B.G.C. 80. 32.

**2481.** *C. H. Brinkman.* De bepaling van den druk met een gesloten luchtmanometer. C.A.A. 12. 758.

**2482.** *A. E. H. Tutton.* Das Elasmometer, ein neuer Interferenz-Elastizitätsapparat. Z.K.M. 39. 321.

**2483.** *E. F. Coker.* A laboratory apparatus for applying bending and torsional moments simultaneously. T.C. R.S. (2) 9. 59.

Siehe auch 737; 3864.

### Wagen.

**2484.** *V. Crémieu.* Sensibilité de la balance azimutale. C.R. 138. 1090.

**2485.** *P. Johanneson.* Eine Radwage als schiefe Ebene. V.D.P.G. 7. 43.

Siehe auch 209; 3759.

### Wellenmaschinen.

**2486.** *F. J. Hillig.* Ein neuer sehr einfacher Wellenapparat. Z.P. 17. 829

**2487.** *A. Boltzmann.* Apparate von L. Boltzmann zur Demonstration stehender und interferierender Wellen. S.A.W. 113. 1509.

**2488.** *W. Schmidt.* Vorführung eines Apparats zur Demonstration stehender und interferierender Wellen. V.D.P.G. 6. 249; D.V.N. 76B. 39.

**2489.** *F. Ernecke.* Ein Wellenapparat zur Demonstration der Ätherschwingungen im polarisierten Licht. Z.P. 18. 126.

### Akustische Instrumente.

**2490.** *G. Laudet* et *L. Gaumont.* Sur un mégaphone. C.R. 141. 319.

Siehe auch 950; 957; 958.

### Optische Instrumente.

**2491.** *F. Koerber.* Die Entwicklung der achromatischen optischen Systeme. N.W. (2) 3. 72.

**2492.** *A. Turpain.* Sur une méthode propre à l'étude d'un phénomène lumineux d'intensité variable avec le temps. Application à la détermination de la vitesse instantanée d'un miroir tournant et à l'étude de l'étincelle de Hertz. C.R. 141. 422.

**2493.** *E. R. v. Nardroff.* A new interferometer method for measuring the refractive index of a transparent plate. A.A.N.Y. 15. 184.

**2494.** *W. Stahlberg.* Über den Zeißschen Veranten und die Möglichkeit des Räumlichsehens mit einem Auge. Z.P. 17. 270.

**2495.** *F. Kucharzewski.* Das Diopter des Heron und der Versuch seiner Rekonstruktion (poln.). W.M. 8. 63.

**2496.** *T. Thorp.* Solar eyepiece. E.M. W. 77. 372.

Siehe auch 664; 981; 996; 1003—05; 1013; 1034; 2456; 3603; 3617; 3619; 3624; 3631; 3635; 3641—43; 3647; 3653.

### Stereoskop.

**2497.** *J. Jastrow.* An overlooked form of stereoscope. S. (2) 20. 683.

**2498.** *J. Jastrow.* A new form of stereoscope. S. (2) 21. 668.

**2499.** *G. Jäger.* Stereoskopische Versuche. S.A.W. 113. 1353.

**2500.** *A. Schell.* Das Universalstereoskop. S.A.W. 112; 949; 113. 1009.

**2501.** *L. Pigeon.* Sur un stéréoscope dièdre à grand champ à miroir bissecteur. C.R. 141. 247.

**2502.** *W. Scheffer.* Über Beziehungen zwischen stereoskopischen Aufnahme- und Beobachtungsapparaten. P.Z. 5. 663.

**2503.** *A. Schell.* Konstruktion und Betrachtung stereoskopischer Halbbilder. S.A.W. 112. 1595.

**2504.** *P. Helbronner.* Sur la téléostéréoscope. C.R. 139. 967.

Siehe auch 281; 980; 1180; 2494; 3573.

### Mikroskop.

**2505.** *N. N.* Theories of the resolving power of a microscope. N. 69. 497.

**2506.** *A. Gleichen.* Die Vergrößerung des Mikroskops unter Berücksichtigung der Refraktion und Akkomodation des Auges. D.M. 12. 135; 147.

**2507.** *R. T. Glazebrook.* Note on the diffraction theory of the microscope as applied to the case when the object is in motion. P.P.S.L. 19. 157.

**2508.** *H. Ludendorff.* Über optische Distorsion in Meßmikroskopen. A.V.K. 166. 161.

**2509.** *H. C. Plummer.* Note on the optical distortion of the microscope on the Oxford machines for measuring astronomical photographes. M.N.A.S. 64. 640.

Siehe auch 1018; 3622; 3637; 3649.

### Spektroskop.

**2510.** *A. Schuster.* The optics of the spectroscope. A.J.C. 21. 197.

**2511.** *L. Prytz.* Optisk kontakt mellem et mikroskop og en spejlende flade. I. B.A.Co. 1905. 17.

Siehe auch 2566; 3618; 3627; 3628.

### Thermometer.

**2512.** *F. Burckhardt.* Zur Geschichte des Thermometers. V.N.B. 16. 1.

**2513.** *M. H. Palomaa.* Über einen neuen Kontaktthermometer. B.F.F.44.189.

**2514.** *J. A. Groshans.* Absoluter Nullpunkt des hundertteiligen Thermometers. Z.P.C. 42. 626.

**2515.** *L. Marchis.* Sur le déplacement du zéro des thermomètres. M.S.B. (6) 3. 217.

**2516.** *J. Maurer.* Experimentelle Untersuchungen über das Verhalten des Trägheitskoeffizienten der ventilierten Thermometer unter variablem Druck des aspirierenden Mediums. M.Z. 21. 489; B.P.A. 1. 55.

**2517.** *C. Féry.* Thermomètre intégrateur. C.R. 140. 367.

**2518.** *H. Edwards.* A manometer device for air thermometers. P.A.Bo. 40. 541.

**2519.** *C. W. Waidner* and *L. A. Fischer.* The testing of clinical thermometers. B.B.S.W. 1. 275.

Siehe auch 2683; 3863.

### Pyrometer.

**2520.** *C. W. Waidner* and *G. K. Burgers.* Optical pyrometry. B.B.S.W. 1. 189.

Siehe auch 3822; 3873.

### Elektrische Instrumente.

**2521.** *G. W. Pierce.* Über die Cooper-Hewittsche Hg-Bogenlampe als Funkenstrecke. P.Z. 5. 426.

**2522.** *J. Novi.* Un nuovo apparecchio che segna le frazioni di secondo fino al centesimo e i multipli fino al terzo secondo e contemporaneamente permette di regolare a volontà la durata di un contatto elettrico. M.I.B. (5) 9. 457.

**2523.** *R. Weber.* Appareil montrant les modifications du courant alternatif. B.S.V. 30. 368.

**2524.** *K. R. Johnson.* Sur un interupteur à vapeur. C.R. 139. 477.

**2525.** *M. Dieckmann.* Über den Schlömilch-Wellendetektor. P.Z. 5. 529.

**2526.** *F. Hodson.* Resonanzversuche über das Verhalten eines einfachen Koherers. A.P.L. (4) 14. 973.

Siehe auch 1513; 1558; 2924; 2940; 3046; 3102; 3104; 3216; 3225.

### Elektrisiermaschinen.

**2527.** *W. Holtz.* Meine erste Influenzmaschine und eine ähnliche Vorlesungsmaschine zur Erläuterung der Theorie. Z.P. 18. 140.

**2528.** *V. Schaffers.* Nouvelle théorie des machines à influence. A.S.B. 29 B. 1.

Siehe auch 1436; 1547.

### Geißlersche Röhren.

**2529.** *E. Riecke.* Über Evakuation Geißlerscher Röhren durch den elektrischen Strom. A.P.L. (4) 15. 1003.

**2530.** *E. Riecke.* Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geißlerschen Röhren. A.P.L. (4) 16. 282.

Siehe auch 1158.

### Galvanische Elemente.

**2531.** *A. Denizot.* Beitrag zur Theorie der umkehrbaren galvanischen Elemente. (poln.) W.M. 8. 47.

**2532.** *W. Jaeger.* Die Polarisation galvanischer Elemente bei Gegenwart von festem Salz. A.P.L. (4) 14. 726.

Siehe auch 2373; 3152; 3161; 3563.

### Galvanische Batterien.

Siehe 3124.

### Transformatoren.

**2533.** *A. Trowbridge.* On the differential transformer. P.R. 20. 65.

**2534.** *G. Grassi.* Effetti della dispersione e della reattanza nel funzionamento dei trasformatori. Metodi di misura ed applicazioni. M. A. T. (2) 53. 47.

**2535.** *Dina.* Transformatori ad alta tensione. Pol. M. 1904. Febr.—März.

**2536.** *T R. Lyle.* The alternate current transformer. P. R. S. V. 17. 1.

**2537.** *E. Henderson.* Alternators in parallel. P. M. (6) 9. 309.

**2538.** *P. Drude.* Rationelle Konstruktion von Teslatransformatoren. A. P. L. (4) 16. 116.

Siehe auch 2750; 2944; 2954; 2960; 2962; 2964; 2988; 3015; 3016; 3026; 3027; 3037; 3038; 3040; 3054; 3060; 3082; 3089; 3092; 3112; 3138; 3139; 3143; 3149; 3181; 3204; 3206; 3226—28.

### Akkumulatoren.

**2539.** *J. Pollak.* Theoretisches Arbeitsdiagramm einer Akkumulatorenbatterie. Z. P. 18. 211.

Siehe auch 2929; 3055; 3076; 3077; 3134; 3172.

### Kompaß.

**2540.** *H. Meldau.* Die Anfänge der Theorie des Schiffsmagnetismus. A. H. 33. 410.

**2541.** *F. Lauffer.* Die Deviation und und deren Kompensation. A. H. 33. 66.

**2542.** *K. Koldewey.* Über die Anwendung der Flinderstangen bei der Kompensation der Kompasse. A. H. 33. 122.

**2543.** *H. Meldau.* Zur Theorie der Quadrantalkugeln. A. H. 33. 171.

Siehe auch 2049.

### Elektrische Meßinstrumente.

**2544.** *A. Boltzmann.* Über das Exnersche Elektroskop. A. A. W. 1904. 410.

**2545.** *K. E. Guthe.* A study of the silver voltmeter. B. B. S. W. 1. 21.

**2546.** *H. C. Snook.* An Amperemeter for high potential currents. J. F. I. 159. 191.

**2547.** *V. Arcioni.* A. A. E. I. 9. 120.

**2548.** *W. Mc Clellan.* On the use of the falling plate oscillograph as a phase meter. P. P. S. 44. 166.

Siehe auch 2915; 2925; 2931; 2932; 2939; 2953; 2969; 2970; 2980; 2996; 3010; 3051; 3090; 3166; 3168; 3179; 3187; 3229.

### Elektrometer.

**2549.** *Guinchant.* Électromètre à sextants et à aiguille neutre. C. R. 140. 851.

**2550.** *T. Tamaru.* Eine Beobachtungsmethode mit gedämpften Schwingungen bei fortrückender Ruhelage. P. Z. 6. 285.

**2551.** *A. Sprung.* Über eine automatisch wirkende Vorrichtung zur Erweiterung des Meßgebietes der Registrierelektrometer. M. Z. 21. 305.

**2552.** *H. Gerdien.* Ein Elektrometer zur Untersuchung radioaktiver Induktionen. P. Z. 6. 433.

Siehe auch 1440.

### Galvanometer.

**2553.** *M. Iklé.* Über die Bezeichnungsweise der Empfindlichkeit eines Galvanometers. P. Z. 6. 43.

**2554.** *P. H. Powell.* Consideration of some points in the design and working of ballistic galvanometers. R. B. A. 73. 570.

**2555.** *W. Einthoven.* De snaargalvanometer en het menschelijk electrocardiogram. C. A. A. 12. 122; 876.

Siehe auch 1623; 1714; 3033; 3047—49; 3145.

### Magnetometer.

**2556.** *F. Henning.* Beobachtungen mit astatischen Torsionsmagnetometern. A. P. L. (4) 15. 815.

Siehe auch 765; 1671; 2185.

### Astronomische Instrumente.

**2557.** *H. Renan.* Sur l'emploi des fils mobiles du micromètre d'un cercle méridien. B. A. 21. 253.

**2558.** *H. Grubb.* A new form of dipleidoscope. P. S. D. (2) 10. 141.

**2559.** *F. Nušl* und *J. J. Frič.* Über das Diazenital. A. N. K. 166. 225.

**2560.** *C. Chistoni.* Sul pireliometro a compensazione elettrica dell' Ångström. R. A. L. R. (5) 14 A. 340.

**2561.** *F. Faccin.* Nuovo planisfero. R. F. M. 6 A. 113.

**2562.** *G. Guglielmo.* Intorno ad alcuni semplici strumenti per l' esatta verificazione dell' ora. R. A. L. R. 13 B. 603; 14 A. 10.

Siehe auch 3612.

### Fernrohre.

**2563.** *J. Halm.* On astronomical seeing. P. R. S. E. 25. 458.

**2564.** *H. Grubb.* Floating refracting telescope. P. S. D. (2) 10. 138.

**2565.** *F. L. O. Wadsworth.* On the construction of telescopes whose relative

or absolute focal length shall be invariable at all temperatures. M.N.A.S. 63. 573; M.S.P.A.O. 16.

**2566.** *F. L. O. Wadsworth.* On the optical conditions required to secure maximum accuracy of measurement in the use of the telescope and spectroscope. A.J.C. 16. 267; 17. 1; 100; M.S.P.A.O. (2) 10.

**2567.** *J. Wilsing.* Über den Einfluß der sphärischen Abweichungen der Wellenfläche auf die Lichtstärke von Fernrohrobjektiven. P.A.O.P. 15. 4.

**2568.** *A. E. Conrady.* On the chromatic of object-glasses. M.N.A.S. 64. 182; 458.

**2569.** *A. Ricco.* Il grande obiettivo fotografico del R. osservatorio di Catania. B.G.C. 85. 2.

**2570.** *N. Jadanza.* Nuovo metodo per determinare il rapporto diastimometrico in un cannocchiale distanziometro. A. A.T. 40. 691.

Siehe auch 2504; 3616; 3623; 3637; 3652.

### Uhrmacherkunst.

**2571.** *E. Gerland.* Über die Erfindung der Pendeluhr. B.M. (3) 5. 234.

**2572.** *J. Andrade.* Recherches chronométriques. V.I.M.C. 3. 451.

**2573.** *J. Andrade.* La théorie de la synchronisation des horloges. A.S.G. (4) 17. 139.

**2574.** *E. Anding.* Zur Ausgleichung von Uhrgängen. A.N.K. 168. 357.

**2575.** *A. Wanach.* Über den Einfluß der Temperaturschichtung auf verschiedene Uhrenpendel. A.N.K. 166. 97.

Siehe auch 59; 2692.

### Geodätische Instrumente.

**2576.** *P. C. Sanchez.* Estudio sobre las cintas metalicas empleadas como longimetros en la medida de las bases geodesicas. M.y R.M. 13. 297.

**2577.** *Hoecken.* Zur Theorie des Winkelprismas. A.V.N. 1903. 201.

**2578.** *E. Morrone.* Algunas observaciones sobre las distancias determinadas mediante la estadia. A.S.A. 59. 124.

**2579.** *A. Petrelius.* Über die Veränderungen der Empfindlichkeit der Libellen. B.F.F. 44. 20.

**2580.** *Goedseels.* Sur le niveau à bulle. A.S.B. 28 A. 170.

**2581.** *C. Klein.* Über Theodolithgoniometer. S.A.B. 1905. 93.

**2582.** *T. Ferguson.* De pedograaf Ferguson, een automatisch toestel voor globale terreinopname. D.I.G. 18. 672.

**2583.** *T. Ferguson.* De cyclograaf Ferguson, een toestel voor automatische opname von een door een voertuig afgelegden weg. D.I.G. 18. 787; T.R.L. 20. 43.

**2584.** *H. Grubb.* A new circumferentor. P.S.D. (2) 10. 143.

Siehe auch 2144.

### Tachymeter.

**2585.** *Waue.* Flächen-Schnellmesser und -teiler A.V.N. 1904. 353.

**2586.** *H. Loeschner.* Nuovo modello di tacheometro. R.T.C. 16. 172.

**2587.** *C. Jorio.* Il tacheometro riduttore Charnot. R.T.C. 17. 141.

Siehe auch 3571; 3575—77; 3777.

### Theodolith.

Siehe 3571; 3654.

### Distanzmesser.

**2588.** *G. Poten.* Theoretische Betrachtung über Distanzmesser. Ö.Z.V. 1904. 286; 298.

**2589.** *Gemeiner.* Der Tangentialdistanzmesser und der Feldtachygraph für Gebietsvermessungen und Terrainaufnahmen von Ingenieur J. Steinbach und Mechaniker E. Schneider. M.A.G.S. 33. 312.

**2590.** *J. Kozák.* Zur Theorie der Küstendistanzmesser mit vertikaler Basis. M.A.G.S. 33. 237.

Siehe auch 3236; 3569; 3776.

### Geophysikalische Instrumente.

**2591.** *M. P. Rudzki.* Über die Bewegung des Horizontalpendels. B.G. 6. 138.

**2592.** *A. Schmidt.* Über die mit dem Trifilargravimeter zu lösenden Probleme. B.G. 5. 239.

**2593.** *K. Honda.* A portable aëromercurial tide-gauge. P.T.M. 2. 302.

**2594.** *K. Honda.* Ein tragbarer Gezeitenmesser mit Luft und Hg. P.Z. 6. 508.

**2595.** *Buchanan.* Sur un nouveau type de piézometre. C.R. 139. 538.

Siehe auch 3759.

### Seismometer.

**2596.** *F. Omori.* A duplex horizontal pendulum apparatus. P.T.M. 2. Nr. 8.

**2597.** *E. Wichert.* Ein astatisches Pendel hoher Empfindlichkeit zur mechanischen Registrierung von Erdbeben. B. G. 6. 435.

Siehe auch 2591.

### Variometer.

**2598.** *A. v. Büky.* Ein neues Vertikal-Intensitätsvariometer. P.Z. 6. 536.

### Meterologische Instrumente.

**2599.** *P. Vaudrey.* Sur les appareils indicateurs et enrégistreurs dans leurs applications aux sciences et à l'industrie. A.F. 1903. 220.

**2600.** *P. Langevin* et *M. Moulin.* Sur un enrégistreur des ions de l'atmosphère. C.R. 140. 305.

**2601.** *C. Nordmann.* Enrégistreur à écoulement liquide de l'ionisation athmosphérique. C.R. 140. 430.

**2602.** *H. Hergesell* und *E. Kleinschmidt.* Über die Kompensation von Aneroidbarometern gegen Temperatureinwirkungen. B.P.A. 1. 108.

Siehe auch 822.

### Hygrometer.

**2603.** *W. Krebs.* Verdunstungsmessungen mit dem Doppelthermometer für klimatologische und hydrographische Zwecke. M.Z. 22. 211.

**2604.** *Looser.* Ein neuer Apparat zur Bestimmung des Taupunktes. J.N.K. 1903—04. 52.

---

# Verzeichnis der in technischen Zeitschriften 1903—1904 sich vorfindenden mathematischen Abhandlungen.

Von Ernst Wölffing in Stuttgart.

## Abkürzungen:

**A.D.M.P,** Annales des Mines, Paris (10) 3—6.
**A.E.R.J.** American Engineer and Railroad Journal, New York 77—78.
**A.G.B.** Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Berlin 52 - 55.
**Am.M.** American Machinist, New York 1903—04.
**A.P.Ch.** Annales des Ponts et des Chaussées, Paris (8) 9—16.
**B.S.E.** Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale, Paris 104—105.
**C.B.B.** Zentralblatt der Bauverwaltung, Berlin 23—24.
**C.Z.O.M.** Zentralzeitung für Optik und Mechanik, Berlin 24—25.
**D.B.Z.** Deutsche Bauzeitung, Berlin 37 bis 38.
**D.M.Z.** Deutsche Mechanikerzeitung, Berlin 1903—1904.
**E.** The Engineer, London 95—98.
**E.E.** L'Éclairage Électrique, Paris 33—40.
**Eg.** Engineering, London 75—78.
**E.N.** Engineering News, New York 50; 52.
**E.W.** The Electric World, New York 41—42.
**E.Z.** Elektrotechnische Zeitschrift, Berlin 24—25.
**G.C.** Le Génie Civil, Paris 41; 43—46.
**G.I.** Gesundheitsingenieur, München 26 bis 27.
**J.G.** Journal des Géomètres, Paris 46—47.
**J.G.W.** Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Leipzig 46—47.
**J.S.G.B.** Jahrbuch der Schiffsbautechnischen Gesellschaft, Berlin 4—5.
**L.C.M.** La Construction Moderne, Paris 18—20.
**M.I.C.** Mémoires et Comptes Rendus de la Société des Ingénieurs Civils, Paris 56—57.
**M.P.I.** Mitteilungen aus der Preßluftindustrie, Weimar 1.
**M.P.I.C.E.** Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London 151—153.
**M.T.G.W.** Mitteilungen des Technologischen Gewerbemuseums, Wien (2) 13—14.
**M.Z.B.E.** Mitteilungen über Zement-, Beton- und Eisenbetonbau, Berlin 1.
**N.A.C.** Nouvelles Annales de la Construction, Paris (5) 10; (6) 1.
**O.F.E.** Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Wiesbaden (2) 40—41.
**P.E.M.** Portefeuille Économique des Machines, Paris (5) 2—3.

P.J. Polytechnisches Journal, Berlin 318 bis 319.
P.M.C. Der praktische Maschinenkonstrukteur, Leipzig 36—37.
R.D.M. Revue de Mécanique, Paris 14 bis 15.
R.G. Railroad Gazette, New York 53—54.
S.B. Schiffbau, Berlin 4—6.
S.B.Z. Schweizerische Bauzeitung, Zürich 41—44.
S.D.B. Süddeutsche Bauzeitung, München 13—14.
S.E.D. Stahl und Eisen, Düsseldorf 23 bis 24.
S.T.Z. Süddeutsche Technikerzeitung, München 2.
T. The Technologist, New York 8—9.
T.B. Technische Blätter, Prag 34—36.
T.E. The Electrician, London 50—52.
T.G. Technisches Gemeindeblatt, Berlin 6—7.
V.V.G. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Berlin 82—83.
W.A.B.Z. Wiener Allgemeine Bauzeitung, Wien 68—69.
W.B.S. Württembergische Bauzeitung, Stuttgart 1.
Z.A.I. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Hannover (2) 8—9.
Z.B.D. Zeitschrift des Bayrischen Dampfkesselrevisionsvereins, München 7—8.
Z.B.W. Zeitschrift für Bauwesen, Berlin 53—54.
Z.E.W. Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien 21—22.
Z.G. Zeitschrift für Gewässerkunde, Leipzig 5—6.
Z.G.K. Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie, München 10—11.
Z.G.T. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, Berlin 1.
Z.I. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin 23—24.
Z.K.F.G. Zeitschrift für komprimierte und flüssige Gase, Weimar 6—7.
Z.Ö.I.A.V. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins, Wien 55—56.
Z.V. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 32—33.
Z.V.D.I. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Berlin 47—48.
Z.W. Zeitschrift für Werkzeugmaschinen, Berlin 6—8.

### Abbildung.

**2605.** *C. Pulfrich.* Über eine neue Art der Herstellung topographischer Karten und über einen hiefür bestimmten Stereoplanigraphen. Z.J. 28. 133.

### Aerodynamik.

**2606.** *A. S. E. Ackermann.* Air lift pumps. Eg. 77. 502.

**2607.** *Barbet.* Sur les expériences de M. Canovetti relation à la résistence opposée par l'air aux corps en mouvement. B.S.E. 104. 166.

**2608.** *A. Barbesat.* La turbine à gaz et son rendement. S.B.Z. 44. 100.

**2609.** *W. Boveri.* Die Dampfturbinen und ihre Anwendung mit besonderer Berücksichtigung der Parsonsturbine. S.E.D. 24. 737.

**2610.** *E. R. Briggs.* The air buffer. Am.M. 1903. 616.

**2611.** *A. Budan.* Die mechanischen Grundgesetze der Flugtechnik. Z.Ö.I.A.V. 55. 539; 551.

**2612.** *K. Büchner.* Zur Frage der Lavalschen Turbinendüsen. Z.V.D.I. 48. 1029; 1097.

**2613.** *Claußen.* Die Größe des Winddrucks bei der Berechnung der Standsicherheit von Schornsteinen. A.G.B. 53. 139.

**2614.** *R. H. Collingham.* The air compressor. E. 97. 538; 627.

**2615.** *F. Foster.* The design of steam turbine discs. E. 97. 34. — *M. F. Fitz-Gerald* 481.

**2616.** *Geiger.* Über Exhaustoranlagen, insbesondere zur Beseitigung von Spänen und Staub. Z.V.D.I. 48. 1389.

**2617.** *F. Gerstner.* Über die Versuche zur Lösung des Problemes der Luftschiffahrt. Z.Ö.I.A.V. 55. 229.

**2618.** *W. Geutsch.* Die Windkraftmaschinen und ihre wirtschaftliche Bedeutung. V.V.G. 82. 353; 83. 1.

**2619.** *W. Geutsch.* Les moteurs à vent et leur importance au point de vue économique. B.S.E. 105. 283; 354; 479; 549; 610.

**2620.** *W. Gilbert.* Centrifugal fans. Eg. 76. 510.

**2621.** *Gostkowski.* Die Schwebearbeit in der Flugtechnik. Z.Ö.I.A.V. 56. 475. — *A. Budan* 476.

**2622.** *M. F. Gutermuth.* Versuche über den Ausfluß des Wasserdampfes. Z.V.D.I. 48. 75.

**2623.** *V. Hänisch.* Konstruktion zur Ermöglichung der intermittierenden Kraftausnützung bei Fortbewegung von Massen in elastischen Mitteln unter spezieller Berücksichtigung des dynamischen Fluges. Z.Ö.I.A.V. 56. 529.

2624. *C. Heinel.* Die Preßlufterzeugung. M.P.I, 1. 4; 12; 19; 33; 41.

2625. *C. Heinel.* Die Preßlufterzeugung. Z.K.F.G. 6. 8; 44; 74; 85.

2626. *R. Hofmann.* Überdrucklüftungsanlagen. G.I. 27. 529. — *E. Ritt* 577.

2627. *C. H. Innes.* Moderne Ventilatoren. P.M.C. 36. 23; 39; 48.

2628. *L. Klein.* Druckverluste in Gebläseventilen. Z.V.D.I. 48. 1731.

2629. *E. W. Koester.* Luftkompressoren. Z.V.D.I. 48. 109.

2630. *A. Koob.* Die Strömungserscheinungen in den Düsen der Dampfturbinen. Z.V.D.I. 48. 275. — *Prandtl* 348. — *R. Proell* 349.

2631. *A. Koob.* Die Berechnung der Dampfturbinen auf zeichnerischer Grundlage. Z.V.D.I. 48. 660; 754.

2632. *H. Lorenz.* Die stationäre Strömung von Gasen und Dämpfen durch Rohre von veränderlichem Querschnitt. Z.V.P.I. 47. 1600. — *A. Stodola* 1787.

2633. *A. Marx.* Über die Messung von Luftgeschwindigkeiten. G.I. 27. 369; 385; 420; 437.

2634. *K. Mattern.* Ermittlung des Gasverlustes im Straßenrohrnetz aus dem festgestellten Luftdruckverlust. J.G.W. 47. 419.

2635. *F. Meincke.* Über ein Verfahren zum Betrieb von Gasturbinen. P.J. 319. 637.

2636. *R. M. Neilson.* A scientific investigation into the possibilities of gas turbines. E. 98. 429.

2637. *R. M. Neilson.* A scientific investigation into the possibilities of gasturbines. Eg. 78. 590.

2638. *R. M. Neilson.* Les turbines à gaz. R.D.M. 15. 490.

2639. *R. V. Norris.* Recent tests of centrifugal mine ventilating fans. E.N. 52. 410.

2640. *W. Odell.* Preliminary experiments on air friction. Eg. 77. 30.

2641. *R. Pictet.* Die Theorie der Apparate zur Herstellung flüssiger Luft mit Entspannung. Z.K.F.G. 7. 1; 17; 37; 52.

2642. *R. Pictet.* Beitrag zur Kompression und der Entspannung von Gasen. Z.K.F.G. 7. 153; 176.

2643. *R. Proell.* Beitrag zur Theorie der stationären Strömung von Gasen und Dämpfen. Z.G.T. 1. 161.

2644. *A. Rateau.* Elementartheorie der Dampfturbinen in analytischer und graphischer Entwicklung. Z.G.T. 1. 17.

2645. *K. Schreber.* Zur Theorie der Turbinengasmaschinen. Z.G.T. 1. 177.

2646. *D. W. Taylor.* Some experiments with ventilating fans. E.N. 52. 387.

2647. *R. Threlfall.* The motion of gases in pipes and the use of gauges to determine the delivery. Eg. 77. 292; 310; 342.

2648. *R. Threlfall.* Mouvement des gaz dans les tuyaux, emploi des jauges pour sa détermination. R.D.M. 14. 362.

2649. *T. M.* Einflüsse beim Bewegen von Gasen in heißer Luft. G.I. 26. 517.

2650. *W. C. Unwin.* Die Bewegung von Gasen in Rohrleitungen und die Verteilung unter hohem Druck. J.G.W. 47. 1068.

2651. *Vallier.* Notes sur la dynamique de l'aéroplane. R.D.M. 15. 5; 101; 342.

2652. *Velde.* Verallgemeinerung der Poleschen Formel zur Ermittlung des Druckverlusts in Leitungen. J.G.W. 47. 898.

2653. *Wedemeyer.* Düsenquerschnitte der Kupolöfen. S.E.D. 24. 404.

2654. *N. N.* Mesure indirecte de la vitesse propre des navires aériens. G.C. 45. 251.

## Akustik.

2655. *P. Planat.* L'acoustique des salles publiques. L.C.M. 18. 289; 325.

## Arithmetik.

2656. *Bl.* Das Prämiensystem bei der Lohnzahlung. D.M.Z. 1903. 237.

2657. *Blum.* Reibungsbahnen und Bahnen gemischten Systems. Z.B.W. 53. 517; 661.

2658. *E. Kr.* Zur Tariffrage der Elektrizitätswerke. Z.E.W. 22. 571.

2659. *Gröhe.* Über den wirtschaftlichen Einfluß einer Verzögerung der Schiffahrt durch die Wartezeit an den Schleusen. Z.B.W. 54. 366.

2660. *H. Hess.* Premium plan applied in the drawing office. Am.M. 1903. 412.

2661. *F. Hoppe.* Zur Tariffrage der Elektrizitätswerke E.Z. 25. 733.

2662. *P. Lecler.* Étude de différents modes de rémunération du travail. P. E.M. (5) 2. 54; 74; 88.

2663. *P. Machavoine.* Considérations générales sur la préparation mécanique des minerais. M.I.C. 56 B. 135.

2664. *F. Pichler.* Die deutsche Arbeiterversicherung. T. 8. 193.

2665. *F. Preuss.* Das Prämiensystem der Arbeiterlöhnung. Z.V.D.I. 47. 172.

2666. *S. S. Récsei.* Über Kalkulationsmethoden im Maschinenbau. Z.Ö.I. A.V. 55. 421; 429.

2657. *S. S. Récsei.* Einige Erwägungen in der Frage der Selbstkostenbestimmung. Z.E.W. 22. 368.

**2668.** *B. Schiller.* Das Prämiensystem der Lohnberechnung. Z.V.D.I. 47. 1207.
**2669.** *B. Schiller.* A german view of the premium plan. Am.M. 1904. 246.
**2670.** *M. Schwabach.* Zur Tariffrage der Elektrizitätswerke. E.Z. 24. 495.
**2671.** *R. H. Smith.* The economics of electric tramways in Britain. E. 98. 461.
**2672.** *Strache.* Über Arbeitsausführung im steigenden Zeitlohn. Z.V.D.I. 48. 1825.
**2673.** *K. Wittgenstein.* Freihandel und Schutzzoll. Z.Ö.I.A.V. 55. 181.
**2674.** *N. N.* Chemin de fer de l'Engadine. Tunnel de l'Albula. G.C. 43. 188.

### Attraktion.

**2675.** *A. Haerpfer.* Notiz zur Bouguelschen Reduktionsformel. Z.V. 32. 449.

### Ballistik.

**2676.** *O. Kretschmer.* Gefechtswerte von Kriegsschiffen. S.B. 5. 869; 917; 973; 1023.
**2677.** *N. N.* The theory and practice of armour attack. E. 96. 57.

### Chemie.

**2678.** *K. Arndt.* Die Entwicklung der Begriffe „Atomgewicht" und „Molekulargewicht". V.V.G. 82. 59.
**2679.** *E. Brauss.* Brennstoffanalyse und Rauchgasanalyse. Z.G.K. 10. 170.
**2680.** *A. Hollard.* Some applications of the theory of electrolysis to the separation of metals from one another. T. E. 52. 818.
**2681.** *P. Rohland.* Über den Einfluß der physikalisch-chemischen Gesetze auf einige Aufgaben und Probleme der anorganischen Chemie. B.M.K. 8. 307; 325.

### Dynamik.

**2682.** *A. Achenbach.* Die Theorie des Massenausgleichs in ihrer Anwendung auf Radschiffsmaschinen. S.B. 4. 619; 769.
**2683.** *P. W. d'Alton* and *J. Mannheim.* Some notes on acceleration: electric v. steam. E. 96. 443.
**2684.** *Bachmann.* Versuche mit der Bewegung von Rollschützen unter hohem Druck. C.B.B. 24. 228.
**2685.** *L. Baclé.* Le poinçonnage envisagé comme méthode d'essai. B.S.E. 105. 801.
**2686.** *J. Bäcker.* Der Einfluß von Ausrundungen im Neigungsrutsch bei Schnellbahnen. O.F.E. (2) 41. 212.
**2687.** *Barbillion.* Sur la prédetermination des rendements des moteurs à traction. E.E. 35. 253.
**2688.** *C. G. Barth.* Estimating length of driving belts. Am.M. 1903. 378.
**2689.** *W. Bauersfeld.* Reguliergetriebe für Francisturbinen mit Finkschen Leitschaufeln. P.J. 318. 401.
**2690.** *G. Benischke.* Das Pendeln parallel-geschalteter Wechselstrommaschinen. E.Z. 24. 195; 891; 1095. — *H. Görges* 378. 1023.
**2691.** *L. L. Bentley.* Chart for tractive power of locomotives. A.E.R.J. 77. 239.
**2692.** *Berrier — Fontaine.* De l'adoption d'une série réguliere de filetages pour les vis horlogères. B.S.E. 105. 154.
**2693.** *J. Berthenod.* Diagramme des moteurs polyphasés asynchrones. E.E. 40. 253; 281.
**2694.** *W. W. Bird* and *H. P. Fairfield.* A twit drill dynamometer. Am.M. 1904. 1629.
**2695.** *A. J. Boole.* Electric motors for centrifugal pumps and fans. E.N. 50. 302.
**2696.** *von Borries.* Die Bewegungswiderstände der Eisenbahnfahrzeuge und die Leistungsfähigkeit der Lokomotiven Z.V.D.I. 48. 810.
**2697.** *L. Bréguet.* Notes sur les diagrammes des moteurs asynchrones. E. E. 39. 281; 488.
**2698.** *E. R. Briggs.* Piston rods and high speeds. Am.M. 1904. 1097.
**2699.** *H. Brillié.* Équilibre des machines. G.C. 43. 50; 69; 85.
**2700.** *L. Bückle.* Beitrag zur Berechnung von Weichen und Gleisbogen. O. F.E. (2) 41. 295.
**2701.** *S. H. Burnell.* The length of rocker arms. Am.M. 1903. 847.
**2702.** *Codron.* Expériences sur le travail des machines-outils. B.S.E. 104. 29; 538; 790; 105. 695; 816.
**2703.** *G. W. Colls.* Influence of the Earths rotation on rail wear. E.N. 52. 335.
**2704.** *E. L. Coster.* Maximum pressure on cross-head pins of compound locomotives. A.E.R.J. 78. 61.
**2705.** *W. Cramp.* On single-phase repulsion motors. T.E. 51. 928; Eg. 76. 506.
**2706.** *H. Darwin.* Side-slip in motorcars. Eg. 78. 352. — *A.* 466.
**2707.** *G. Deuchars.* Mountain railways. M.P.I.C.E. 153. 229.
**2708.** *H. Diepen.* Die störenden Bewegungen der Dampflokomotive. A.G. B. 54. 45.
**2709.** *E. R. Douglas.* The Jack-in-the-Box speed-changing device. Am.M. 1904. 1270. — *G. W. Hart.* 1370.
**2710.** *O. Dusfour.* Étude géométrique des versoirs à surface réglée. G.C. 45. 41.

**2711.** *E. E.* Electric lift gear. Eg. 76. 801.

**2711.** *O. Engbo.* Über Pendelregulierungen mit Feder- und Gewichtsbelastung. P.M.C. 37. 50; 58; 69; 76; 83; 93.

**2713.** *G. Espitallier.* Automobiles à 3 essieux. Suspension système Lindecker. G.C. 46. 133.

**2714.** *F. D.* Mesure des effects développés pour le tournage de la fonte et de l'acier. G.C. 46. 338.

**2715.** *H. Föttinger.* Effektive Maschinenleistung und effektives Drehmoment. J.S.G.B. 4. 441.

**2716.** *A. Frank.* Neue Erhebungen über die Widerstände der Lokomotiven und Bahnzüge bei besonderer Berücksichtigung hoher Fahrgeschwindigeiten. Z.V.D.I. 47. 460.

**2717.** *A. Frank.* Die Gestaltung der Lokomotiven und Einzelfahrzeuge zur Erreichung hoher Fahrgeschwindigkeiten. Z.V.D.I. 48. 46.

**2718.** *L. H. Fry.* The proportions of modern locomotives. R.G. 53. 687.

**2719.** *W. F. M. Goß.* Recent progress in the design of locomotive front ends. E.N. 50. 457.

**2720.** *R. Gostkowski.* Die günstigste Geschwindigkeit der Eisenbahnzüge. O.F.E. (2) 40. 160.

**2721.** *A. Gouilly.* Définition des phénomènes. Application de la mécanique des systèmes matériels. M.I.C. 56A. 280.

**2722.** *G. Hagemann.* Drop-valve engines. Eg. 78. 749.

**2723.** *F. A. Halsey.* Spiral gears of equal diameters on shafts at right angles. Am.M. 1903. 264.

**2724.** *A. Herdner.* The compound locomotive and its development in France. A.E.R.J. 77. 2.

**2725.** *O. Hönigsberg.* Messung der zwischen Rad und Schiene auftretenden Kräfte durch Fließbilder. O.F.E. (2) 41. 109; 130; 156.

**2726.** *H. Hoffmann.* Untersuchungen an Dampffördermaschinen. Z.V.D.I. 48. 149; 192.

**2727.** *Holzmüller.* Die Zentrifugalkräfte und ihre Anwendung in der kosmischen und technischen Mechanik. Z.V.D.I. 47. 1633; 1706.

**2728.** *E. Hospitalier.* Sur l'observation et l'enregistrement de phénomènes périodequement et rapidement variables. M.I.C. 56A. 314.

**2729.** *Jahn.* Die günstigste Geschwindigkeit der Güterzüge. O.F.E. (2) 41. 143. — *R. Gostkowski.* 145.

**2730.** *K.* Ein neues Breunddynamometer. P.J. 319. 560.

**2731.** *K. Keller.* Vorrichtungen zur zeitweiligen Erhöhung des Triebraddruckes bei Lokomotiven. Z.V.D.I. 47. 877.

**2732.** *J. Kempf.* Die Berechnung der Gegengewichte bei Zwei-, Drei- und Vierzylinderlokomotiven, sowie deren Einfluß auf die störenden Bewegungen. A.G.B. 54. 174; 188. — *R. Baum.* 242.

**2733.** *C. F. Keer.* The potential efficiency of prime movers. Eg. 78. 256; E. 98. 68.

**2734.** *A. T. J. Kersey.* Distribution of loads on locomotive axles. E. 97. 260.

**2735.** *F. Kick.* Kraftverbrauch und Schnittgeschwindigkeit von Arbeitsstählen. Z.W. 6. 37.

**2736.** *R. Kirchberg.* Die Kalibrierung der Walzen im Walzwerkbetriebe. S.E.D. 23. 1141.

**2737.** *H. Koch* und *H. Schmiede.* Berechnung elektrisch betriebener Fördermaschinen. E.Z. 25. 827.

**2738.** *G. W. Koehler.* Die Elsner-Ventilsteuerung. A.G.B. 52. 110; 149; 160.

**2739.** *R. Kohfahl.* Auflagerdruck der schwingenden Glocke. Z.V.D. 48. 93.

**2740.** *A. Koob.* Das Regulierproblem in vorwiegend graphischer Behandlung. Z.V.D.I. 48. 296; 373; 409.

**2741.** *R. Krause.* Zeichnerische Bestimmung von Anlassern. Z.E.W. 21. 566.

**2742.** *F. Krull.* Bewegung eines Wagenzuges auf gleisloser Bahn nach Renard. O.F.E. (2) 41. 125.

**2743.** *F. Krull.* Der Renardsche Wagenzug auf geleisloser Bahn. Z.Ö.I.A.V. 56. 549.

**2744.** *W. Kummer.* Rechnerische Bestimmung der Anfahrlinien der Motorwagen elektrischer Bahnen für verschiedene Motortypen. S.B. 244. 14; 28.

**2745.** *W. Kummer.* Rechnerische Bestimmung der Anfahrlinien elektrischer Vollbahnen. S.B.Z. 44. 287.

**2746.** *L. Lecornu.* Sur les roulements à billes. R.D.M. 14. 465.

**2747.** *H. Lehmann.* Geschwindigkeitsmessungen an Momentverschlüssen. Z.I. 24. 74.

**2748.** *T. Lehmann.* Diagramme rigoureux du moteur asynchrone polyphasé. E.E. 36. 281.

**2749.** *Leitzmann.* Die Ermittelung des Eigenwiderstandes von Eisenbahnfahrzeugen. V.V.G. 82. 187.

**2750.** *A. M. Levin.* Weight of fly wheels for engines driving direct connected alternators. Am.M. 1903. 588.

2751. *H. Linsenmann.* Belastungsausgleich von Asynchronmotoren für stoßweise Betriebe. E.Z. 24. 951.

2752. *L. von Löw.* Ruhiger Gang von Automobilmotoren. P.J. 319. 298.

2753. *C. C. Longridge.* House power computation for petrol motors. E. 98. 340.

2754. *C. F. D. Marshall.* Some notes on train resistance. E. 96. 321.

2755. *G. W. Melville.* The vibration of steamships. Eg. 75. 1; 33; 78; 134; 199; 231; 267; 302; 337; 378; 416; 547; 571; 643.

2756. *G. W. Melville.* Die Vibrationen der Dampfschiffe. S.B. 4. 707; 757; 802; 849; 903; 954; 1007; 1058; 1133; 5. 60; 110; 157; 209; 259.

2757. *G. Meyersberg.* Über die Anwendung von Schwungmassen zum Ausgleich in elektrischen Betrieben. J.G.W. 46. 869.

2758. *G. Meyersberg.* Über den Ausgleich von Belastungsschwankungen in Kraftübertragungsanlagen. E.Z. 24. 261.

2758b. *R. Mollier.* Der Beschleunigungsdruck der Schubstange. Z.V.D.I. 47. 1638.

2759. *R. Mollier.* Der Ungleichförmigkeitsgrad von Gasmotoren mit Aussetzregelung. Z.V.D.I. 47; 1704.

2760. *H. F. Moore.* Laying out cone pulleys. Am.M. 1903. 299.

2761. *A. Morizot.* Indicateur-enregistreur de vitesse pour locomotives. P.E.M. (5) 3. 1.

2762. *S. A. Moss.* Layout of Corliss valve gears. Am.M. 1603. 518; 546.

2763. *S. A. Moss.* Gas engine design constants and formulae. Am.M. 1904. 482.

2764. *W. Müller.* Kraftmessung an einer Schwammkrugturbine. Z.G.T. 1. 6.

2765. *A. Munster.* Chicago Great Western grade diagrams. R.G. 53. 385.

2766. *H. S. Nachman.* Design of helical springs for safety valves. Am.M. 1904. 96.

2767. *J. T. Nicolson.* Experiments with a lathe-tool dynamometer. Am.M. 1904. 958.

2768. *K. Nußbaumer.* Zugkraft und Neigungsreduktion in Straßenkurven. S.B.Z. 44. 220.

2769. *R. A. Parke.* Locomotive counterbalacing. R.G. 53. 879.

2770. *U. Peters.* Rolling mill dogs. Am.M. 1903. 1354.

2771. *J. Petin.* L'avance à l'allumage et la durée des explosions dans les moteurs à explosions. G.C. 44. 26.

2772. *L. E. Picolet.* A graphic solution of the open-belt cone-pulley problem. Am.M. 1904. 220.

2773. *P. Planat.* Le pendule du Panthéon. L.C.M. 18. 49.

2774. *Pregél.* Schnellbohrer. P.J. 318. 343.

2775. *Puller.* Berechnung von Geleisverlegungen. C.B.B. 23. 110.

2776. *G. Reimann.* Ein neues Verfahren zur Ermittelung der Schienenüberhöhung in Geleiskrümmungen. S.T.Z. 2. 236.

2777. *H. Reißner.* Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks. Z.B.W. 53. 137.

2778. *C. Renard.* Sur un nouvel appareil destiné à la mesure de la puissance des moteurs. A.P.Ch. (8) 14. 263.

2779. *J. Resal.* Étude du dérapage des automobiles. G.C. 43. 392; 407.

2780. *G. Richard.* Sur le système de commande breveté par le galet enrouleur débrayeur par M. le capitaine Leneveu. B.S.E. 104. 367.

2781. *M. Richter.* Schnellbetrieb auf den Eisenbahnen der Gegenwart. P.J. 318. 162; 194; 807.

2782. *M. Richter.* Schnellbetrieb auf den Eisenbahnen der Gegenwart. P.J. 319. 51; 69; 87; 103; 119; 137.

2783. *M. Richter.* Schnellfahrten auf der badischen Staatsbahn. P.J. 319. 465.

2784. *E. Rosenberg.* Anforderungen an Antriebsmotoren beim Parallelbetrieb von Wechselstromdynamos. Z.V.D.I. 48. 793; 856.

2785. *F. Roß.* Das Windflügeldynamometer des Obersten Ch. Renard. Z.E.W. 22. 329.

2786. *P. Roth.* Schwingungen von Kurbelwellen. Z.V.D.I. 48. 564.

2787. *O. Ruch.* Übergangsbogen. O.F.E. (2) 40. 59. 71.

2788. *C. M. Sames.* The lay out of cone pulleys. Am.M. 1904. 658.

2789. *R. Sanzin.* Versuche über den Widerstand von Eisenbahnzügen. Z.Ö.I.A.V. 55. 649.

2790. *R. Sanzin.* Die Verbundlokomotive in England. V.V.G. 83. 91; 111; 155.

2791. *J. Sartori.* Neue Methode zur Bestimmung der Winkelabweichung eines rotierenden Systemes. Z.E.W. 21. 489.

2792. *G. Schlesinger.* Die Passungen im Maschinenbau. Z.V.D.I. 48. 1603.

2793. *O. Schlick.* The gyroscopic effect of fly-wheels on board a ship. Eg. 77. 484.

2794. *F. Schrödter.* Last- und Personenaufzug. P.M.C. 36. 86.

2795. *W. Schüle.* Verfahren zur unmittelbaren Entnahme von Zeitdiagrammen mit gewöhnlichen Indikatoren. Z.V.D.I. 48. 441; 487.

**2796.** *Seifert.* Beitrag zum Gebrauch der Maschkeschen Kraftformel $Z = s\left(3 - \frac{u}{c} - \frac{\tau}{t}\right)$. C.B.B. 24. 269.

**2797.** *V. V. L. Sheldon.* A new hydraulic belt dynamometer. Am.M. 1903. 1145.

**2798.** *K. Sieber.* Neigungswinkel des Laufradprofiles bei elektrischen Bahnen. Z.V.D.I. 47. 823.

**2799.** *A. Sommerfeld.* Das Pendel parallel geschalteter Wechselstrommaschinen. E.Z. 25. 273; 291; 469. — *E. Rosenberg.* 395.

**2800.** *H. Spyri.* Der Betrieb von Nebenlinien schweizerischer Normalbahnen mit Akkumulatorenlokomotiven. S.B.Z. 42. 100; 113; 124.

**2801.** *D. W. Taylor.* Some recent experiments at the United States model basin. Eg. 78. 838.

**2802.** *H. Übelacker.* Untersuchungen über die Bewegung von Lokomotiven mit Drehgestellen in Bahnkrümmungen. O.F.E. (2) 40. Beilage.

**2803.** *P. Uhlich.* Hobelmaschinenkraftbedarf. Z.W. 7. 161. — *S. Streiff.* 188.

**2804.** *G. Wagner.* Ein neuer stroboskopischer Schlüpfungsmesser. A.G.B. 55. 25.

**2805.** *N. N.* Empennage des carènes de ballons dirigeables. G.C. 45. 148.

**2806.** *N. N.* Equated tonnage rating. Methods of test and calculation. R.G. 53. 234.

**2807.** *N. N.* Oblique type crank axles. E. 97. 394.

**2808.** *N. N.* Puissance des hélices sustentatrices à propulsion mécanique. G.C. 45. 251.

**2809.** *N. N.* Zangen für Walzwerke. P.M.C. 37. 127.

**2810.** *N. N.* The power required to drive centrifugal machines. Eg. 76. 248.

**2811.** *N. N.* Einiges über die Zentratorkuppelung. P.M.C. 36. 26.

**2812.** *N. N.* Appareil pour la mesure de la puissance des moteurs grande vitesse. G.C. 45. 28.

**2813.** *N. N.* Transmissionslastenaufzug. P.M.C. 36. 128; 137.

**2814.** *N. N.* Elektrisch betriebener Lastenaufzug mit eisernem Fördergerüst. P.M.C. 36. 5.

**2815.** *N. N.* Méthode de comparaison des moteurs de différentes puissances. G.C. 41. 128.

**2816.** *N. N.* A winding engine problem. E. 96. 565.

**2817.** *N. N.* Tachygraphe Karlik. G.C. 43. 282.

## Elastizität.

**2818.** *C. Abeles.* Einige Anwendungen des Satzes der kleinsten „Formänderungsarbeit". Z.Ö.I.A.V. 55. 570.

**2819.** *J. W. Balet.* A new graphical method for stresses in 3-hinged arches. E.N. 52. 356.

**2820.** *W. S. von Balicki.* Einflußlinien für die Beanspruchung gerader Fachwerkträger durch horizontale Kräfte. Z.Ö.I.A.V. 56. 716.

**2821.** *K. Bernhard.* Der Wettbewerb um eine feste Straßenbrücke über den Rhein zwischen Ruhrort und Homberg. Z.V.D.I. 48. 996; 1608; 1951; 1984.

**2822.** *C. Birault.* Flexion des parois dans les tuyaux de conduites de grand diamètre. M.I.C. 57 B. 433.

**2823.** *G. Blot.* Déformation des poutres droites. N.A.C. (5) 10. 27; 40.

**2824.** *F. Boulad.* Nouvelle détermination géométrique des effets dans les poutres droites à travées continues. G.C. 45. 379.

**2825.** *E. Brauß.* Betriebsspannungen in Schwungrädern, Riemenscheiben u. dgl. Z.G.K. 10. 187.

**2826.** *P. P. Bredsten.* The deflection of beams when unsymmetrically loaded. Am.M. 1900. 610; 852.

**2827.** *F. Brunner.* Beitrag zur Berechnung der Querrahmen eiserner Brücken. Z.Ö.I.A.V. 56. 696.

**2828.** *S. K. Drach.* Graphische Ermittelung der Einflußlinien für die Stabspannungen im Ständerfachwerk. Z.Ö.I.A.V. 56. 743.

**2829.** *S. Dunkerley.* Spannungswirkungen auf die verschiedenen Teile einer Kurbelwelle an einem wirklichen Fall einer Vierkurbel-Schiffswelle beleuchtet. S.B. 4. 223; 275; 330; 393; 441; 495.

**2830.** *F. Engesser.* Über den Einfluß der Formänderungen auf den Kräfteplan statisch bestimmter Systeme, insbesondere der Dreigelenkbogen. Z.A.I. (2) 8. 177.

**2831.** *M. Ensslin.* Studien und Versuche über die Elastizität kreisrunder Platten aus Flußeisen. P.J. 318. 705; 721; 785; 801.

**2832.** *M. Ensslin.* Studien über die Beanspruchung und Formänderung kreisförmiger Platten. P.J. 319. 609; 629; 649; 666; 677.

**2833.** *Ewerbeck.* Die Überdeckung mittlerer Spannweiten bei untergeordneten oder provisorichen Bauwerken. D.B.Z. 37. 530. — *W. Thiel.* 555. — *E. Dietrich.* 677.

**2834.** *Flamant.* Sur la flexion des poutres rectangulaires. A.P.Ch. (8) 12. 65; 14. 255.

**2835.** *H. Frahm.* Torsion and torsional stresses in propellor shafts. Eg. 75. 189.

**2836.** *A. Francke.* Einiges über Eisenbahnoberbau III. O.F.E. (2) 40. 154; 186; 203; 227.

**2837.** *A. Francke.* Beitrag zur Berechnung der Bogenträger bei sprungweiser Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes. W.A.B.Z. 68. 28.

**2838.** *A. Francke.* Gekuppelte Bogenträger mit Gleitflächen auf den Mittelstützen. W.A.B.Z. 69. 112.

**2839.** *A. Francke.* Betrachtungen über die Ermittelung des elastischen Verhaltens und der Beanspruchung gerader kontinuierlicher Balken. Z.A.I. (2) 8. 369.

**2840.** *A. Francke.* Die Abhängigkeit der inneren Längsspannungen eines Querschnitts von der angreifenden Längskraft mit besonderer Bezugnahme auf Zement- und Betonkörper. Z.A.I. (2) 9. 39.

**2841.** *A. Francke.* Die inneren Längsspannungen im Querschnitt eines Verbundkörpers. Z.A.I. (2) 9. 355.

**2842.** *P. J. Frenell.* Stress on frames of alternating current generators. E.W. 41. 148.

**2843.** *L. Geusen.* Beitrag zur Berechnung von Beton- und Betoneisenbalken. Z.A.I. (2) 8. 13.

**2844.** *L. Geusen.* Sollen die im Beton auftretenden Zugspannungen bei der Berechnung von Eisenbetonbauten berücksichtigt werden? Z.A.I. (2) 9. 347.

**2845.** *L. Geusen.* Der Einfluß der Windverspannungen auf die Einspannungsmomente der Ständer eiserner Wandfachwerke. Z.V.D.I. 47. 1482; 1528.

**2846.** *L. Geusen.* Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Z.V.D.I. 48. 1108.

**2847.** *J. Graham.* Impact and fatigue in railway bridges. Eg. 95. 3.

**2848.** *R. G. Griswold.* The safety valve on the monkey wrench. Am.M. 1903. 1224.

**2849.** *O. Grove.* Die Bestimmung der Länge eines Kurbellagers. Z.V.D.I. 48. 1777.

**2850.** *K. Haberkalt.* Die Anfangsspannungen in Beton-Eisenträgern. Z. Ö.I.A.V. 55. 66.

**2851.** *E. Haeseler.* Design of windbracing. M.P.I.C.E. 151. 441.

**2852.** *K. Hansmann.* Elastizitätsmodul für Stahlbänder. Z.V. 32. 161.

**2853.** *O. Königsberg.* Über unmittelbare Spannungsverteilung und Sichtbarmachung der neutralen Schichten an beanspruchten Körpern. Z.Ö.I.A.V. 56. 185.

**2854.** *Hofmann.* Berechnung der Spannungen auf Biegung beanspruchter Betonplatten. D.B.Z. 38. 406.

**2855.** *M. T. Huber.* Zur Biegungstheorie des rechteckigen Balkens auf Grund des Potenzgesetzes. Z.Ö.I.A.V. 55. 286.

**2856.** *K. Járay.* Zellendecke System Kulhánek. T.B. 34. 57.

**2857.** *F. Jung.* Zusammenhang verschiedener Abbildungen der elastischen Spannungsverteilung. T.B. 35. 114.

**2858.** *J. Kempf.* Die Verankerung des Feuerkastens bei Lokomotivkesseln. A.G.B. 53. 120.

**2859.** *F. Kick.* Über den Einfluß der Schmiermittel auf die Formänderung bei Druckversuchen und auf den Reibungskoeffizienten. B.M.K. 8. 145.

**2860.** *F. B. Kleinhans.* Chain rings. Am.M. 1904. 1314.

**2861.** *M. Kloß.* Analytisch-graphisches Verfahren zur Bestimmung der Durchbiegung zwei- und dreifach gestützter Träger. P.J. 318. 145; 204; 214; 235; 245.

**2862.** *M. Koenen.* Regeln für die Anordnung der Eiseneinlagen in Eisenbetonbauten. M.Z.B.E. 1. 6.

**2863.** *R. von Kornilowicz.* Einige Worte über die Torsionsqualitätskoeffizienten. B.M.K. 9. 65.

**2864.** *de Krivochéine.* La chaine avec l'arc. A.P.Ch. (8) 12. 120.

**2865.** *G. Leinekugel Le Cocq.* La suppression du bois dans les tabliers des ponts suspendus modernes. G.C. 46. 253.

**2866.** *A. M. Levin.* Radial stresses due to centrifugal force in revolving bodies. Am.M. 1904. 1389.

**2867.** *A. Löwit.* Beitrag zur Berechnung des Durchhanges in der Spannung von frei gespannten Drähten. Z.E.W. 22. 728.

**2868.** *P. Ludwik.* Technologische Studie über Blechbiegung. T.B. 35. 133.

**2869.** *W. Lynen.* Die Stoffbüchsen der Dampfmaschinen. Z.B.D. 8. 83; 101; 113; 127; 133; 146; 158; 168; 190; 193; 206; 214; 228.

**2870.** *K. G. Meldahl.* Materialspannungen in ausgeschnittenen und verdoppelten Platten. J.S.G.B. 5. 480.

**2871.** *Mesnager.* Deux appareils nouveaux pour la mesure des déformations élastiques. A.P.Ch. (8) 11. 212; 14. 256.

**2872.** *Mesnager.* Note sur l'approximation des formules de flexion des arcs. A.P.Ch. (8) 12. 164.

**2873.** *G. A. Meß.* Determining design constants from practice. Am.M. 1903. 1345.

**2874.** *E. Nather.* Über die Spannungsverteilung in gekrümmten Stäben. Z.Ö.J.A.V. 55. 590.

**2875.** *F. Niethammer.* Die Durchbiegung von Dynamogehäusen. Z.E.W. 22. 367.

**2876.** *P. H. Parr.* Connecting and coupling rods. E. 95. 61; 86; 187; 232.

**2877.** *W. Plenkner.* Beitrag zur Bestimmung der Deformation eines Bogenfachwerkes. W.A.B.Z. 68. 62.

**2878.** *Ramisch.* Angenäherte Bestimmung der Querschnitte von armierten Betonplatten mit Rücksicht auf die mit Sicherheit mögliche Zugspannung. S.D.B. 13. 277; 368.

**2879.** *Ramisch.* Elementare Untersuchung eines elastischen Bogens in Verbindung mit einer auf Pfeilern ruhenden Kette. S.D.B. 14. 98.

**2880.** *Ramisch.* Technische Mitteilung. S.D.B. 14. 247.

**2881.** *G. Ramisch.* Elementare Untersuchung eines an einem Ende frei aufliegenden und am anderen Ende schief eingespannten Trägers. V.V.G. 82. 44.

**2882.** *G. Ramisch.* Bestimmung des rechteckigen Querschnittes eines armierten Betonträgers mit Rücksicht auf das allgemeine Gesetz. Z.Ö.I.A.V. 55. 579.

**2883.** *G. Ramisch.* Kinematisch-statische Untersuchung des eingemauerten flachen Kreisbogen-Gewölbes. P.J. 319. 353; 369; 439.

**2884.** *C. Reimann.* Die Spannungen in einer rotierenden Scheibe. A.G.B. 55. 56.

**2885.** *H. Reißner.* Flexure of long beams. Am.M. 1904. 314.

**2886.** *A. Rejtö.* Bestimmung der charakteristischen Eigenschaften durch Scherversuche mit parallelen Schneiden und rechtwinkligen Schneidewinkeln. (d. f. u. e.) B.M.K. 9. 289; 305; 321; 337.

**2887.** *Résal.* Note sur la comparaison des calculs théoriques aux résultats d'expérience relatifs à la flexion d'un anneau circulaire. A.P.Ch. (8) 16. 181; 201. — *Mesnager* 193.

**2888.** *H. Saller.* Stoß-Elastizität und Festigkeit. O.F.E. (2) 40. 163.

**2889.** *L. H. Schenck.* Stay bolts. A E R J. 78. 354.

[illegible] *Schlink.* Stabilitäts- und [illegible]uchungen von speziellen Fachwerksträgern mittels des erweiterten Systems. Z.A.I. (2) 8. 397.

**2891.** *W. Schmidtmann.* Berechnung der Scheitelstärke steinerner Dreigelenkbrücken. D.B.Z. 38. 655.

**2892.** *J. Schreier.* Graphostatische Untersuchung des elastischen Kreisbogengewölbes. Z.Ö.I.A.V. 55. 81.

**2893.** *H. Studte.* Die theoretischen Grundlagen der Rollen- und Kugellager. P.J. 318. 459; 473.

**2894.** *J. Stutz.* Zur Theorie der halbringförmigen Balkenträger. Z.Ö.I.A.V. 56. 682.

**2895.** *E. v. Tetmajer.* Erklärung. Z.Ö.I.A.V. 55. 606.

**2896.** *W. Thiel.* Über hölzerne Turmhelme. D.B.Z. 37. 358.

**2897.** *J. Thieme.* Zur Berechnung von kontinuierlichen Trägern über 3 Öffnungen. D.B.Z. 37. 101.

**2898.** *F. Thienemann.* Berechnung eines Gittermastes. P.M.C. 37. 207.

**2899.** *A. Thompson.* Graphical solutions for spiral gears. Am.M. 1904. 112.

**2900.** *J. Thoren.* Straßenbrücke. P.M.C. 37. 196.

**2901.** *M. Tolle.* Zur Ermittlung der Spannungen krummer Stäbe. Z.V.D.I. 47. 884.

**2902.** *L. Vianello.* Die Konstruktion der Biegungslinie gerader Stäbe und ihre Anwendung in der Statik. Z.V.D.I. 47. 92.

**2903.** *L. Vianello.* Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Z.V.D.I. 48. 128; 161.

**2904.** *A. T. Weston.* Stresses in thin cylinders subjected to internal pressure. E. 98. 298.

**2905.** *F. Wittenbauer.* Maximum end-thrust consistent with stability for rods fixed at several points. M.P.I.C.E. 151. 506.

**2906.** *C. Worthington.* Concerning the nature of shearing stress. E.N. 52. 315.

**2907.** *C. E. Young.* Two handy rules in designing beam work. E.N. 50. 270.

**2908.** *N. N.* Articulations in granite for bridges. E. 97. 591.

**2909.** *N. N.* The limits of working stress in bridges. E. 96. 493; 518; 548; 588.

**2910.** *N. N.* Rolltreppenanlage in Biarritz. System Reno. P.M.C. 37. 35.

**2911.** *N. N.* Recherches sur la construction des silos. L.C.M. 20. 523; 536; 548.

**2912.** *N. N.* Les radiers en béton. L.C.M. 19. 45.

**2913.** *N. N.* Essais pour la détermination des forces intérieures dans le béton armé. G.C. 45. 61.

— *H. Behn-Eschenburg* 761. — *H. Kullmann* 792. — *P. Brandt* 792.

**2956.** *J. W. Burleigh.* The output coefficient. T.E. 52. 97.

**2957.** *J. Busch.* Über Kontaktwiderstände. E.Z. 25. 160.

**2958.** *C. K.* Über den Entwurf von Gleichstrommaschinen. Z.E.W. 21. 53.

**2959.** *G. H. Cooke.* Dynamo design. T.E. 52. 425.

**2960.** *E. Cramer.* Untersuchungen über die Pulsation des Gleichstroms bei dem rotierenden Umformer. E.Z. 24. 953.

**2961.** *E. Cramer.* Beitrag zur Trennung der Effektverluste von Gleichstrommaschinen. E.Z. 25. 719.

**2962.** *E. Cramer.* Die Fehlerquellen bei der Aufnahme des Kommutatordiagrammes. Z.E.W. 21. 443.

**2963.** *E. H. Crapper.* Methods of charging for electrical energy. T.E. 52. 830.

**2964.** *J. Delemont.* Note sur la détermination des phases des courants et tensions dans un transformateur. E.E. 40. 375.

**2965.** *W. A. del Mar.* Feeder calculations for direct current railways. E.W. 42. 333

**2966.** *E. Dick.* Über den Entwurf von Gleichstrommaschinen. Z.E.W. 21. 477.

**2967.** *G. Dimmer.* Über die Erscheinungen der Radioaktivität. Z.E.W. 22. 549; 569.

**2968.** *A. Dina.* Über den Leistungsfaktor von Drehstrommotoren bei beliebiger Kurvenform. Z.E.W. 21. 261.

**2969.** *J. Dönitz.* Der Wellenmesser und seine Anwendung. E.Z. 24. 920; 1024; 25. 119.

**2970.** *J. Dönitz.* A wave meter. T.E. 52. 407.

**2971.** *J. Döry.* Ionen und Elektronen. Z.E.W. 21. 141.

**2972.** *F. Dolezalek.* Meßeinrichtung zur Bestimmung der Induktionskonstanten und des Energieverlustes von Wechselstromapparaten. Z.I. 23. 240.

**2973.** *F. Dolezalek* und *A. Ebeling.* Über die Leistungsfähigkeit von Fernsprechkabeln mit stetig verteilter Selbstinduktion. E.Z. 24. 770.

**2974.** *F. Dolezalek* und *A. Ebeling.* La téléphonie à grand distance d'après le système Pupin. E.E 34. 165.

**2975.** *F. Dolezalek* and *A. Ebeling.* Experiments in long distance telephony on the Pupin system. T.E. 50. 722.

**2976.** *L. Drucbert.* Les dynamos à courant continu de l'exposition universelle. E.E. 34. 425.

**2977.** *E. A.* Die Rolle des Eisens im Induktionsapparat. Z.E.W. 21. 23.

**2978.** *E. A.* Das System Pupin der Ferntelephonie. Z.E.W. 21. 171.

**2979.** *E. A.* Das Kreisdiagramm des Kollektormotors. Z.E.W. 21. 522.

**2980.** *K. Edgcumbe* and *F. Punga.* Direct-reading measuring instruments for switchboard use. T.E. 52. 910; 944; 981.

**2981.** *R. Edler.* Über den Entwurf von Schaltungen und Schaltapparaten. Z.E.W. 21. 449; 465.

**2982.** *R. Edler.* Eine einfache Methode zur Bestimmung von Schaltungen. M.T.G.W. (2) 13. 136.

**2983.** *E. W. Ehnert.* Theoretische Behandlung eines Fünfphasenstromsystems. Z.E.W. 21. 89.

**2984.** *E. W. Ehnert.* Berechnung der Einflüsse von Kapazität, Induktion und Resistanz auf ober- und unterirdische Leitungen, welche Ein-, Zwei- oder Dreiphasenstrom führen. Z.E.W. 22. 517; 528; 541.

**2985.** *F. Eichberg.* Über Einphasenbahnen. Z.E.W. 22. 119; 140.

**2986.** *F. Eichberg.* Einphasenkollektorenmotoren und ihre Regelung. E.Z. 25. 75.

**2987.** *E. Kr.* Elektronentheorie und Radioaktivität. Z.E.W. 22. 546.

**2988.** *R. Elsässer.* Die Pulsation des Gleichstroms rotierender Umformer. E.Z. 25. 163. — *G. Großmann* 249.

**2989.** *F. Emde.* Selbstinduktion. Z.E.W. 21. 89.

**2990.** *F. Emde.* Widerstandszunahme durch Erwärmung. E.Z. 24. 818.

**2991.** *F. Emde.* Über elektrotechnische Maßsysteme. E.Z. 25. 432.

**2992.** *F. Emde.* Unipolare Wirkungen. E.Z. 24. 576.

**2993.** *G. Espitalier.* La télégraphie sans fil. G.C. 41. 293; 313; 329.

**2994.** *F. D.* Dispositif pour le retour du courant par les rails de tramways électriques. G.C. 41. 367.

**2995.** *C. Feldmann.* Neue Kollektormotoren für einphasigen Wechselstrom. Z.V.D.I. 48. 1246; 1385.

**2996.** *K. Feußner.* Vielstufige Strommesser. E.Z. 25. 115.

**2997.** *M. B. Field.* A study of the phenomenon of resonance in electric circuit by the aid of oscillograms. T.E. 50. 979; 1031; 1068.

**2898.** *M. B. Field.* Resonance effects. T.E. 51. 173.

**2999.** *M. B. Field.* Eddy currents in dynamo machines. T.E. 52. 598.

**3000.** *M. B. Field.* Eddy currents in cable sheaths. T.E. 52. 1017.

**3001.** *K. T. Fischer.* Versuche mit den Pupinschen Kabel. P.J. 318. 81.

**3002.** *F. A. Fish.* Note on three phase power measurement. E.W. 41. 1091.

**3003.** *F. K.* Die Leitungsfähigkeit von Hg-dämpfen. Z.E.W. 22. 704.

**3004.** *J. A. Fleming.* The measurement of cable capacity. T.E. 51. 842. *H. Kath* 52. 98.

**3005.** *H. Gallusser.* Eine einfache Methode zur Berechnung von geschlossenen Leitungsnetzen. E.Z. 24. 310.

**3006.** *G. E.* Les progrès de la télégraphie sans fil. G.C. 44. 350.

**3007.** *G. Gesing.* Beitrag zur mathematischen Ableitung des Ohmschen Gesetzes. Z.E.W. 21. 36.

**3008.** *Gin.* Mémoire sur le régulateur électrique Gin. E.E. 38. 414; 458.

**3009.** *H. Görges.* Über einige Diagramme zum asynchronen Wechselstrommotor. E.Z. 24. 271. — *H. Cahen* 339. — *F. Eichberg* 446.

**3010.** *A. Grau.* Ein Phasenmesser. E.Z. 25. 251.

**3011.** *H. Grob.* Diagramm und Ausmessung von Drehstrommotoren. E.Z. 25. 447; 474. — *O. Weißhaar* 688.

**3012.** *F. Guery.* Sur la production des harmoniques dans les machines à courants alternatifs. E.E. 36. 51.

**3013.** *C. F. Guilbert.* La méthode de M. R. V. Picou par la prédétermination des caractéristiques. E.E. 33. 109.

**3014.** *C. F. Guilbert.* Sur la décomposition d'un caractéristique à vide relevée expérimentalement. E.E. 37. 481.

**3015.** *C. F. Guilbert.* Sur la puissance relative des commutatrices. E.E. 40. 401.

**3016.** *C. F. Guilbert.* The Armature reaction of alternators. E.W. 41. 32; 116.

**3017.** *C. E. Guye* et *P. Denso.* Sur la réalisation d'un champ électrostatique tournant de haute tension. E.E. 39. 201.

**3018.** *C. C. Hawkins.* Calculation of the apparent inductance of armature coils. E.W. 42. 798; 835; 871; 913; 961.

**3019.** *R. Heilbrun.* Widerstand und Stromverlauf. E.Z. 25. 1091.

**3020.** *F. Heinicke.* Was ist über die Gefährdung der Feuerwehr beim Anspritzen stromdurchflossener Drähte zu sagen. E.Z. 24. 478.

**3021.** *C. Heinke.* Untersuchungen am Wellenstromlichtbogen. V.V.G. 83. 403.

**3022.** *J. Herzog, C. Feldmann.* Bestimmung der Stromverteilung in elektrischen Leitungsnetzen. E.Z. 24. 172. — *J. Teichmüller* 338.

**3023.** *A. Heyland.* Asynchronmaschinen mit Kompensierung und Kompoundierung in ihrer heutigen Ausführung. E.Z 24. 51; 72; 95. — *W. Kehse* 358.

**3024.** *A. Heyland.* Asynchronmaschinen mit kurzgeschlossenem Kommutator ohne in sich geschlossene Lamellenverbindung. E.Z. 24. 213.

**3025.** *A. Heyland.* Das Kreisdiagramm des kompensierten Motors. E.Z. 24. 584.

**3026.** *R. Hiecke.* Zur Besprechung der Transformatoren. Z.E.W. 22. 653.

**3027.** *W. H. Hird.* Commutator losses. T.E. 51. 785.

**3028.** *H. Ho.* The use of differentially wound telephone receiver in electric measurements. E.W. 41. 884.

**3029.** *H. M. Hobart.* Der Einfluß der Tourenzahl auf den Entwurf von Gleichstrommaschinen. E.Z. 24. 821. — *W. Oehlschläger* 931.

**3030.** *H. M. Hobart.* Die Wahl des Rotordurchmessers bei Induktionsmotoren. E.Z. 24. 933. — *C. Zorawski* 1003. — *C. Rodgers* 1043.

**3031.** *H. M. Hobart.* Die Vorausberechnung von $\sigma$ für Drehstrommotoren. E.Z. 25. 840.

**3032.** *H. M. Hobart.* Einfache Berechnung von Drehstrommotoren. Z.E.W. 22. 153.

**3033.** *K. Hohage.* Nullmethode zur Vergleichung von Selbstinduktionskoeffizienten unter Verwendung eines Galvanometers. E.Z. 24. 828.

**3034.** *P. Holitscher.* Über den dielektrischen Hysteresisverlust u. d. Kapazität von Hochspannungsmaschinen. E.Z. 24. 635.

**3035.** *H. Holtze.* Die Dampfmaschinen für den Antrieb parallel arbeitender Wechselstromgeneratoren. E.Z. 25. 1059.

**3036.** *B. Hopkinson.* The „hunting" of alternating current machines. T.E. 51. 656; 704.

**3037.** *B. Hopkinson.* The parallel working of alternators. Eg. 76. 468.

**3038.** *B. Hopkinson.* The parallel working of oscillators. T.E. 51. 886.

**3039.** *F. Horschitz.* Kupferverluste und Ausnutzungsfähigkeit der Doppelstromgeneratoren. E.Z. 25. 21; 83.

**3040.** *A. Hruschka.* Graphische Berechnung von Kraftübertragungslinien mit Umformern. Z.E.W. 21. 577; 589. — *M. Seidner* 650a.

**3041.** *Htz.* Über ein vibrierendes Kabelrelais. Z.E.W. 21. 357.

**3042.** *P. Humann.* Die Erdung des neutralen Punkts bei Drehstromanlagen in Rücksicht auf den Wattverlust im Dielektrikum von Kabeln. E.Z. 25. 358.

**3043.** *P. Humann.* Über Erwärmung im Erdboden verlegter Starkstromkabel. E.Z. 24. 599; 735. — *E. Wikander* 659; 874; 1094. — *R. Apt* 913.

**3044.** *P. Humann.* Ein Beitrag zur Frage der Überspannungen in Dreiphasenstromanlagen. E.Z. 25. 883. — *E. Morpurga* 932.

**3045.** *P. Humann.* Über Starkstromkabel u. ihre Verwendung. J.G.W. 47. 342.

**3046.** *J. E. Ives.* The induction coil. E.W. 41. 513.

**3047.** *W. Jaeger.* Das Drehspulengalvanometer nach Deprez und Arsonval im aperiodischen Grenzfall. Z.I. 23. 261.

**3048.** *W. Jaeger.* Die Empfindlichkeit des Drehspulengalvanometers im aperiodischen Grenzfall. Z.I. 23. 353.

**3049.** *W. Jaeger.* Zur Anwendung des Differentialgalvanometers bei genauen Widerstandsmessungen. Z.I. 24. 288.

**3050.** *W. Jäger, S. Lindeck, H. Diesselhorst.* Präzisionsmessungen an kleinen Widerständen in der Thomsonschen Brücke. Z.I. 23. 33; 65.

**3051.** *F. H. Jeannin.* Thre phase power measurements. E.W. 42. 596.

**3052.** *F. H. Jeannin.* Distribution of current in three phase systems. E.W. 42. 797.

**3053.** *F. Jordan.* Die Verwendung von Druckluft bei elektrisch betriebenen Hebezeugen. P.J. 318. 591; 611.

**3054.** *H. Kamps.* Die hinsichtlich der Eisenverluste günstigste Stärke von Transformatorblechen. E.Z. 24. 93.

**3055.** *W. Karapetoff.* Accumulator charging with rotary converters. T.E. 50. 822.

**3056.** *H. Kath.* Die Kapazität von Kabeln. E.Z. 24. 38.

**3057.** *H. Kath.* Die Durchschlagsspannung in Kabeln. E.Z. 25. 568.

**3058.** *A. E. Kennelly.* On the mechanism of electric power transmission. E.W. 42. 672.

**3059.** *O. Knapp.* Spannungsregulierung in ausgedehnten Kraftübertragungsanlagen mittels Tyrrellregulatoren und dynamischen Kondensatoren. E.Z. 25. 923.

**3060.** *A. König.* Graphische Methode zur Ermittlung der Strom- und Spannungswerte von ungleichmäßig belasteten Drehstromtransformatoren. E.Z. 24. 21; 246. — *W. Karapetoff* 193.

**3061.** *G. König.* Der mehrpolige Polplan in der zeichnerischen Leitungsberechnung. E.Z. 24. 69.

**3062.** *A. Koepsel.* Versuch zu einer Erklärung der Erscheinungen des unvollkommenen Kontaktes. P.J. 218. 193.

**3063.** *A. Koepsel.* Bemerkungen zu Marconis Ozeantelegraphie. P.J. 318. 331.

**3064.** *A. Koepsel.* Spielt die Erde bei der drahtlosen Telegraphie eine wesentliche Rolle. P.J. 318. 385.

**3065.** *A. Koepsel.* Über Resonanzschwierigkeiten bei der drahtlosen Telegraphie. P.J. 318. 625; 645.

**3066.** *A. Koepsel.* Berechnung von Kapazität und Selbstinduktion vermittels sehr schneller elektrischer Schwingungen. P.J. 319. 209.

**3067.** *E. Kronstein.* Über die Berechnung von Leitungen ohne Knotenpunkte. Z.E.W. 22. 419.

**3068.** *J. L. la Cour.* Arbeitsdiagramm eines elektrischen Stromkreises. Z.E.W. 21. 613; 628; 640.

**3069.** *M. Latour.* Repulsionsmotor. E.Z. 24. 453.

**3070.** *M. Latour.* Die zweite Form des Repulsionsmotors und des kompensierten Reihenmotors. E.Z. 25. 952.

**3071.** *M. Latour.* The repulsion motor. T.E. 51. 490.

**3072.** *M. Latour.* Einphasenmotoren ohne Phasenverschiebung. E.Z. 24. 877.

**3073.** *M. Latour.* Moteurs à courants alternatifs à vitesse variable sans altération du rendement. E.E. 38. 346.

**3074.** *M. Latour.* Traktion mit Einphasenstrom. Regelung der Geschwindigkeit und Wiedergewinnung von Arbeit. E.Z. 24. 1027.

**3075.** *M. Latour.* Chute ohmique dans les balais des dynamos à courant continu. E.E. 36. 296.

**3076.** *R. A. Lehfeldt.* Total and free energy of the lead accumulator. T.E. 51. 975.

**3077.** *Lehfeldt.* The total and free energy of the lead accumulator. Eg. 76. 829.

**3078.** *T. Lehmaun.* Étude théorique sur les moteurs monophasés à collecteurs. E.G. 39. 321, 420; 441; 40. 41; 81.

**3079.** *T. Lehmann.* La théorie de la télégraphie sans fil. E.E. 39. 361.

**3080.** *P. Letheule.* Accurate measurements of heavy currents. E.W. 41. 616.

**3081.** *L. Lichtenstein.* Über die rechnerische Bestimmung der Kapazität von Luftleitern und Kabel. E.Z. 25. 106; 124.

**3082.** *L. Lichtenstein.* Versuch mit einem Transformator hoher Eigenkapazität. E.Z. 25. 869; 1056.

**3083.** *L. Lichtenstein.* Zur Bestimmung des induktiven Spannungsabfalles paralleler Drehstromleitungen. Z.E.W. 22. 247; 263.

**3084.** *L. Lichtenstein.* Zur Berechnung und experimentellen Bestimmung der

Selbstinduktion. Stromrückleitung von Einphasen- und Drehstromkabeln. Z.E.W 22. 443; 457.

**3085.** *R. v. Lieben* und *E. Reisz.* Über die Erregung von Wellenströmen durch eine Mikrophonanordnung. E.Z. 24. 497.

**3086.** *O. Lodge.* On electrons. T.E. 50. 313. 348; 385; 425; 732; 863; 1029; 51. 123; 208; 286.

**3087.** *H. Lombardi.* Über die Osmiumlampe. E.Z. 25. 41.

**3088.** *F. Loppé.* Systèmes de compoundage des dynamos à courant continu pour vitesse variable. E.E. 33. 181.

**3089.** *F. Loppé.* Essai des alternateurs. E.E. 34. 265.

**3090.** *E. W. Marchant.* On the use of capacities as multipliers in connection with electrostatic voltmeters on alternating current circuits. T.E. 51. 1000.

**3091.** *E. de Marchena.* Applications de l'électricité à la distribution de la force motrice dans les ateliers et les diverses exploitations industrielles. M.I.C. 56 A. 707.

**3092.** *A. Mauduit.* Sur la marche en parallèle des alternateurs. E.E. 34. 345.

**3093.** *R. Mauermann.* Graphische Ermittelung von Geschwindigkeit, Stromverbrauch und Motorbelastung elektrischer Fahrzeuge aus dem Motordiagramm. E.Z. 24. 26.

**3094.** *H. A. Mavor.* The design of continuous current dynamos. T.E. 50. 146; 521.

**3095.** *R. Mayer.* Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in Schließungskreisen mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität. T.B. 34. 133.

**3096.** *M. Br.* Beitrag zur experimentellen Untersuchung von Gleichstrommaschinen. Z.E.W. 21. 547.

**3097.** *A. S. Mc Allister.* Excitation of asynchronous generators by means of static condensance. E.W. 41. 109.

**3098.** *R. Medres.* Einfacher Beweis des Kenellyschen Satzes in Anleitung zu dessen Erweiterung. Z.E.W. 21. 529. — *J. K. Sumec* 624 a.

**3099.** *F. D.* Mesure directe de la puissance déwattée. G.C. 41. 416.

**3100.** *P. Meunier.* Note sur l'essai des moteurs asynchrones. E.G. 34. 228.

**3101.** *R. Mewes.* Erklärung der Elektrolyse mittels des Kohäsionsdruckes, des Dopplerschen und des Weberschen Grundgesetzes. P.J. 318. 252; 285

**3102.** *T. Misuno.* On resonance coils. T.E 51. 654; 730.

**3103.** *H. A. Mörk.* Isolationsmessungen an Fahrdraht bei Straßenbahnen. E.Z. 25. 6. — *W. Guttmann* 82.

**3104.** *D. K. Morris* and *J. K. Catterson-Smith.* Some uses of the oscillograph. T.E. 52. 684.

**3105.** *J. Mościcki.* Über Hochspannungskondensatoren. E.Z. 25. 527; 549.

**3106.** *E. Müllendorff.* Das Äquivalent paralleler Widerstände, Selbstinduktionen und Kapazitäten. Z.E.W. 22. 67.

**3107.** *E. Müllendorff.* Ein neues Verfahren zur Spannungsregelung in Stromverteilungsnetzen. E.Z. 25. 871.

**3108.** *E. Müllendorff.* Die rationelle Berechnung von Stromverteilungsnetzen. E.Z. 25. 295; 314; 375.

**3109.** *E. Müllendorff.* Die Berechnung offener Stromverzweigungen. Z.E.W. 22. 593.

**3110.** *A. Müller.* Über die Brechung von Äquipotentialverbindungen. Z.E.W. 22. 231; 252.

**3111.** *A. Müller.* Über die günstigste Dimensionierung der Nuten von Gleichstromankern. Z.E.W. 21. 667.

**3112.** *A. Müller.* Über den Entwurf von Transformatoren. Z.E.W. 22. 417.

**3113.** *P. Müller.* Das Kreisdiagramm für Übersynchronismus. E.Z. 25. 173.

**3114.** *P. Müller.* Das Kaskadendiagramm f. Übersynchronismus. E.Z. 25. 232.

**3115.** *P. Müller.* Zur Theorie des asynchronen Einphasenmotors. E.Z. 25. 852.

**3116.** *P. Müller.* Zur Theorie des Winter-Eichberg-Motors. E.Z. 25. 918.

**3117.** *A. Neyret.* Note sur la régulation des groupes électrogènes. M.I.C. 57 A. 666. — *R. Picou* 679.

**3118.** *Niethammer.* Primäranlasser für Drehstrommotoren mit Kurzschlußanker. Z.E.W. 21. 388.

**3119.** *F. Niethammer.* Über Flüssigkeitsanlasser. Z.E.W. 22. 35.

**3120.** *F. Niethammer.* Über Wirbelstromverluste. Z.E.W. 22. 51; 198.

**3121.** *F. Niethammer.* Turbodynamos. Z.E.W. 22. 77; 96.

**3122.** *F. Niethammer.* Über Kommutation und Streuung. Z.E.W. 22. 667.

**3123.** *F. Niethammer.* Diagramme général des courants alternatifs. E.E. 39. 481; 40. 1.

**3124.** *J. Hoates.* On the measurement of the internal resistance of a battery. T.E. 50, 1058.

**3125.** *E. Orlich.* Über graphische Behandlung von Wechselstromproblemen. E.Z. 24. 59.

**3126.** *E. Orlich.* Über Selbstinduktionsnormale und die Messung von Selbstinduktionen. E.Z. 24. 502.

**3173.** *W. Schüppel.* Über den Einfluß der Beschaffenheit der Oberfläche von elektrischen Maschinen und der Tourenzahl auf die Erwärmung. Z.E.W. 21. 77.

**3174.** *W. Schüppel.* Meßdraht und Kompensator nach Prof. W. Thiermann-Hannover. E.Z. 25. 849.

**3175.** *G. Seibt.* Vorführung von Experimenten über schnelle Schwingungen. E.Z. 24. 105.

**3176.** *G. Seibt.* Über Resonanzinduktorien und deren Anwendung in der drahtlosen Telegraphie. E.Z. 25. 276; 494. — *R. H. Rendahl* 394; 641. — *v. Arco* 641.

**3177.** *G. Seibt.* Läßt sich in der drahtlosen Telegraphie der Empfänger auf die beiden Wellen des Senders abstimmen. E.Z. 25. 1111.

**3178.** *A. Sengel.* Formeln z. Entwerfen elektrischer Maschinen. E.Z. 24. 900.

**3179.** *A. Slaby.* Der Multiplikationsstab, ein Wellenmesser für die Funkentelegraphie. E.Z. 24. 1007.

**3180.** *A. Slaby.* Die Abstimmung funkentelegraphischer Sender. E.Z. 25. 711; 777; 915; 1085. — *P. Drude* 967. — *F. Braun* 1121.

**3181.** *E. Slovsa.* Die Theorie des Autotransformators. Z.E.W. 22. 571; 552.

**3182.** *R. H. Smith.* Costs of electric automobilism. E. 98. 314.

**3183.** *F. Soddy.* Radioactivity. T.E. 52. 81; 131; 199; 296; 322; 377; 402; 446; 494; 521; 574; 614; 645.

**3184.** *B. Soschinski.* Über die wattmetrische Bestimmung der Verlustziffer der Eisenbleche. E.Z. 24. 292.

**3185.** *F. Spielmann.* Die Berechnung von Wechselströmen ohne Annahme konstanter Selbstinduktionskoeffizienten. Z. E.W. 22. 471.

**3186.** *H. C. Steidle.* Über einen elektrische Zeitschalter. E.Z. 24. 862.

**3187.** *G. Stern.* Über den Einfluß der Kurvenform auf Induktionszähler. E.Z. 24. 581.

**3188.** *G. Stern.* Zählerschaltungen für Drehstromnetze m. Nullleiter. E.Z. 24.776.

**3189.** *K. Sterzel.* Gleichstrom aus Wechselstromnetzen. E.Z. 24. 841.

**3190.** *J. K. Sumec.* Kreisdiagramm des Drehstrommotors bei Berücksichtigung des primären Spannungs- und Eisenverlustes. Z.E.W. 21. 1.

**3191.** *J. K. Sumec.* Polumschaltung von Drahtstrommotoren. Z.E.W. 22. 379.

**3192.** *J. K. Sumec.* Der einphasige Induktionsmotor in graphisch-analytischer Darstellung. Z.E.W. 21. 517; 662 a.

**3193.** *J. K. Sumec.* Die einphasigen Kommutatorenmotoren. Z.E.W. 22. 173; 199; 282.

**3194.** *J. Swinburne.* Some limits in heavy electrical engineering. T.E. 50. 274; 315; 344; 394.

**3195.** *J. Swinburne.* The electrodynamic condenser. T.E. 50. 930.

**3196.** *R. Swyngedauw.* Sur l'extension à des courants périodiques quelconques des propriétés des courants wattés et déwattés sinusoidaux. E.E. 36. 241.

**3197.** *J. Teichmüller.* Zur Theorie der Kabelerwärmung. E.Z. 25. 933.

**3198.** *A. Thomälen.* Graphische Ermittelung des Ossannaschen Diagrammes. E.Z. 24. 972.

**3199.** *A. Thomälen.* Die Vorausbestimmung des Anzugsmomentes bei Drehstrommotoren. E.Z. 25. 694.

**3200.** *R. Threlfall.* The testing of electric generators by air calorimetry. T. E. 52, 206; 247.

**3201.** *T. Tommasina.* La hypothèse des électrons et la corrélation des forces physiques. E.E. 37. 281; 379.

**3202.** *T. Torda.* Die Klemmenspannung der Wechselstromgeneratoren unter verschiedenen Belastungen. E.Z. 25. 670.

**3203.** *J. S. Townsend.* Some effects produced by positive ions. T.E. 50. 971.

**3204.** *F. Townsend, H. P. Freund, W. I. Reich.* The relation of synchronous impedance to the impedance at standstill. E.W. 41. 13.

**3205.** *P. Vandeuren.* Étude comparative de la variation du tension du fil téléphonique. E.E. 33. 14,

**3206.** *P. M. Verhoeckx.* Sur la théorie des commutateurs. E E. 35. 241.

**3207.** *P. M. Verhoeckx.* Eine analytische und graphische Methode zur Berechnung von geschlossenen Leitungsnetzen. Z.E.W. 22. 293; 307.

**3208.** *W. Voege.* Die Schlagweiten in gasförmigen, flüssigen und festen Körpern. E.Z. 25. 1033.

**3209.** *W. Wagner.* Beitrag zur Theorie elektrischer Schwingungen. P.J. 319. 33.

**3210.** *R. Wahle.* Die Kurvenabspannung des Fahrdrahtes bei elektrischen Straßenbahnen mit Rollenkontakt. E.Z. 25. 755; 949. — *W. Hüll* 867. 1004.

**3211.** *C. E. Walsöe.* Über Fernsprechkabel mit Eisendrahtumwicklung. E.Z. 24. 746. — *F. Dolezalek* und *A. Ebeling* 875.

**3212.** *P. Wangemann.* Die Ursachen der Deformationen von Spannungskurven in Wechselstrommaschinen. E.Z. 25. 780; 807. — *R. Bauch* 894.

**3213.** *H. Weichsel.* Arbeitsmessung elektrischer Stromstöße. Z.E.W. 22. 279.

**3214.** *H. Weichsel.* Der Wechselstromserienmotor als allgemeine Drosselspule. E.Z. 25. 901.

**3215.** *R. Weil.* Rampe mobile électrique entre la plage et la ville de Biarritz. G.C. 44. 81.

**3216.** *F. Wittmann.* Einige Anwendungen des Oszillographen. E.Z. 25. 885.

**3217.** *J. E. Young.* The ratio of resistance to capacity in long submarine cables and some related quantities. T.C. 50. 813; 847.

**3218.** *N. N.* Testing the insulation of a 3-wire network. T.E. 50. 1070.

**3219.** *N. N.* Fabrication électrique de l'acier. E.E. 38. 48.

**3220.** *N. N.* Der Spannungsabfall in Wechselstromgeneratoren. P.J. 319. 735.

**3221.** *N. N.* Single phase motor. T.E. 52. 990; 1014.

**3222.** *N. N.* Transposition of telephone lines: cross-talk and induction. E.W. 42. 838.

**3223.** *N. N.* Die Versuche von H. Th. Simon und M. Reich zur Erzeugung hochfrequenter Wechselströme und deren Verwertung zur drahtlosen Telegraphie. P.J. 318. 776.

**3224.** *N. N.* Professor J. A. Flemings Vorträge über drahtlose Telegraphie. P.J. 319. 380; 395.

**3225.** *N. N.* Das Induktorium von J. Ed. Ives. P.J. 318. 411.

**3226.** *N. N.* A general diagram for alternators. T.E. 52. 1029.

**3227.** *N. N.* Leblanc rectifying transformer. E.W. 42. 299.

**3228.** *N. N.* Synchrone Umformer. P.J. 319. 557.

**3229.** *N. N.* Compteur de l'électricité, système Frank Holder. G.C. 41. 176.

### Fehlerrechnung.

**3230.** *B. Degener.* Über einige Näherungsformeln der Ausgleichungsrechnung. C.B.B. 23. 46.

**3231.** *Deubel.* Die Verteilung der linearen Differenzen bei Flächenabsteckungen. Z.V. 33. 378. — *Kummer* 694.

**3232.** *Eggert.* Sukzessive Ausgleichung eines Punktepaares. Z.V. 32, 241.

**3233.** *J. H. Franke.* Einige Bemerkungen über Fehlergrenzen. Z.V. 33. 8.

**3234.** *F. Haller.* Über den Genauigkeitsgrad der Messungen für Anlage und Bau von Tunneln. S.B.Z. 42. 219.

**3235.** *F. B. Helmert.* Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauß für den mittleren Beobachtungsfehler und ihre Genauigkeit. Z.V. 33. 577.

**3236.** *A. Klingatsch.* Zur konstanten Bestimmung der Fadendistanzmesser. Z.V. 32. 481.

**3237.** *W. Láska.* Näherungsmethode für die Genauigkeitsbestimmungen. Z.V. 32. 425.

**3238.** *W. Láska.* Über die Berechnung des arithmetischen Mittels und des mittleren Fehlers. Z.V. 32. 468.

**3239.** *H. Löschner.* Eine neue Vorrichtung für Präzisionsstahlbandmessung und Messungsergebnisse. Z.V. 32. 165. — *Reinhertz* 176.

**3240.** *J. Schnöckel.* Über die Konstruktion des rechten Winkels zur Anfertigung des Quadratnetzes. Z.V. 32. 491.

**3241.** *F. Schulze.* Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen im Dreiecksnetz der Preuß. Landesaufnahme und die Anwendung mechanischer Rechnungshilfsmittel bei Ausgleichungsrechnungen. Z.V. 33. 20; 33.

**3242.** *S. Truck.* Ausgleichung der russischen Gradmessungsnetze für Landesvermessungszwecke. Z.V. 33. 273; 305.

**3243.** *C. A. Vogler.* Didaktisches zur Ausgleichungsrechnung. Z.V. 33. 394; 609.

**3244.** *S. Wellisch.* Die mechanische Begründung des mittleren Fehlers als Genauigkeitsmaß. Z.Ö.I.A.V. 56. 621.

### Festigkeitslehre.

**3245.** *A. V. Abbott.* The construction of aerial telephone lines. E.W. 41. 123; 156; 274; 321; 359; 400; 521; 563; 617.

**3246.** *C. Bach.* Zum Begriff „Streckgrenze." Z.V.D.I. 48. 1040.

**3247.** *C. Bach.* Versuche über die Festigkeitseigenschaften von Stahlguß bei gewöhnlicher und höherer Temperatur. Z.V.D.I. 47. 1762; 1812; 48. 385.

**3248.** *C. Bach.* Versuche über die Festigkeitseigenschaften von Flußeisenblechen bei gewöhnlicher und höherer Temperatur. Z.V.D.I. 48. 1300; 1342.

**3249.** *C. Bach.* Versuche mit Granitquadern zu Brückengelenken. Z.V.D.I. 47. 1439.

**3250.** *C. Bach.* Einige Hauptlehren aus Dampfkesselexplosionen der jüngsten Zeit. Z.V.D.I. 47. 160.

**3251.** *H. Bartlett.* Drawbar and buffer attachments for use between engine and tender. R.G. 53. 470.

**3252.** *E. Bazin.* Les ciments de laitier. N.A.C. (6) 1. 33; 53; 71; 87; 102; 124; 154.

**3253.** *A. J. Beck.* Vernietungen. S.T.Z. 2. 17.

**3354.** *H. Benndorf.* Beiträge zur Theorie der Drahtseile. Z.Ö.I.A.V. 56. 433; 449.

3255. *E. Bindewald.* Die Straßendeckmaterialien der Rheinpfalz. T.G. 7. 99; 323. — *Feil* 176.

3256. *C. Birault.* Les tunnels tabulaires en terrains aquifères. Etude des flexions dans les parois sous l'action des pressions extérieures. G.C. 46. 121.

3257. *J. Bruhn.* Querfestigkeit von Schiffen. S.B. 6. 153; 196; 297; 350; 433; 473; 519.

3258. *E. Carlipp.* Über Berechnungen von Beton- und Betoneisenkonstruktionen. S.D.B. 13. 325; 335; 342; 347; 357; 364.

3259. *A. Cappilleri.* Graphische Ermittlung der Profilnummer eines Z-Eisens, das als Pfette dient. W.B.S. 1. 318.

3260. *P. Chenevier.* Calcul rapide des résistances. L.C.M. 20. 237.

3261. *C. Codron.* Conditions de résistance des pistons des machines à vapeur. R.D.M. 14. 317; 15. 238; 439.

3262. *Considère.* Influence des pressions latérales sur la résistance des solides à l'écrasement. A.P.Ch. (8) 14. 258.

3263. *A. Coulmas.* Darstellung der Knickungsformel von Rankine und Schwarz in Form von zeicherischen Rechentafeln. Z.Ö.I.A.V. 56. 558.

3264. *A. Danz.* Theorie der mehrfach gekröpften und zwei- und mehrfach gelagerten Kurbelwellen. Z.W. 8. 499.

3265. *A. Dietzius.* Einfluß der Stampfbewegungen bei Stapellauf auf die Beanspruchung des Schiffes. S.B. 6. 287.

3266. *R. W. Dull.* Some formulas and tables for bin designing. E.N. 52. 62.

3267. *G. Eder.* Breitflanschige I-Träger (System Grey). S.D.B. 13. 228; 232; 245; 263.

3268. *F. v. Emperger.* Über die Druckfestigkeit von Steinpfeilern und Gewölben. Z.Ö.I.A.V. 56. 188.

3269. *R. Escher.* Graphische Tabelle zur Bestimmung der Riemenbreite. S.B. 43. 146.

3270. *F. D.* Résistance des meules d'émeri et de carborundum. G.C. 43. 201.

3271. *F. D.* Essai de matériaux à la traction par choc. G.C. 45. 392.

3272. *A. Föppl.* Ein Satz über die Festigkeit von Kesselböden. B.M.K. 8. 59; C.B.B. 23. 141.

3273. *P. Forchheimer.* Zur Festigkeit weiter Rohre. Z.Ö.I.A.V. 56. 133; 149.

3274. *H. v. Glinski.* Anwendung der neueren Methoden der Festigkeitslehre auf einige Beispiele aus dem Maschinenbau. V.V.G. 83. 76.

3275. *M. Grübler.* Versuche über die Festigkeit von Schmiergel- und Karborundumscheiben. Z.V.D.I. 47. 195.

3276. *M. Grübler.* Essais pour déterminer la résistance des meules en émeri et en carborundum. B.S.E. 104. 434.

3277. *F. Guthemuth.* Recherches sur les dimensions à donner aux canaux de distribution des machines à vapeur. R.D.M. 14. 469.

3278. *K. Haberkalt.* Über Versuche m. Verbundkörpern u. deren wissenschaftliche Verwertung. D.B.Z. 37. 341; 350.

3279. *Haesler.* Die Erneuerung der Uferbefestigungen am Spreekanal in Berlin mit eisernen Ständern und Monierplatten. Z.B.W. 54. 610.

3280. *H. A. H.* The Strength of plank floors. Am.M. 1904. 192.

3281. *R. S. Hale.* Staybolts, braces and flat surfaces in boilers. E.N. 52. 533.

3282. *W. K. Hatt.* Flexure of reinforced concrete beams. R.G. 54. 304.

3283. *W. K. Hatt.* Tensil impact tests of metals. E.N. 52. 205.

3284. *M. Heinecken.* Über die Berechnung von elliptischen Kuppelböden für Gasbehälterbassins. J.G.W. 47. 27. — *Forchheimer* 222.

3285. *H. L.* Festigkeit eines Wasserrohrkessels. S.B. 6. 556.

3286. *J. Krabáck, A. Werner.* Die Drahtseile. Z.Ö.I.A.V. 55. 27; 44; 138.

3287. *J. T.* Hochbehälter mit 175 cbm Wasserinhalt. P.M.C. 36. 7.

3288. *J. T.* Hochwasserbehälter von 23,5 resp. 19 cbm Inhalt. P.M.C. 36. 94.

3289. *J. T.* Prüfung eines Schornsteins auf Standsicherheit. P.M.C. 37. 182.

3290. *H. Kath.* Belastungstabelle für einfache Gleichstromkabel. E.Z. 25. 969.

3291. *B. Kirsch.* Über neuere Konstruktionsmaterialien des Bauwesens. M.T.G.W. (2) 14. 199.

3292. *B. Kirsch.* Studien über das Problem der Zerknickung. M.T.G.W. (2) 14. 253.

3293. *F. B. Kleinhans.* The strength and proportion of hydraulic cylinders. Am.M. 1903. 440.

3294. *Kneisler.* Günstigste Neigung der Dachräume. C.B.B. 24. 139; 293.

3295. *F. Kretzschmar.* Festigkeit von Wellentunneln. S.B. 4. 49; 116; 161; 5. 508; 557; 621; 677; 734; 785; 830.

3296. *Kriemler.* Über die Untersuchung der Quersteifigkeit oben offener eiserner Tragbrücken. Z.A.I. (2) 8. 73.

3297. *Kriemler.* Ein Fall von Knickung durch eine Zugkraft. D.B.Z. 37. 246.

3298. *E. Kühne.* Betrachtungen über Dampfrohrleitungen. S.B. 6. 637.

3299. *B. R. Leffler.* Formulas for concrete-steel beams. E.N. 50. 320.

**3300.** *W. Linse.* Der eisenverstärkte Beton. S.E.D. 28. 42; 123; 190; 265; 312; 391.

**3301.** *L. Lossier.* Note sur la participation du hourdis à la résistance des nervures dans les constructions en béton armé. S.B.Z. 44. 146.

**3302.** *E. Low.* A formula for crown thickness of masonry arches. E.N. 52. 243; 405. — *J. P. Snow* 405.

**3303.** *P. Ludwik.* Zugversuche mit Flußeisen. T.B. 36. 1.

**3304.** *J. Melan* und *E. Swoboda.* Der Bau der Erzherzog Ludwig-Viktor-Brücke über die Salzach in Salzburg. W.A.B.Z. 69. 1.

**3305.** *K. G. Meldahl.* Einfluß der Stegdicke auf die Tragfähigkeit eines [-Balkens. J.S.G.B. 4. 406.

**3306.** *Mörsch.* Schub- und Scherfestigkeit des Betons. S.B.Z. 44. 295; 307.

**3307.** *E. Mörsch.* Theorie der Betoneisenkonstruktionen. D.B.Z. 37. 210; 223; 231.

**3308.** *R. Neumann.* Die Verstärkung von Trägern aus Schweißeisen durch Aufnieten von Platten aus Flußeisen. C.B.B. 23. 175.

**3309.** *J. Payet.* Einführung einheitlicher Schraubengewinde für Gasapparate. J.G.W. 47. 498.

**3310.** *H. Pilgrim.* Die Knickungsberechnung nach den Versuchsergebnissen. Z.A.I. (2) 9. 241.

**3311.** *Platt.* Die Erhöhung der Bahnsteige der Stadt- und Ringbahn Berlin. M.Z.B.E. 1. 54; 58.

**3312.** *P. P.* Expériences de Rodelet sur la résistance des matériaux. L.C.M. 18. 477; 489.

**3313.** *P. P.* Emploi du béton armé. L.C.M. 19. 308; 320; 332; 345; 356; 380.

**3314.** *P. P.* Conduites et réservoires en ciment armé. L.C.M. 19. 428; 439.

**3315.** *G. Ramisch.* Ermittlung der Wandstärke von Durchlaßröhren aus Stampfbeton. Z.Ö.I.A.V. 55. 106.

**3316.** *K. Rudolf.* Berechnung eines Hochofengebläses. P.M.C. 36. 44; 57; 65; 72.

**3317.** *R. Saliger.* Über den Einfluß der Schubfestigkeit und der Armierung auf die Bruchgefahr in gedrückten Steinprismen. Z.A.I. (2) 9. 525.

**3318.** *R. Saliger.* Berechnung von Stützen aus Eisenbeton mit Berücksichtigung der Eigenspannungen infolge Schwindens. S.D.B. 14. 258.

**3319.** *C. Schmid.* Betongründungen mit Fallbohrer und Fallstümpfel. S.D.B. 14. 405.

**3320.** *A. Schmitz.* Untersuchungen über Zugfestigkeit, Dehnung und elastisches Verhalten von Fe- und Stahlstäben. V.V.G. 82. 243.

**3321.** *A. E. Seaton.* Impact tests. Eg. 78. 728.

**3322.** *A. Sée.* Calcul des parois des silos à grains. G.C. 46. 377.

**3323.** *H. Sellentin.* Die Beanspruchung schnell laufender Schubstangen. S.B. 4. 369; 429.

**3324.** *H. Sellentin.* Die Beanspruchung ebener Schiffsbodenbleche. S.B. 5. 3; 57.

**3325.** *H. Sellentin.* Die Leitnummern des Germanischen Lloyd. S.B. 5. 502.

**3326.** *S. E. Slocum.* Rational formulas for the strength of a concrete steel beam. E.N. 50. 107. — *W. K. Hatt* 144.

**3327.** *S. E. Slocum.* The strength of flat platins with an application to concrete-steel floor panels. E.N. 52. 22.

**3328.** *S. Sor.* Beitrag zur Berechnung von Eisenbetonbauten. M.Z.B.E. 1. 35; 44.

**3329.** *J. Stieghorst.* Beitrag zur Konstruktion von Bootskränen. S.B. 4. 206; 261; 324; 388.

**3330.** *R. Stribeck.* Warmzerreißversuche mit Durana-Gußmetall. Z.V.D.I. 48. 897.

**3331.** *W. C. Unwin.* On testing materials. Am.M. 1904. 971.

**3332.** *L. Vogel.* Graphische Berechnung der Transmissionswellen. P.J. 319. 659.

**3333.** *G. S. Walker.* An chart for calculating the strength of shafts and pins. Am.M. 1903. 1649.

**3334.** *M. Westphal.* Praktische Erfahrungen und Mitteilungen über Rohrleitungen, insbesondere über Dampfrohrleitungen. Z.V.D.I. 48. 588.

**3335.** *W. M. Wilson.* Proof of graphical methods for determining the outline of rollers for making rotary conveyors. Am.M. 1903. 1188.

**3336.** *C. H. Wingfield.* Cast iron for piston rings. Eg. 76. 400.

**3337.** *E. Witt.* Festigkeitsberechnung eines wasserdichten Schotts. S.B. 5. 106.

**3338.** *F. Wittenbauer.* Die Verallgemeinerung der Eulerschen Knicklast. Z.V.D.I. 47. 245.

**3339.** *B. Zschokke.* Untersuchungen über die Plastizität der Tone. (d. u. fr.) B.M.K. 8. 1; 25; 53.

**3340.** *N. N.* Influence des pressions latérales sur la résistance du béton et du ciment à l'écrasement. G.C. 44. 415.

**3341.** *N. N.* Poteaux et piliers en ciment armé. L.C.M. 20. 596; 621.

**3342.** *N. N.* Plate girder webs. E. 98. 257. — *W. E. Lilly* 306. — *S. Mansfield* 375.

**3343.** *N. N.* Ein Beitrag zur konstruktiven Ausführung des Flammrohr-Dampfkessels. P.M.C. 36. 116.

**3344.** *N. N.* A boiler-flue problem. Eg. 75. 705.

**3345.** *N. N.* The accident on HMS „Bullfinch". Eg. 77. 179.

**3346.** *N. N.* Petroleumtank von 5200 cbm Inhalt. P.M.C. 37. 130.

### Flächentheorie.

**3347.** *V. Tallmayer.* Hyperbolische Paraboloidfläche als Pflugstreichbrett. P.J. 319. 632.

### Geometrie.

**3348.** *E. P.* Verschneidung zweier Neigungen. Z.Ö.I.A.V. 56. 222.

**3349.** *J. D. Everett.* On the mathematics of bees cells. Eg. 75. 701.

**3350.** *F. v. Handorff.* Die Ausführung von Kreisteilungen in der Maschinentechnik. Z.W. 7. 361; 379; 393; 407; 421.

### Geschichte der angewandten Mathematik

**3351.** *E. Hammer.* Die Schriften des Heron von Alexandrien über Vermessungslehre und seine geodätischen Instrumente. Z.V. 32. 556. — *Petzoldt* 591.

### Gleichungen.

**3352.** *H. Elias.* Die Lösung von Gleichungen 3. Grades auf dem Rechenschieber. C.B.B. 23. 559.

**3353.** *P. L.* Example d'équation réciproque du 4. dégré. J.G. 46. 87.

### Graphischer Kalkül.

**3354.** *P. Busset-Schiller.* Nouveau procédé graphique de balancement des marches d'escalier. G.C. 46. 13.

**3355.** *Gnuschke.* Neues Verfahren zur zeichnerischen Auswertung schwieriger Funktionen für technische und praktische Zwecke. Z.B.W. 54. 694.

**3356.** *J. Harrison.* Illustrations of graphical analysis. Eg. 76. 403.

**3357.** *Reinhardt.* Graphische Flächenberechnung. C.B.B. 23. 75.

**3358.** *F. Rutsch.* Die Steigungsverhältnisse der Treppen. S.D.B. 13. 117.

**3359.** *J. Schnöckel.* Graphische Integrationen. Z.V. 32. 129.

**3360.** *L. Vogel.* Calcul graphique des arbres de transmission. B.S.E. 105. 975.

### Hydrostatik und Hydrodynamik.

**3361.** *J Adam.* Über Schaufelungen von Francisturbinen. P.J. 318. 449.

**3362.** *H. Adolf.* Erfahrungen bei Anordnung von Wasserleitungsreservoiren. Z.Ö.I.A.V. 55. 72.

**3363.** *F. Ahlborn.* Hydrodynamische Experimentaluntersuchungen. J.S.G.B. 5. 417.

**3364.** *C. Allievi.* Sur la théorie générale du mouvement varié de l'eau dans les tuyaux de conduite. R.D.M. 14. 10; 230.

**3365.** *J. Amsler-Laffon.* Die Theorie der Frankschen Röhre. W.B.S. 1. 174; P.J. 319. 141.

**3366.** *M. H. Bauer.* Internationale Motorbootausstellung Berlin-Wannsee 1902. S.B. 4. 211.

**3367.** *Baum* und *Hoffmann.* Versuche an Wasserhaltungen. Z.V.D.I. 48. 1829; 1905; 1957.

**3368.** *R. Baumann.* Beitrag zur Untersuchung des Verhaltens von Francisturbinen bei veränderlicher Wassermenge, Umdrehungszahl und Gefällshöhe. P.J. 319; 529; 547.

**3369.** *H. Berg.* Die Wirkungsweise federbelasteter Pumpenventile und ihre Berechnung. Z.V.D.I. 48. 1093; 1134; 1183.

**3370.** *Berg.* Étude sur le fonctionement des soupapes des pompes chargées par des ressorts. R.D.M. 15. 450; 544.

**3371.** *W. Bucerius.* Das Umschaltventil für Flügelrad-Wassermesserverbindungen. J.G.W. 46. 61; 86. — *W. Eisner* 247.

**3372.** *G. Cadart* et *L. Barbet.* Des éléments constitutifs d'une voie navigeable. A.P.Ch. (8) 9 A. 212.

**3373.** *C. A. E. B.* Beitrag zur Theorie der Konstanten Frondes zur Bestimmung des Schiffswiderstandes. S.B. 6. 67.

**3374.** *Camerer.* Beiträge zur Bestimmung der Ein- und Austrittsgrößen von Turbinenlaufrädern auf Grund experimenteller Untersuchung. P.J. 319. 817.

**3375.** *J. H. Cardew.* Burraga dam and water supply for the Lloyd Copper Company's mine New South Wales. M.P. I.C.E. 152. 237.

**3376.** *T. Christen.* Neue Belege zu der Geschwindigkeitsparabel 8. Ordnung. Z.G. 6. 175.

**3377.** *G. Crugnola.* Zur Dynamik des Flußbettes. Z G. 5. 241.

**3378.** *Danckwerts.* Die Grundlagen der Turbinenberechnung. Z.A.I. (2) 9. 141.

**3379.** *Danckwerts.* Tabelle zur Berechnung der Stauweiten in offenen Wasserläufen. Z.A.I. (2) 8. 257.

**3380.** *Dariès.* Étude comparative des diverses formules de l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduites. N.A C. (6) 1. 182.

**3381.** *Delemer.* Étude sur les crues de l'Ardèche. A.P.Ch. (8) 14. 130.

**3382.** *A. Dietzius.* Bestimmung der Höhenlage des Systemschwerpunktes durch einen Dockversuch. S.B. 5. 1169.

**3383.** *A. Dietzius.* Über Schwimmdockanlagen. S.B. 6. 421.

**3384.** *R. Escher.* Die Schaufelung der Francisturbine. S.B.Z. 41. 25; 43.

**3385.** *M. Esser.* Untersuchung über die Stabilität eines modernen Schnelldampfers beim Leckwerden des Steuerbordmaschinenraumes. S.B. 4. 1043; 1089; 1129.

**3386.** *Fargue.* Vérification théorique des lois empiriques relatives à la forme du lit des rivières navigeables à fond mobile. A.P.Ch. (8) 10. 179.

**3387.** *Ferchland.* Zur Theorie der Flußbettbefestigungen. Z.A.I. (2) 9. 396.

**3388.** *A. Fliegner.* Ein neuer Weg zur Berechnung der Staukurve. S.B.Z. 42. 89.

**3389.** *A. Fliegner.* Die größte Ausströmungsgeschwindigkeit elastischer Flüssigkeiten. S.B.Z. 43. 104; 140.

**3390.** *A. Foeppl.* Die Theorie des Schlickschen Schiffskreisels. Z.V.D.I. 48. 478; 983. — *F. Berger* 982.

**3391.** *Forbát.* Bestimmung der abzuführenden Größtwassermengen bei Berechnung des Kanalnetzes von Mailand. G.I. 27. 239.

**3392.** *P. Forchheimer.* Wasserbewegung in Wanderwellen. Z.G. 6. 321.

**3393.** *J. Goodman.* The construction of jets. Eg. 77. 350.

**3394.** *J. Goodman.* Hydraulic experiments on an Plunger pump. E. 95. 214; Eg. 75. 326. — *„German engineer"* 494.

**3395.** *J. Goodman.* The governing of impulse water-wheels. Eg. 78. 597.

**3396.** *P. Greiner.* Ermittlung der Wassermengen fließender Gewässer. S.A.Z. 2. 65; 76.

**3397.** *B. F. Groat.* Experiments and formula for the efficiency of tangential water wheels. E.N. 52. 430.

**3398.** *Gröhe.* Bestimmung des Wasserverbrauchs bei Schleußungen. C.B.B. 24. 170.

**3399.** *R. Haack.* Die Wasserbewegung während der Fahrt von Schiffen und ihr Einfluß auf den Schiffswiderstand. Z.V. D.I. 47. 693; 785.

**3400.** *E. P. Hahn.* Governing impulse water-wheels. Eg. 78. 832.

**3401.** *S. Hajós.* Neues Verfahren zur Messung kleiner Wassergeschwindigkeiten. C.B.B. 24. 281.

**3402.** *W. Halbfass.* Stehende Seespiegelschwankungen im Madüsee in Pommern. Z.G. 5. 15; 6. 65.

**3403.** *R. Hartmann.* Beitrag zur Kenntnis der Wirbelbewegung. Z.G. 5. 106.

**3404.** *H. Heimann.* Die Energieumwandlung durch Reibung und ihr Nutzeffekt. P.J. 318. 113.

**3405.** *G. J. Henry* and *J. N. Le Comte.* An efficient high-pressure water-power plant. E.N. 50. 311.

**3406.** *J. Hermanek.* Zur Frage der Bestimmung der Stauweite. Z.G. 6. 186. — *B. Tolmann.* 298.

**3407.** *Herzog.* Notice sur les siphons du Tréport. A.P.Ch. (8) 13. 10.

**3408.** *A. Hirschmann.* Die Kanalisation von Neustadt a. d. H. S.D.B. 13. 28.

**3409.** *W. Horgaard.* Water-tight subdivision of warships. E. 98. 45.

**3410.** *J. A. W.* Raising water by compressed air. Eg. 77. 58. — *C. C. Mason* 135; 223; 340.

**3411.** *A. W. Johns.* The normal pressures of thin moving plates. E. 97. 396.

**3412.** *Khr.* Erfahrungen bei Anordnung von Wasserleitungsreservoiren. J. G.W. 46. 355.

**3413.** *F. B. Kleinhaus.* Diagrams for estimating hydraulic machinery. E.N. 50. 362.

**3414.** *A. Klir.* Winkelschutz mit Wasserdruckbetrieb. W.A.B.Z. 69. 138.

**3415.** *M. Knauff.* Die Kanalisation von Neustadt a. H. T.G. 6. 52. — *A. Hirschmann* 349. — *A. Trübling* 7. 191.

**3419.** *R. Koechlin.* Barrages mobiles cylindriques à grandes portée. Barrages de Schweinfurt. G.C. 44. 261.

**3317.** *G. W. Koehler.* Raschlaufpumpen für Elektromotorantrieb. V.V.G. 82. 197.

**3418.** *C. Körner.* Berechnung der inneren Reibungskomponenten bei Flüssigkeiten längs gegebener Bahn. T.B. 36. 154.

**3419.** *P. Kresnik.* Zur günstigsten Anleitung städtischer Wasserleitungen. Z. Ö.I.A.V. 55. 154.

**3420.** *P. Kresnik.* Das kleinstmögliche Profil der Thalsperremauern. Z.Ö.I.A.V. 56. 534.

**3421.** *F. Kretz.* Versuch über den Verlauf eines wagrechten Wasserstrahles unter Wasser. D.B.Z. 37. 523.

**3422.** *F. Kreuter.* Untersuchung über die natürliche Gleichgewichtsform beweglicher Flußbetten und die naturgemäße Herstellung künstlicher Flußbetten. Z. Ö.I.A.V. 56. 670.

**3423.** *H. Krey.* Wasserstoß und stoßfreie Bewegung des Wassers. Z.A.I. (2) 9. 533; 549. — *Dankwerts* 547. 549.

**8424.** *R. Kuhn.* Die Trassen der österreichischen Kanäle. Z.Ö.I.A.V. 56. 457.

**8425.** *H. Kuss.* Note sur les principaux appareils destinés à prévenir l'envoi des cages aux molettes et leurs chocs contre les taquets du fond. A.D.M.P. (10) 3. 479.

**8426.** *J. Labes.* Unterhaltung der Röhrenwasserleitung vom Sieberfluß zum Bahnhof Herzberg a. H. Z.A.I. (2) 9. 367.

**8427.** *G. M. Lawford.* The flow of water in long pipes. M.P.I.C.E. 153. 297.

**8428.** *Lieckfeldt.* Von der Bewegung des Wassers. C.B.B. 23. 497. — *H. Krey* 24. 625.

**8429.** *Z. v. Limbeck.* Der Fischpropeller. W.A.B.Z. 69. 81.

**8430.** *M. Luxenberg.* Talsperren als Kraftanlagen für Elektrizitätswerke. E.Z. 24. 429.

**8431.** *R. Mansel.* Steamship propulsion. E. 95. 526.

**8432.** *R. Mansel.* Note on the steamship propulsion. E. 96. 382.

**8433.** *R. Mansel.* Trial of the Imperial Russian transport vessel Ocean. E. 96. 331.

**8434.** *W. E. Morey.* Design of a 4000-ton hydraudic press. Am.M. 1904. 1526; 1564.

**8435.** *N. A.* On the heeling and rolling of ships of small initial stability. Eg. 78. 241.

**8436.** *R. A. Niven.* Removing grease from work-spiral gearing. Am.M.1903. 305.

**8437.** *R. Philippe.* La Loire navigable. G.C. 41. 49; 68; 92.

**8438.** *F. Prášil.* Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen. S.B.Z. 41. 207; 233; 249; 282; 297.

**8439.** *W. H. Raeburn.* Calculations for hydraulic punching and shearing machines. Finding the moment of inertia. Am.M. 1904. 128. — *A. H. Jackson* 381. — *C. Herzberg* 562.

**8440.** *A. Rateau.* Note à propos du travail de M. Allievi: Sur la théorie générale du mouvement varié de l'eau dans les tuyaux de conduite. R.D.M. 14. 5.

**8441.** *J. Rey.* La turbine à vapeur du système Rateau et ses applications. M.I.C. 57A. 497.

**8442.** *L. Ribourt.* La régulation des turbines hydrauliques. M.I.C. 57B. 41.

**8443.** *O. Richter.* Beitrag zur Geometrie der Schiffsform S.B. 6. 593; 640; 684; 733.

**8444.** *Rintelen.* Wasserersparnis bei Schiffsschleußen mit hohem Gefälle. A.G.B. 54. 161.

**8445.** *M. Rother.* Die Ergiebigkeit unvollkommener Brunnen. J.G.W. 47. 937; 957.

**8446.** *K. Rudolf.* Bemerkungen über die Ermittlung des Reaktionsdruckes, des Bahndruckes und des spezifischen inneren Druckes von Flüssigkeiten, die in krummen Röhren strömen. Z.G.T. 1. 10; 36.

**8447.** *C. Rudolf.* Über nichtstationäre Strömung von Flüssigkeiten. Z.G.T. 1. 103.

**8448.** *Ruttmann.* Die Abflußverhältnisse bei Durchlässen im Überschwemmungsgebiet. S.D.B. 14. 147.

**8449.** *N. Schmidt.* Untersuchungen über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. Z.V.D.I. 47. 1698; 1783.

**8450.** *A. Schmoll v. Eisenwerth.* Beitrag zur Theorie und Berechnung der hydraulischen Regulatoren für Wasserkraftmaschinen. P.J. 319. 257; 273; 291; 305; 326; 341.

**8451.** *J. Schütte.* Einfluß der Schlingerkiele auf den Widerstand und die Rollbewegung der Schiffe in ruhigem Wasser. J.S.G.B. 4. 341.

**8452.** *W. Schulz.* Überfallwehr. S.D.B. 14. 37.

**8453.** *W. Schulz.* Dimensionierung trapezförmiger Kanalquerschnitte. S.D.B. 14. 45.

**8454.** *W. Schweer.* Graphische Methode der Rohrbestimmung für Wasserheizungen. G.I. 27. 117.

**8455.** *A. Scribanti.* On the heeling and rolling of ships of small initial stability. Eg. 77. 763; 801. — *A. W. Johns* 860. — *G. B. Verrina* 78. 15; 194.

**8456.** *R. Siedek.* Sudie über eine neue Formel zur Ermittlung der Geschwindigkeit des Wassers in Bächen und künstlichen Gewässern. Z.Ö.I.A.V. 55. 98; 117.

**8457.** *R. H. Smith.* Dynamic and commercial energy in turbines. E. 97. 540; 578; 608.

**8458.** *G. Soukup.* Die Versicherung der Fundamente bei der Karlsbrücke in Prag. W.A.B.Z. 69. 91.

**8459.** *Steuernagel.* Zur Kanalisation der Stadt Köln. T.G. 6. 141.

**8460.** *O. V. P. Stout.* Notes on the computation of stream gagings. E.N. 52. 521.

**8461.** *D. W. Taylor.* Über die Entwicklung von Schiffsformen mit Hilfe von Formeln. S.B. 5. 686; 737; 788.

**8462.** *A. Tellier* fils. Note sur les canots automobiles à grande vitesse. M.I.C. 57B. 483.

**8463.** *N. Tjapkin.* Bestimmung der Fülldauer der Schleußenkammer auf dem Ssewernij Donez bei wirksamer Stauoberfläche. Z.G. 6. 145.

**8464.** *P. Tolman.* Studie über die Abflußverhältnisse an der Floßschleuse bei der Staustufe Nr. 1 bei Troja an der Moldau. W.A.B.Z. 69. 103.

**8465.** *G. Vellut.* The flow of liquids in glazed stoneware pipes. M.P.I.C.E. 151. 482.

**8466.** *C. Walckenaer.* Sur les ascenseurs établis par M. M. Samain et Cie. B.S E. 105. 186.

**8467.** *H. Walter.* Neues analytisch-graphisches Verfahren zur Bestimmung der Stauweite. Z.G. 5. 65.

**8468.** *W. Wodička.* Über den hydraulischen Stoßheber. Z.Ö.I.A.V. 55. 76.

**8469.** *A. J. Wojejkow.* Einige Probleme der Seenkunde. Z.G. 5. 1.

**8470.** *P. Yankowsky.* Sur la réversibilité des turbo-machines hydrauliques. R.D.M. 14. 417.

**8471.** *A. W. Young.* The design of a dry dock. Eg. 78. 448.

**8472.** *E. Zetzmann.* Die Gleichgewichtslage des unverletzten und des lecken Schiffes. S.B. 4. 712; 761; 807; 858; 908.

**8473.** *N. N.* Patent Leux. Anordnung der Betriebskessel für die Propeller bei Schiffen. S.B. 4. 93; 145.

### Inhalte.

**8474.** *Barkhausen.* Erdmassenermittlung. D.B.Z. 37. 636.

**8475.** *Briegleb.* Zur Berechnung von Erdmassen. C.B.B. 24. 556.

**8476.** *W. Cantelo.* Measuring external screw thread diameters. Am.M. 1903. 904; 988; 1226.

**8477.** *J. Clark.* Developing the surface of spherical roofs by calculation. Am.M. 1904. 822.

**8478.** *A. Coulmas.* Beitrag zur Bestimmung von Querschnittsinhalten von Bahnkörpern. C.B.B. 23. 249.

**8479.** *V. A. Kauffman.* A method of calculating theorie of cross section. E. N. 52. 576.

**8480.** *Kummer.* Genauigkeit der Flächeninhaltsberechnung mittels der Klothschen Hyperbeltafel. Z.V. 32. 686.

**8481.** *Kummer.* Wie ist die Differenz der zum Zwecke der Flächenabsteckung berechneten Strecken in ihrer Summe gegen eine bereits feststehende Gesamtlänge zu verteilen. Z.V. 33. 11.

**8482.** *K. Lademann.* Inhaltsbestimmung von Parallelogrammen. C.B.B. 24. 290.

**8483.** *E. Maener.* Einrechnen der Schnittpunkte projektierter Erdwerke in Querprofile. D.B.Z. 38. 323.

**8484.** *Puller.* Zur Flächenberechnung. C.B.B. 23. 6. — *Spangenberg* 99.

**8485.** *Puller.* Beitrag zur Ermittlung des Rauminhaltes von Körpern. C.B.B. 24. 342.

**8486.** *Puller.* Bestimmung der Raum- und Oberflächeninhalte eines Zylinders. Z.V. 33. 369.

**8487.** *Puller.* Inhaltsbestimmung von Wegerampen. C.B.B. 24. 598.

**8488.** *Puller.* Die Massenberechnungen für die Kunstbauten der Eisenbahnen. Z.A.I. (2) 9. 551.

**8489.** *G. Rauter.* Die Reaktionstürme und ihre Anwendung in der chemischen Technik. P.J. 318. 179; 219.

**8490.** *J. Schnöckel.* Beiträge zur Flächenberechnung mit der Hyperbelglastafel. Z.V. 32. 369.

**8491.** *R. Schönhöfer.* Genaue zeichnerische Ermittlung des Flächenprofiles und des Grunderwerbes mit Rücksicht auf Querneigung ohne Zeichnung von Querprofilen. Z.Ö.I.A.V. 55. 134; 247. — *L. Szarvas* 246.

**8492.** *A. T. Sisson.* Finding the diameter of a ball cup. Am.M. 1903. 162.

**8493.** *S. Sor.* Die Oberfläche des elliptischen Kegels. Z.A.I. (2) 9. 203.

**8494.** *G. F. Summers.* The weight of solids of revolution. Am.M. 1903. 91.

**8495.** *Zimmermann.* Der Rauminhalt einer Blechmulde. C.B.B. 24. 296.

**8496.** *N. N.* The calculation of the weight of castings with the aid of the planimeter. E. 95. 695.

### Kinematik.

**8497.** *C. Bach* und *E. Roser.* Untersuchung eines dreigängigen Schneckengetriebes. Z.V.D.I. 47. 221.

**8498.** *G. T. Benkett.* A new mechanism. Eg. 76. 777.

**8499.** *R. A. Bruce.* Bevel gears with short teeth. Am.M. 1904. 549.

**8500.** *W. Bucerius.* Graphisches Berechnen von Wechselrädern zum Gewindeschneiden auf Drehbänken. Z.W. 8. 373.

**8501.** *H. A. Coombs.* The art of generating gear teeth. Am.M. 1903. 986.

**8502.** *G. F. Dodge.* Gears for variable center distance. Chordal pitch. Am. M. 1904. 207.

**8503.** *E. Dubosc.* Note sur les engrenages coniques. R.D.M. 14. 181.

**8504.** *S. Edelstein.* Das Kettenschaltgetriebe am mechanischen Webstuhle. P.J. 319. 212; 228; 262; 277; 294; 313; 330; 346; 361; 404; 473; 492; 520; 539; 564; 585.

**8505.** *S. Edelstein.* P.J. 319. 602; 619; 669; 691.

**3506.** *R. E. Flanders.* Constant of depth for gear teeth. Am.M. 1904. 327.

**3507.** *L. A. Freudenberger.* Plotting of speed time curve from the acceleration speed curve. E.W. 42. 96.

**3508.** *L. A. Freudenberger.* Plotting of speed time and speed distance curves from the acceleration speed curve. E.W. 42. 219.

**3509.** *W. Frick.* Grisson-Getriebe. T. 8. 125.

**3510.** *H. v. Glinski.* Konstruktion der Profillote einer Schnecke. Z.V.D.I. 47. 358.

**3511.** *W. E. Jennings.* Formulas for spiral gears. Am.M. 1903. 1359.

**3512.** *J. W.* Berechnung der Teilkegel-, Dreh- und Fräswinkel von Kegelrädern. Z.W. 8. 189.

**3513.** *H. Kratzert.* Zur Erzeugung der Koppelkurve durch 3 Doppelkurbelgetriebe. Z.Ö.I.A.V. 56. 403.

**3514.** *E. Lawrenz.* Etwas über die Konstruktion und Anwendung von „Cams". T. 9. 255.

**3515.** *C. M. Marshall.* Gas engine cams. Am.M. 1904. 1403.

**3516.** *E. Marx.* Konstante Schnittgeschwindigkeit beim Plandrehen und die richtige Schnittgeschwindigkeit beim Längsdrehen. Z.W. 7. 115.

**3517.** *G. Nardin.* Tours verticaux construits par les ateliers Ducommun. B.S.E. 104. 593.

**3518.** *E. C. Oliver.* The solution of problems in spiral gearing. Am.M. 1904. 1218.

**3519.** *A. Schaffer.* Über Zahnräder. Z.Ö.I.A.V. 56. 71; 81.

**3520.** *A. Schiebel.* Die Eingriffsverhältnisse der Zahnräder mit besonderer Berücksichtigung der Schneckengetriebe. T.B. 34. 1.

**3521.** *W. Schladitz.* Vereinfachte Übertragung der Kreisbewegung in eine mehrfach geradlinige. P.M.C. 37. 159.

**3522.** *A. Steiner.* Über Gewinde, deren Herstellung und Untersuchung. Z.W. 7. 203; 435.

**3523.** *J. Torka.* Die Kegelschnitte im Kurbelgetriebe. V.V.G. 83. 225.

**3524.** *J. Wostrowsky.* Grundzüge einer graphostatischen Berechnung bewegter Maschinenteile. Z.Ö.I.A.V. 56. 35; 49; 207. — *F. Wittenbauer* 207.

**3525.** *R. A. Wright.* The Nordberg reversing gear. Am.M. 1904. 751.

**Kreis.**

**3526.** *E. H. Lockwood.* A circle to enclose a given number of smaller circles. Am.M. 1903. 240. — *E. H. Lockwood* 442.

**3527.** *N. N.* Dall bearings with 4 points contact. Am.M. 1904. 226. — *Saffar* 861.

**Kurven.**

**3528.** *F. Boulard.* Note sur un tracé géométrique des paraboles cubiques e tses applications aux lignes d'influence dans les poutres continues. A.P.Ch. (8) 12. 100.

**3529.** *Bückle.* Verbindung zweier Geraden durch eine Gegenkurve mit Zwischentangente. Z.V. 33. 591.

**3530.** *A. Emch.* Two problems in field engineering. E.N. 50. 601.

**3531.** *W. E. Goldsworthy.* Drawing an ellipse. Am.M. 1903. 1293. — *O. Elspen* 1741.

**3532.** *H. Kratzert.* Ist die Perizykloide eine besondere Art der Zykloiden? Z. Ö.I.A.V. 56. 514.

**3533.** *L. Krüger.* Verbindung zweier Geraden durch 2 Kreisbogen und deren gemeinschaftliche innere Tangente. Z. V. 33. 588.

**3534.** *C. M. Kurtz.* A problem in locating turnouts. E.N. 52. 177; 221.

**3535.** *M. d'Ocagne.* Note sur le tracé des intrados en anse. A.P.Ch. 10. 296; 12. 203.

**3536.** *H. Parenty.* Jaugeage des conduites d'eau en service. G.C. 45. 269.

**3537.** *T. V. Powers.* The approximate ellipse. Am.M. 1903. 385. — *F. L. White* 563.

**3538.** *Puller.* Zur Kreisbogenbedekkung. Z.V. 33. 153.

**3539.** *F. Schulze.* Verbindung zweier Geraden durch eine Gegenkurve. Z.V. 33. 185. — *Puller* 587.

**3540.** *H. Szlopka.* A simple method of constructing a parabole. E.N. 50. 204.

**3541.** *R. S. Webster.* Formulas for transition curve. E.N. 50. 14.

**3542.** *N. N.* A geometrical problem. Am.M. 1903. 133.

**3543.** *N. N.* Ellipsendrehbank, System C. Montreuil. P.M.C. 37. 117.

**Logarithmen.**

**3544.** *P. E. Daussy.* Notes relatives aux logarithmes. J.G. 46. 226.

**Magnetismus.**

**3545.** *H. Behn-Eschenburg.* On the magnetic dispersion in induction motors and its influence on the design of these machines. T.E. 52. 525; 647; 741; 821; 954.

**3546.** *G. Benischke.* Die Berechnung der Streuung und des Magnetisierungsstromes von Drehstrommotoren. E.Z. 25. 834.

**3547.** *G. Benischke.* Der magnetische Widerstand von Luftstrecken. E.Z. 25. 810.

**3548.** *P. David.* Anomalies de la composante horizontale du magnétisme terrestre sur le Puy de Dôme. E.E. 33. 188.

**3549.** *I. Döry.* Rechnerische Ermittelung der Magnetisierungskurve. Z.E.W. 21. 185.

**3550.** *F. Emde.* Permanente Magnete. E.Z. 24. 949. — *R. Hiecke* 25. 35; 205. — *M. Korndörfer* 101.

**3551.** *C. F. Guilbert.* Dispersion magnétique dans les moteurs asynchrones. E.E. 39. 241; 331.

**3552.** *R. Hellmund.* Beitrag zur Konstruktion von Mantelmagneten für Bremszwecke. E.Z. 24. 713.

**3553.** *R. Jouaust.* Sur l'effet Wiedemann: torsion des fils sous l'action d'un champ magnétique. E.E. 34. 185.

**3554.** *C. Mourain.* Progrès récents dans l'étude du magnétisme. E.E. 37. 1; 41.

**3555.** *C. Maurain.* Sur les propriétés magnétiques des poudres de fer et l'aimantation spécifique à saturation. E.E. 34. 465.

**3556.** *F. G. Péro.* Über Solenoidkerne. Z.E.W, 22. 579.

**3557.** *R. Richter.* Der Einfluß der Kraftlinienverteilung in einem Eisenring auf die Verluste durch Hysteresis und Wirbelströme. E.Z. 24. 710; 874. — *G. Stern* 838.

**3558.** *J. K. Sumec.* Berechnung des einseitigen magnetischen Zuges bei Exzentrizität. Z.E.W. 22. 727

**3559.** *L. Zischck.* Berechnung der Wicklungshöhe der Magnetspulen bei gegebener Ampèreänderungszahl und bei gegebenem Widerstand des Spulendrahtes. Z.E.W. 21. 471. — *O. F. Schießl* 532.

### Maßsysteme.

**3560.** *G. Dampieri.* Über eine Änderung des absoluten Maßsystems. Z.E.W. 21. 137.

**3561.** *F. Emde.* Das Giorgische Maßsystem. Z.E.W. 21. 341.

**3562.** *E. Kronstein.* Über elektrotechnische Maßsysteme. Z.E.W. 22. 670.

### Maxima und Minima.

**3563.** *E. D. Pierce.* A proof of the law for grouping cells to obtain maximum current. E.W. 42. 559. — *W. J. Humphreys* 674. — *K. E. Guthe* 955.

**3564.** *R. Rüdenberg.* Die günstigsten Kurbelwinkel für stationäre Mehrkurbelmaschinen. P.J. 319. 417.; 437; 456.

**3565.** *N. N.* Der Schneidwinkel der Drehstähle. P.J. 318. 456.

### Mechanik.

**3566.** *A. Sommerfeld.* Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik. Z.V.D.I. 48. 631.

**3567.** *N. N.* Neueste Studien über die Schwerkraft. C.Z.O.M. 24. 157; 167; 180.

### Meßinstrumente.

**3568.** *P. Bautze.* Genauigkeitsgrad der aufzeichnenden Geschwindigkeitsmesser mit zwangläufiger Bewegung, Patent Haußhälter. O.F.E. (2) 40. 145; 181; 199; 221.

**3569.** *G. Butenschön.* Mikrometer-Fernrohr-Entfernungsmesser. C.Z.O.M. 25. 217.

**3570.** *E. Förster.* Beitrag zur Bestimmung der Maßstäbe von Indikatorfedern. Z.V.D.I. 47. 319.

**3571.** *Hammer.* Neue Genauigkeitsversuche mit einem Hammer-Fennelschen Tachymetertheodolith. Z.V. 32. 691.

**3572.** *A. v. Hübl.* Das stereoskopische Meßverfahren. Z.Ö.I.A.V. 56. 661.

**3573.** *A. Mayer* und *E. Wiesmann.* Universalwinkelinstrument. S.B.Z. 44. 186.

**3574.** *Pflücke.* Ein trockener Zug- und Druckmesser. J.G.W. 47. 480.

**3575.** *Puller.* Schnellmesser, ein Schiebetacheometer für lotrechte Lattenstellung, Z.Ö.I.A.V. 55. 322.

**3576.** *Puller.* Schnellmesser II, ein Schiebetachymeter für lotrechte Lattenstellung. Z.V. 32. 649.

**3577.** *Puller.* Beschreibung eines neuen Tachymeterschiebers. Z.V. 33. 53.

### Momente.

**3578.** *A. L. Bell.* Curves of maximum bending moment. E. 95. 469.

**3579.** *H. H. Bowack.* Moment of inertie. E. 97. 644.

**3580.** *C. Fabry.* Méthode pour la mesure du moment d'inertie d'un induit de dynamo. E.E. 35. 321.

**3581.** *L. Heß.* Studie über Querschnittsmomente. Z.Ö.I.A.V. 55. 515.

**3582.** *A. Ludin.* Vereinigung zweier Trägheitsellipsen. S.B.Z. 41. 272.

**3583.** *N. v. Szütz.* Die Bestimmung des Trägheitsmomentes paralleler in derselben Ebene liegender Kräfte in bezug auf eine in der Ebene der Kräfte liegende und zu der Richtung derselben parallele Achse durch den Trägheitshalbmesser. Z.Ö.I.A.V. 56. 546.

### Näherungsmethoden.

**3584.** *M. H. Bauer.* Annäherungsformeln im Schiffsbau. S.B. 4. 375; 435; 482.

**3585.** *W. H. Croker.* Approximating the ellipse by arcs of circles. Am. M. 1904. 528.

**3586.** *L. Herzka.* Über Korbbögen. Z.Ö.I.A.V. 55. 209.

**3587.** *H. Sellentin.* Bemerkung zu einigen Näherungsformeln. S.B. 5. 928.

**3588.** *J. Winter.* Der Korbbogen als Ersatz für die Ellipse. Z.Ö.I.A.V. 55. 434.

### Nomographie.

**3589.** *P. S. Bushnell.* Diagram for finding the diameter of ball bearings. Am.M. 1903. 1392.

**3590.** *A. Coutureau.* Abaque Pellat. Trouver la surface d'un triangle dont on connaît 2 côtés et l'angle compris, sans calcul et en 26 secondes. J.G. 47. 150.

**3591.** *R. Escher.* Tableau graphique pour déterminer la largeur des courroies. B.S.E. 105. 538.

**3592.** *Flamant.* Abaque pour faciliter les calculs relatifs aux distributions d'eau. A.P.Ch. (8) 16. 219.

**3593.** *J. H. Franke.* Geodätisch-graphische Tafeln. Z.V. 33. 555.

**3594.** *M. E.* Graphical representation of logarithms. Am.M. 1903. 1336.

**3595.** *F. Prášil.* Graphische Rechentafel für Bremsversuche. S.B.Z. 41. 69.

**3596.** *R. Stetefeld.* Graphische Tabellen und Diagramme zum Gebrauch bei Berechnungen und Untersuchungen von Kältemaschinen und Kühlanlagen. Z.G.K. 10. 10.

### Numerisches Rechnen.

**3597.** *S. O. Bartlett.* Fractional indexing. Am.M. 1903. 296.

**3598.** *A. G. Collins.* Subtracting fractions. Am.M. 1903. 66.

**3599.** *P. M. Verhoeckx.* Une méthode analytique et graphique pour le calcul des réseaux fermés. E.E. 39. 81; 121.

**3600.** *N. N.* Le nombre des décimales. J.G. 47. 112.

### Optik.

**3601.** *A. Blondel.* Sur le mécanisme de l'arc électrique entre charbons d'après un mémoire de M[me] Hertha Ayrton. E.E. 38. 15; 41.

**3602.** *M. Boehm.* Verfahren zur Photometrie von Gasglühlicht. J.G.W. 47. 411.

**3603.** *K. Bohlan.* Der Hypergon-Doppel-Anastigmat von Goerz. Z.V. 33. 99.

**3604.** *H. J. Christiansen.* Einige Bemerkungen über die terrestrische Refraktion. Z.V. 32. 305.

**3605.** *J. H. Coblyn.* La vision à distance par l'électricité. E.E. 33. 433.

**3606.** *O. Dietrichkeit.* Die geometrische Durchzeichnung eines optischen Systems. C.Z.O.M. 25. 122.

**3607.** *G. Dimmer.* Die Ziele der Leuchttechnik. Z.E.W. 22. 489.

**3608.** *J. Döny.* Photometrie elektrischer Lampen. Z.E.W. 21. 236.

**3609.** *E. A.* Neues Zugbeleuchtungssystem. Z.E.W. 21. 56.

**3610.** *G. Eberhard.* Über die Bestimmung der Farbenkurve von Objektiven mittlerer Brennweite. Z.I. 23. 82.

**3611.** *H. Eisler.* Über den Zusammenhang zwischen Lichtstärke und Temperatur. E.Z. 25. 188; 443. — *F. Jablonski* 374.

**3612.** *R. Etzold.* Über Verbesserungen an astronomischen Instrumenten. D.M.Z. 1904. 53; 61; 93.

**3613.** *J. A. Fleming.* The photometry of electric lamps. T.E. 50. 438; 481; 553; 599; 638; 689; Eg. 75. 128; 159; 193.

**3614.** *P. Gast.* Über die Luftspiegelungen im Simplontunnel. Z.V. 33. 241.

**3615.** *M. Gruber.* Die Versorgung der Schulzimmer mit Tageslicht. G.I. 27. 285.

**3616.** *H. Harting.* Zur Theorie der zweiteiligen astronomischen Fernrohrobjektive. Z.I. 24. 79.

**3617.** *J. Hartmann.* Objektivuntersuchungen. Z.I. 24. 1; 33; 97.

**1618.** *J. Hartmann.* Über ein neues Kameraobjektiv für Spektrographen. Z.I. 24. 257.

**3619.** *C. Henry.* Sur le rendement des foyers lumineux et sur un dispositif très simple permettant d'augmenter le rendement lumineux des foyers à flamme et des lampes à pétrole en particulier. B.S.E. 104. 782.

**3620.** *A. Kauer.* Kombinations- und Mischungsphotometer. J.G.W. 47. 1037.

**3621.** *A. Kerber.* Beitrag zur Bestimmung der sagittalen und meridionalen Bilder. Z.I. 24. 236.

**3622.** *A. Köhler* und *M. v. Rohr.* Eine mikrophotographische Einrichtung für ultraviolettes Licht. Z.I. 24. 341.

**3623.** *H. Krüß.* Die Messung der Helligkeit von Prismenfernrohren. Z.I. 23. 8.

**3624.** *H. A. Krüß.* Die Durchlässigkeit einer Anzahl Jenaer optischer Gläser für ultraviolette Strahlen. Z.I. 23. 197; 229.

**3625.** *M. Lamotte.* Production des rayons cathodiques par les rayons ultraviolets. E.E. 33. 155.

**3626.** *H. Lehmann.* Optische Untersuchungen nach Hartmanns extrafokaler Blendenmethode. Z.I. 23. 289.

**3627.** *H. Lehmann.* Über einen einfachen Spektralapparat für Kopien von Bewegungsgittern. Z.I. 23. 168.

**2628.** *H. Lehmann.* Großes Quarzspektrograph. Z.I. 24. 230.

**3629.** *C. Léonard.* Sur la mesure du flux lumineux des lampes à incandescence. E.E. 40. 128.

**3630.** *O. Lummer.* Die Ziele der Leuchttechnik. J.G.W 46. 281; 307; 325; 345; 370; 385; 406.

**3631.** *K. Martin.* Über eine einfache Art d. Zonenfelderkorrektion. C.Z.O.M. 25. 169.

**3632.** *M. L.* Rayons cathodiques à faible vitesse; leur étude à l'aide de la

phosphorescence; émission secondaire de rayons cathodiques. E.E. 37. 291.

3633. *B. Monasch* et *C. E. Guye.* Recherches sur l'arc alternatif de très faible intensité jaillissant entre électrodes métalliques. E.E. 34. 305; 35. 18.

3634. *L. V. Phillips.* Photometrie und Photometer. C.Z.O.M. 25. 110; 148; 159; 173.

3635. *H. Schmidt.* Die graphische Darstellung des Korrektionszustandes eines Objektivs. C.Z.O.M. 24. 73.

3636. *K. Strehl.* Im Bann der geometrischen Optik. C.Z.O.M. 25. 85.

3637. *K. Strehl.* Widerspruch von Beugungstheorie und geometrischer Optik in wirklichen Fällen von Fernrohr- und Mikroskopobjektiven. C.Z.O.M. 25. 265.

3638. *K. Strehl.* Über den Aplanatismus einzelner dünner Linsen mit Blende im Scheitel. C.Z.O.M. 24. 179; 191.

3639. *K. Strehl.* Komabedingung und Sinusbedingung. C.Z.O.M. 25. 50.

3640. *K. Strehl.* Raumstudien. C.Z.O.M. 24. 182; 193.

3641. *K. Strehl.* Zonenfehler und Anastigmatismus. Z.I. 23. 6.

3642. *K. Strehl.* Zonen und Leistung der Refraktoren. Z.I. 24. 322.

3643. *K. Strehl.* Theorie des Ablese-objektives. Z.I. 23. 305.

3644. *K. Strehl.* Bildgüte und Glassorten. Z.I. 23. 210.

3645. *A. Wingen.* Die verschiedenen Methoden d. Helligkeitsprüfung. G.I. 27. 153.

3646. *K. Zipernowski.* Methoden zur Herabminderung der Kosten der Beleuchtung mittels elektrischer Glühlampen. Z.E.W. 21. 61.

3647. *W. Zschokke.* Doppelanastigmat für Reproduktionen mit vermindertem sekundärem Spektrum. D.M.Z. 1903. 229; 239; C.Z.O.M. 24. 249.

3648. *N. N.* Zwei Versuche zur elektromagnetischen Theorie des Lichtes. C.Z.O.M. 25. 121; 133; 147; 170.

3649. *N. N.* Über die Grenzen der mikroskopischen Abbildung und die Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen. C.Z.O.M. 25. 51.

3650. *N. N.* De l'augmentation du rendement lumineux des lampes à pétrole. G.C. 43. 284.

3651. *N. N.* Radiation and illumination. Eg. 76. 686; 751.

3652. *N. N.* Untersuchung des Spiegels von Reflexionsfernrohren. C.Z.O.M. 25. 14.

3653. *N. N.* Ein neuer zusammenlegbarer Visierapparat. C.Z.O.M. 25. 53.

3654. *N. N.* Ferguson's percentage theodolite. Eg. 76. 759.

**Perspektive.**

3655. *A. Gelbert.* La méthode graphique positiviste de Leonard de Vinci. L.C.M. 19. 213; 221.

**Photogrammetrie.**

3656. *C. Pulfrich.* Über einen Versuch zur praktischen Erprobung der Stereophotogrammetrie für die Zwecke der Topographie. Z.I. 23. 317.

3657. *C. Pulfrich.* Über die Konstruktion von Höhenkurven u. Plänen auf Grund stereophotogrammetrischer Messungen mit Hilfe d. Stereokomparators. Z.I. 23. 43.

3658. *A. Sprung.* Über die Justierung und Benutzung des photogrammetrischen Wolkenautomaten. Z.I. 24. 206.

**Physik.**

3659. *A. Berthier.* Les théories modernes de la matière. La théorie des ions et la théorie des électrons. La transmutation des corps. G.C. 44. 343; 362.

3660. *O. Eisenschiml.* Radioaktive Substanzen. T. 9. 123.

3661. *O. Lodge.* Note on the probable occasional instability of all matter. T.E. 51. 418.

3662. *K. Schreber.* Kraft, Gewicht, Masse, Stoff, Substanz. P.I. 319. 673.

**Planimeter.**

3663. *W. J. Tennant.* The planimeter explained simply, without mathematics. E. 95. 75.

**Rechenapparate.**

3664. *C. G. Barth.* Slide rules for the machine shop as a part of the Taylor system of management. E.N. 50. 512.

3665. *R. A. Bruce.* Calculating cone steps and back gearing ratios by the slide rule. Am.M. 1904. 1090.

3666. *A. Coutureau.* Machine à calculer „Dactyle". J.G. 47. 212.

3667. *Hammer.* Neuer Rechenschieber von Peter. Z.V. 32. 121.

3668. *E. Hammer.* Der Rechenschieber von Frank und 2 andere neue Rechenschieber. Z.V. 32. 401.

3669. *E. Hertzsprung.* Rechenschieber zur Ermittlung der Röhrendurchmesser von Gasleitungen. J.G.W. 47. 825.

3670. *„Maschinist".* Addition and subtraction by the slide rule. Am.M. 1904. 1575.

3671. *Miller.* Rechenscheibe zur Erleichterung der Aufstellung der Dienstpläne für das Lokomotiv- und Zugpersonal. A.G.B. 53. 237.

3672. *W. Owen.* Calculating cone steps and backgearing ratios by the slide rule. Am.M. 1904. 1399.

3673. *Röther*. Die pythagoräische Rechenscheibe und ihre Anwendung. Z.V. 32. 593.

**Reibung.**

3674. *A. Böttcher*. Über den Reibungskoeffizienten für keilförmiges Profil der Reibungsfläche. V.V.G. 83. 349.

3675. *W. T. S. Butlin*. Friction of sliding keyways. Eg. 78. 467.

3676. *F. Drouin*. Le frottement des coussinets à grande vitesse. E.E. 34. 352.

3677. *L. Finzi*. Die Trennung der Reibungsverluste bei elektrischen Maschinen. E.Z. 24. 536. — *G. Dettmar* 632.

3678. *O. Lasche*. Frottement des paliers à grande vitesse. B.S.E. 104. 263.

3679. *H. F. Moore*. Experiments, formulas and constants of lubrification of bearings. Am.M. 1903. 1281; 1316; 1350.

3680. *A. Rejtö*. Der Wert der inneren Reibung (d. fr. u. e.). B.M.K. 9. 257; 272.

3681. *K. Wolters*. Die störenden Bewegungen der Lokomotive unter Berücksichtigung der auftretenden Reibungswiderstände. P.J. 318. 641; 657; 673; 742.

**Statik.**

3682. *F. Arnodin*. Le point à transbordeur de Nantes. N.A.C. (6) 1. 17.

3683. *M. Astier*. Essai d'une théorie des voûtes d'égale résistance. N.A.C. (5) 10. 88; 110; 120.

3684. *E. Atzrott*. Berechnung der Stephanschen Bogenbrücke. P.M.C. 37. 14.

3685. *A. Bachellery*. Note sur un exemple de l'insuffisance d'un guidage diamétral convergent comme dispositif évite-molettes. A.D.M.P. (10) 4. 289.

3686. *G. Beutel*. Größere Betongewölbebrücken mit Gelenken und ihre Lehrgerüste. S.D.B. 13. 410; 14. 2.

3687. *R Bonnin*. The Viaur viaduct on the railway line from Carmaux to Rodez. E.N. 50. 216.

3688. *Brabandt*. Über die ungünstigste Laststellung der parabelförmigen Einflußlinien. C.B.B. 23. 422.

3689. *Brabandt*. Über die Berechnung von Zweigelenkeblechbogen. C.B.B. 24. 561. — *H. Müller-Breslau* 654

3690. *Brabandt*. Über die Ausbildung der Widerlager für eiserne Bogenbrücken. Z A.I. (2) 9. 21.

3691. *A. Cappilleri*. Graphische Ermittlung der Profilnummer eines Z-Eisens, das als Pfette dient. C.B.B. 24. 69.

3692. *C. Christiansen*. Zur Festlegung d. Stelle d. größten Biegungsmomentes für d. unverankerten Bohlwerke. C.B.B. 24. 140.

3693. *J. Clark*. Balancing a valve and diafragm. Am.M. 1904. 1427.

3694. *A. Coulmas*. Geometrische Berechnung des Parallelträgers. C.B.B 24. 615. — *F. Bohny* 656.

3695. *S. K. Drach*. Graphisches Verfahren zur Ermittlung der Einflußlinien für die Horizontalkomponenten der Diagonalenspannungen im Ständerfachwerke. Z.Ö.I.A.V. 56. 488; 657.

3696. *J. Duwe*. Die Ermittlung der Biegungsmomente eines einfachen Trägers auf 2 Stützen durch das A-Polygon. C.B.B. 23. 534.

3697. *H. Engels*. Die Berechnung der Bohlwerke. C.B.B. 23. 273; 649.

3698. *A. Foeppl*. Eine Näherungsformel für die Berechnung von Kettenlinien. C.B.B. 23. 332.

3699. *E. Förster*. Winddruck auf Dächer. P.M.C. 37. 102.

3700. *W. Franck*. Straßenbrücke über die Staatsbahn bei Reutlingen. W.B.S. 1. 60; 68; 76.

3701. *W. Franck*. Neue Straßenbrücke über die Staatsstraße Nr. 42 Stuttgart-Ulm, die Bahnhofsgleise und den Neckar bei Plochingen. S.D.B. 14. 330; 338; 348; 370; 379.

3702. *Gehler*. Berechnung von Zwischenwerten für Gewölbestärken. C.B.B. 24. 330.

3703. *H. v. Glinski*. Zur Bestimmung des Durchhanges und der Spannung in Drähten. E.Z. 24. 254.

3704. *F. Graefe*. Graphische Berechnung der Lagerkräfte für durchlaufende Träger überall gleichen Querschnitts auf beliebig vielen Stützen. C.B.B. 23. 163.

3705. *G. Griffel*. Die Berechnung der Lasthaken und die sich daraus ergebenden Hakenformen bester Materialausnutzung. P.J. 319. 129; 146; 161; 177.

3706. *L. Henneberg*. Über die Bildungsgesetze der Fachwerke und deren Verwendung bei der Bestimmung der Spannungen. Z.A.I. (2) 8. 567. — *H. Müller-Breslau* 9. 33.

3707. *L. Henneberg*. Die sog. Methode des Ersatzstabes. C.B.B. 23. 377.

3708. *L. Henneberg* und *W. Schlink*. Die Theorie der statisch bestimmten Fachwerksträger. Z.A.I. (2) 8. 157.

3709. *R. Heyn*. Die Gitterträger im Dienst d. Schubübertragung. Z.A.I. (2) 9. 7.

3710. *J. L. Hodgon*. The brake horsepower of haulage plant. Eg. 78. 466.

3711. *E. Horowitz*. Beitrag zur praktischen und einfachen Berechnung der Häng- und Sprengwerkskonstruktionen. T.B. 36. 41.

3712. *Jacquier*. Note sur le calcul graphique des ponts en arc à triple articulation par la méthode des lignes d'influence. A.P.Ch. (8) 9. 265.

**3713.** *A. Jöhrens.* Beitrag zur Berechnung von Querschnittsspannungen in Schornsteinen. Z.A.I. (2) 8. 413.

**3714.** *G. Kersten.* Der Glockenstuhl für die St. Paulskirche in München. Z.V.D.I. 47. 1710.

**3715.** *A. Kiefer.* Notiz zur Kräftezusammensetzung in der Ebene. S.B.Z. 43. 68.

**3716.** *A. Kiefer.* Über Kräftezerlegung S.B.Z. 43. 247.

**3717.** *L. Landmann.* Die Bestimmung der Randspannungen von Fabrikschornsteinen. Z.A.I. (2) 9. 253; 441.

**3718.** *T. Landsberg.* Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. C.B.B. 23. 221; 361.

**3719.** *M. Leibbrand.* Die Neckarbrücke bei Neckarhausen. Z.B.W. 53. 457.

**3720.** *G. Leinekugel Le Cocq.* Ponts à transbordeur. G.C. 44. 33; 49.

**3721.** *W. Lindemann.* Der Lokomotivrahmen als starrer Balken auf federnden Stützen. A.G.B. 55. 227.

**3722.** *Mörsch.* Die Isarbrücke bei Grünwald. S.B.Z. 44. 263; 279.

**3723.** *H. Müller-Breslau.* Über die Messung der Größe und Lage unbekannter Kräfte, die auf ruhende Körper wirken. S.B.B 24. 366.

**3724.** *H. Müller-Breslau.* Über parabelförmige Einflußlinien und die Berechnung des Zweigelenkbogens. C.B.B. 23. 113.

**3725.** *H. Müller-Breslau.* Bemerkungen zu der Berechnung des Raumfachwerks. C.B.B. 23. 65; 298; 309; 323. — *Mohr* 237. 402; 641.

**3726.** *H. Müller-Breslau.* Beiträge zur Theorie der Windverbände eiserner Brücken. Z.B.W. 54. 117.

**3727.** *Natorp.* Beitrag zur Berechnung der Eisenbetonstützen bei einseitiger Belastung. C.B.B. 24. 537.

**3728.** *H. Nitzsche.* Die Einflußlinie für den Kämpferdruck des Dreigelenkbogens. C.B.B. 24. 353; 488.

**3729.** *K. Otto.* Berechnung des Drahtdurchhanges. E.Z. 24. 37. — *K. Krohne* 109.

**3730.** *Platt.* Die Erhöhung der Bahnsteige der Stadt- und Ringbahn in Berlin. O.F.E. (2) 41. 51; 75.

**3731.** *P. P.* Voutes surchargées. L. C.M. 18. 45.

**3732.** *P. P.* Voutes en matériaux légers. L.C.M. 18. 189.

**3733.** *Preckwinckel.* Die Druckverteilung im rechtwinkligen Mauerquerschnitte bei Ausschluß von Zugspannungen. Z.A.I. (2) 9. 47.

**3734.** *J. Pühl.* Praktische Berechnungsbeispiele eiserner Dachbinder. P.M.C. 36. 191; 199; 208.

**3735.** *Puller.* Zeichnerische Darstellung der Spannungen einer Kreiskuppel. C.B.B. 23. 172.

**3736.** *G. Ramisch.* Statische Untersuchung einfach gekrümmter Stäbe. Z.Ö.I.A.V. 56. 2.

**3737.** *G. Ramisch.* Kinematisch-statische Untersuchung eines Balkonträgers. Z.Ö.I.A.V. 56. 635.

**3738.** *Ramisch.* Von den Einflußflächen eines Bogenträgers mit 2 an den Kämpfern gelegenen Gelenken. P.J. 318. 561.

**3739.** *G. Ramisch.* Beitrag zur Untersuchung des halbkreisförmigen Bogenträgers mit 2 an den Kämpfern gelegenen Gelenken. Z.Ö.I.A.V. 55. 365.

**3740.** *G. Ramisch.* Untersuchung eines Spitzbogens auf 2 festen Kämpfergelenken. Z.Ö.I.A.V. 55. 241.

**3741.** *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung eines durch 2 Zugstangen und eine Strebe verstärkten Fachwerks. V.V.G. 82. 49.

**3742.** *W. Schlink.* Über räumliche Dachfachwerke. Z.A.I. (2) 9. 183.

**3743.** *W. Schlink.* Über Kuppel- und räumliche Dachfachwerke. V.V.G. 83. 181.

**3744.** *O. Schmiedel.* Berechnung eines 4fach statisch unbestimmten pyramidenförmigen Daches. P.M.C. 36. 97; 105; 113; 120.

**3745.** *O. Schmiedel.* Berechnung eines dreifach statisch unbestimmten Rahmens. P.M.C. 36. 178.

**3746.** *O. Schmiedel.* Über die Berechnung von Eisenbahnhochbauten bezüglich der horizontalen Windkräfte. Z.A.I. (2) 8. 37; 207. — *A. Francke* 275; 278.

**3747.** *R. Schorlemmer.* Zeichnerische Ermittlung des A-Polygons für Träger auf 2 Stützen mit Hilfe eines einzigen A-Polygons. C.B.B. 24. 100.

**3748.** *A. Sengel.* Berechnung des Durchhanges und der Spannung in frei gespannten Drähten. E.Z. 24. 802.

**3749.** *F. Stark.* Graphische Bestimmung der Schutzlinie eines gelenklosen, tangential eingespannten Bogenträgers. T.B. 34. 75.

**3750.** *H. Steinmann.* Bestimmung der günstigsten Auflagerpunkte eines Balkens auf 2 Stützen. S.T.Z. 2. 11.

**3751.** *Stephan.* Die Drahtseilbahnen. P.J. 319. 420; 468; 502; 533; 680; 695; 725.

**3752.** *N. v. Stütz.* Grundlage für eine analytische Theorie der äußern Kräfte der kontinuierlichen Träger beliebigen Querschnitts mit Rücksicht auf den Einfluß eines Widerstandes gegen Drehung an den Stützen. Z.Ö.I.A.V. 56. 424.

**3753.** *E. Thuasne.* Calcul d'un plancher à poutres et poutrelles associées. N.A.C. (6) 1. 90.

**3754.** *Virard.* Note sur la construction du viaduc des Fades. A.P.Ch. (8) 11. 99.

**3755.** *C. Vlachos.* Zur zeichnerischen Berechnung der durchgehenden Träger bei Belastung mehrerer Öffnungen. C.B.B. 24. 86.

**3756.** *P. Weiske.* Die Anwendung von Kraft- und Seileck auf die Berechnung der Beton- und Betoneisenkonstruktionen. P.J. 318. 769; 795.

**3757.** *K. Wieghardt.* Zur Statik der Fachwerke mit schlaffen Diagonalen. C.B.B. 24. 390. — *J. Labes* 656.

**3758.** *N. N.* Erleichterung in der Momentenbestimmung für Eisenbahnbrückenträger. P.J. 318. 542.

**3759.** *N. N.* Eine neue Gravitationswage. C.Z.O.M. 24. 259.

**3760.** *N. N.* Kugellager. Z.W. 6. 252.

**3761.** *N. N.* Schraubstock mit Grob- und Feingewinde. Z.W. 8. 176.

**3762.** *N. N.* Dynamomètre de transmission. G.C. 43. 332.

### Stereometrie.

**3763.** *F. Bramwell.* Geometrical problem. E. 95. 248.

### Stoß.

**3764.** *G. Kapsch.* Über die Stoßdeckung zusammengesetzter Stäbe in Eisenkonstruktionen. Z.A.I. (2) 9. 405.

### Tafeln.

**3765.** *R. A. Lachmann.* Table of spares obtainable from round stock. Am. M. 1904. 939.

**3766.** *A. Schleussinger.* Zahlentafeln zum Multiplizieren und Dividieren. Z.V. 32. 405.

### Trigonometrie.

**3767.** *A. L. Bell.* Notes on tacheometry: a comparison of systems. Eg. 78. 528.

**3768.** *M. Fischl.* Die Berechnung von Muttergeleisen. Z.Ö.I.A.V. 55. 87. — *G. Červinka* 475.

**3769.** *Hammer.* Eine Teilungsaufgabe. Z.V. 33. 97.

**3770.** *A. Llano.* The 3 point problem in plane table surveying. E.N. 52. 590.

**3771.** *W. Müller.* Das Seibtsche Nivellierverfahren. S.D.B. 113. 246; 254.

**3772.** *J. Pellat.* Sur le calcul de la méridienne. J.G. 47. 53; 89.

**3773.** *E. Puller.* Zur Aufgabe des Gegenschnittes. Z.V. 32. 432.

**3774.** *Puller.* Zur Aufgabe des Rückwärtseinschneidens. Z.V. 33. 194.

**3775.** *Puller.* Zur Berechnung der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens. Z.V. 33. 697.

**3776.** *Puller.* Näherungsformel für den Distanzstab. Z.V. 32. 119.

**3777.** *Puller.* Schnellmesser II, ein Schiebetachymeter für lotrechte Lattenstellung. Z.A.I. (2) 9. 399.

**3778.** *Rothkegel.* Über Verschiebungen von trigonometrischen und polygonometrischen Punkten im Ruhrkohlengebiet. Z.V. 32. 217.

**3779.** *J. L. Sanguet.* Topographie. J.G. 46. 33.

**3780.** *J. Schnöckel.* Teilung eines Dreiecks. Z.V. 33. 121.

**3781.** *Schuster.* Eine Teilungsaufgabe der Praxis. Z.V. 32. 378.

**3782.** *H. Sosona.* Beziehung zwischen Scheiteldreiecken und zugehörigen Konvergenzdreiecken sowie deren Anwendung bei Grenzregulierungsaufgaben unter Berücksichtigung von Bonitäten. Z.V 33. 689.

**3783.** *Wildt.* Zur Proportionalteilung an Grundstücken. Z.V. 33. 665.

**3784.** *H. Wolff.* Zusammenstellung der trigonometrischen Funktionen 0°, 30°, 45°, 60°, 90°. Z.V. 33. 699.

**3785.** *L. Zimmermann.* Schematische Anordnung der Teilungsrechnungen. Z.V. 33. 402.

### Verbindungskurven.

**3786.** *S. M. W.* Standard forms of lettering points on transition curves. E.N. 50. 246.

### Wärmelehre.

**3787.** *A.* Die Theorie der Dampfturbinen. Z.Ö.I.A.V. 56. 282.

**3788.** *L. Arndt.* Über die Bestimmung von Schmelzpunkten bei hohen Temperaturen. V.V.G. 83. 265.

**3789.** *E. F. Baker.* The management of Belleville boilers at sea. Eg. 77. 619.

**3790.** *F. Barbier.* Expériences sur des cheminées et des échappements de locomotives. G.C. 45. 201.

**3791.** *R. Barkow.* Beiträge zur Berechnung der Gasmaschine. Z.V.D.I. 47. 933.

**3792.** *L. Battu.* Utilisation of exhaust steam in low-pressure steam turbines. E.N. 52. 282.

**3793.** *L. Battu.* Utilisation of exhaust steam in steam turbines. E. 98. 455.

**3794.** *L. L. Bentley.* Locomotive steaming capacity. A.E.R.J. 78. 258.

**3795.** *P. Berkitz.* Zur Theorie der Kühlverfahren von Linde, Siemens und Mix mittels Kaltluftmaschine. P.J. 318. 5; 29.

**3796.** *G. Berling.* Neue Versuche über Oberflächenkondensation mit getrennter

geschwindigkeit, Dampfgewicht und Düsenquerschnitt. Z.G.T. 1. 145.

3835. *A. Langen*. Untersuchungen über die Drücke, welche bei Explosionen von H und CO in geschlossenen Gefäßen auftreten. Z.V.D.I. 47. 622.

3836. *H. Le Chatelier*. Observations préliminaires au sujet de la décomposition des ciments à la mer. A.D.M.P. (10) 6. 251.

3837. *L. Lecornu*. Sur les explosions de chaudières. G.C. 46. 44.

3838. *R. A. Lehfeldt*. The evaluation of the absolute scale of temperature. Eg. 75. 503.

3839. *A. M. Levin*. The flow of steam through nozzles. Am.M. 1904. 854.

3840. *E. Lewicki*. Die Anwendung hoher Erhitzung beim Betrieb von Dampfturbinen. Z.V.D.I. 47. 441; 491; 525.

3841. *O. Lodge*. Entropy. T.E. 50. 560. — *H. Poincaré* 788. — *M. Planck* 821.

3842. *M. Longridge*. Gas, oil and steam for power. E. 98. 377; 403.

3843. *H. Lorenz*. Abriß der geschichtlichen Entwicklung der Wärmelehre. Z. G.K. 11. 101; 121; 141.

3844. *H. Lorenz*. Die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes. Z.V.D. I. 48. 698.

3845. *H. Lorenz*. Neuere Versuche über die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes. Z.V.D.I. 48. 1189.

3846. *F. Lürmann*. Die thermischen Vorgänge im Gaserzeuger. S.E.D. 23. 433; 515; 1154. — *K. Kröker* 1151.

3847. *F. Mall*. Veränderung des volumetrischen Wirkungsgrades bei Kompressoren. Z.G.K. 11. 104.

3848. *C. Marr*. Die Einrichtungen zum Erwärmen von Wasser. G.I. 26. 73.

3849. *S. Martens*. Das Dampfdruckminderungsventil. G.I. 26. 201.

3850. *R. Mewes*. Zusammenhang zwischen der kinetischen und der Vibrationstheorie der Gase. P.J. 318. 42; 75.

3851. *G. Moeller*. Bestimmung von Verbrennungswärmen mit dem Hempelschen Kalorimeter. J.G.W. 46. 760.

3852. *R. Mollier*. Neue Diagramme zur technischen Wärmelehre. Z.V.D.I. 48. 271.

3853. *R. Mollier*. Dampftabelle für $SO_2$. Z.G.K. 10. 125.

3854. *N*. Erfahrungen und Beobachtungen beim Härten von Stahlwerkzeugen. Z.W. 8. 206.

3855. *B. Osann*. Hochofenexplosionen bei Stürzen der Gichten. S.E.D. 23. 773.

3856. *R. Proell*. Thermodynamische Rechentafel für Dampfturbinen. Z.V.D. I. 48. 1418.

3857. *F. Punga*. Verluste durch Joulesche Wärme in einen Käfiganker. Z.E. W. 22. 183.

3858. *Rateau*. Theorie und Wirkungsweise der Strahlkondensatoren. P.J. 319. 785; 807.

3859. *A. Rateau*. Different applications of steam turbines. Eg. 47. 863.

3860. *P. Razous*. L'humidification des locaux d'industrie textile. G.C. 45. 325.

3861. *F. Richter*. Fonctionnement de la vapeur surchauffée dans les machines à pistons. R.D.M. 15. 118.

3862. *Rietschel*. Zur Erzielung der generellen Regelung der Niederdruckdampfheizungen G.I. 26. 37; 269. — *O. Ginsberg* 368.

3863. *R. Rothe*. Über die Herstellung und den Gebrauch der Pentanthermometer. Z.I. 24 47.

3864. *H. Royer*. Sur un nouveau genre d'appareils thermiques. R.D.M. 15. 413; 521.

3865. *H. Russell*. Ein Beitrag zur Frage der Wärmekoeffizienten in der Praxis. G.I. 27. 598.

3866. *S*. Approximate formula for mean effective pressure in steam engines. E.N 50. 13.

3867. *E. Ste Claire-Deville*. Abhängigkeit der Leuchtkraft des Gasglühlichts vom Heizwert des Gases. J.G.W. 47. 21; 46; 75; 90.

3868. *G. Schenek*. Über die Mechanik der Muskelmaschine. Z.V.D.I. 47. 1350.

3869. *E. Schimanek*. Versuche mit Verbrennungsmotoren. Z.V.D.I. 47. 81.

3870. *K. Schreber*. Zur Berechnung der Vorgänge in den Gasmotoren. P.J. 318. 433; 454.

3871. *K. Schreber*. Der Arbeitswert der Heizgase und seine Ausnutzung. P.J. 319. 113; 133; 151; 166; 179; 196; 225.

3872. *W. Schüle*. Über die Ausströmung der gesättigten Wasserdämpfe. P.J. 318. 855; 369; 388.

3873. *L. H. Schütz*. Die neuesten Fortschritte in der Messung hoher Temperaturen. Z.V.D.I. 48. 155.

3874. *W. Schweer*. Umgekehrte Zirkulation bei Wasserheizung und deren Beseitigung. G.I. 26. 581; 27. 85. — *H. Labermann* 27. 40.

3875. *Sekutowicz*. Recherches sur la transmission de la chaleur dans les appareils d'évaporation à multiple effet. M. I.C. 56 B. 203.

3876. *Seufert*. Wärmetechnische Untersuchung eines Zimmerofens. Z.B.D. 8. 78; 87.

**3877.** *R. H. Smith.* The expansion separation and compression of wet steam. E. 95. 585.

**3878.** *R. H. Smith.* A new theory of heat power plants. E. 96. 34; 81; 107; 131; 153; 179.

**3879.** *Sorel.* Sur les phénomènes de la combustion dans les moteurs fixes à alcool. R.D.M. 14. 121; 521.

**3880.** *R. Stetefeld.* Die Berechnung der Kompressorgröße und des Kraftverbrauches neu zu erbauender Kältemaschinen aus der graphischen Konstruktion des Indikatordiagrammes. Z.G.K. 11. 226.

**3881.** *A. Stodola.* Die Dampfturbinen u. die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. Z.V.D.I. 47. 1; 127; 164; 202; 268; 334.

**3882.** *Stodola.* Les turbines à vapeur et l'avenir des moteurs thermiques. R. D.M. 14. 41; 152.

**3883.** *H. Strache* und *R. Jahoda.* Zur Theorie des Wassergasprozesses. J.G. W. 46. 764.

**3884.** *Strahl.* Vergleichende Versuche mit gesättigtem und mäßig überhitztem Dampf an Lokomotiven. Z.V.D.I. 48. 17.

**3885.** *Strahl.* Rauchgasanalysen und Verdampfungswärmen an Lokomotiven. A.G.B. 55. 81; 101.

**3886.** *Strahl.* Comparative tests of locomotives used saturated and superheated steam. R.G. 54. 130.

**3887.** *J. Swinburne.* Entropy or thermodynamics from an engineers standpoint. Eg. 76. 271; 305; 347; 373.

**3888.** *J. Swinburne.* The reversibility of thermodynamics. T.E. 51. 894.

**3889.** *J. Traube.* Die physikalischen Eigenschaften der Metalle vom Standpunkte der Zustandsgleichung von van der Waals. Z.V.D.I. 47. 1186.

**3890.** *J. de Traz.* La traction électrique et les trains à unités multiples. M.I.C. 56B. 149.

**3891.** *H. H. Vaughan.* The value of heating surface. R.G. 54. 308.

**3892.** *O. Venator* und *W. Cramer.* Über die Frage der Luftentfeuchtung in Luftkühlern. Z.G.K. 11. 5; 24.

**3893.** *K. Wendt.* Untersuchungen an Gaserzeugern. Z.V.D.I. 48. 1793.

**3894.** *Weyrauch.* Über die spezifischen Wärmen des überhitzten Wasserdampfes. Z.V.D.I. 48. 24; 50.

**3895.** *Weyrauch.* Des chaleurs spécifiques de la vapeur surchauffée. B.S.E. 105. 206.

**3896.** *H. W. Wiebe.* Die Spannung des Wasserdampfes über 100°. Z.V.D.I. 48. 315.

**3897.** *A. Witz.* Sur la surchauffe de la vapeur. E.E. 35. 441.

**3898.** *N. N.* Rankines' thermodynamic function and entropy. E. 95. 210.

**3899.** *N. N.* Commercial possibilities of liquid air. E. 98. 612.

**3900.** *N. N.* Ausnutzung des Auspuffdampfes von Dampfmaschinen in einer mit einem Wärmespeicher verbundenen Niederdruckturbine. P.J. 318. 660.

**3901.** *N. N.* Blast-furnace gas engines and steam engines. Eg. 75. 694.

**3902.** *N. N.* Bei Dampfkesselanlagen in Betracht kommende ökonomische Fragen. P.M.C. 37. 21.

**3903.** *N. N.* Bedingungen, die an die Armaturen der Dampfkessel gestellt werden, sowie Bestimmungen über die Größenverhältnisse derselben und für die erforderlichen Speiseapparate. P.M.C. 37. 45.

**3904.** *N. N.* Neuere Versuche an Spiritusmotoren. P.J. 318. 805; 319. 388.

**3905.** *N. N.* Superheat during compression in refrigeration machines. E. 96. 251.

**3906.** *N. N.* The steaming capacities of locomotives. R.G. 53. 440.

### Zeichnen.

**3907.** *R. D. S.* Scribing an arc of large radius. Am.M. 1904. 499.

### Zeichenwerkzeuge.

**3908.** *W. H. Bradley.* Draftmans special angle. Am.M. 1904. 764.

**3909.** *E. A. Chamberlin.* A draftsmans triangle. Am.M. 1904. 87.

**3910.** *T. Haas.* Zahnkurvenzeichenmaschine. Z.V.D.I. 47. 713.

**3911.** *Hammer.* Kurvenpalette. Z.V. 32. 315.

**3912.** *Koller.* Zwei neue Quadrat- und Liniennetzzeichner. Z.V. 32. 569.

**3913.** *Mahon.* Rapport sur le dessinateur universel Little. B.S.E. 105. 61.

**3914.** *A. W. Mc. Alpine.* A draftsmans adjustable triangle. Am.M. 1904. 89.

**3915.** *G. Pellehn.* Der Pantograph. D.M.Z. 1903. 85; 93; 105; 113; 125.

**3916.** *Puller.* Ein neues Zeichenviereck. C.B.B. 24. 108.

**3917.** *E. Puller.* Weichenviereck 1:10, 1:9 und 1:7. Z.V. 32. 414.

**3918.** *E. Puller.* Zeichenviereck mit verschiedenen Neigungen. Z.V. 33. 228.

**3919.** *Tibbab.* An isometric triangle. Am.M. 1903. 208.

**3920.** *J. C. Wiltmore.* A triangle for constructing equivalent geometrical figures. Am.M. 1904. 412. — *M.E.* 937.

**3921.** *N. N.* Calibre pour le tracé des hexagones. G.C. 45. 381.

**3922.** *N. N.* A graduated curve. Am. M. 1904. 1210. — H.I. 1376.

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

**Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29**
(vom 1. Oktober 1906 an: Stuttgart-Degerloch)

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.


---

## INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



---

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

**P. Bohl, P. Debye, F. Dingeldey, E. Doležal, R. Gans, A. Grünwald, A. Kalähne, W. Láska, R. Mehmke, M. Milankovitch, R. Müller, C. Runge, Fr. Schilling, Fr. Schilling, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, Fr. Ulkowski, P. Werkmeister, C. W. Wirtz, A. Wlassow, E. Wölffing.**

# Über die Kommutation des Stromes in Gleichstromgeneratoren.

Von Paul Riebesell in Hamburg.

## § 1.

## Einleitung.

„Die dynamoelektrischen Maschinen sind in ihrer praktischen Entwicklung der theoretischen Behandlung vorausgeeilt, und erst nachträglich hat man versucht, die in ihnen stattfindenden Vorgänge durch mathematische Formeln darzustellen.“ Dieser Satz, den Clausius 1883 seiner für die Theorie der Dynamomaschine grundlegenden Arbeit (Wiedemanns Annalen Bd. 20) voransetzte, ist, wenn auch in eingeschränktem Maße, noch heute auf den Dynamobau anzuwenden. Die Abhängigkeit der Klemmenspannung $K$ einer Maschine von dem Gesamtstrom $2I$, vom Erregerstrom $J$, von der Tourenzahl $n$, vom Bürstenverschiebungswinkel $\varphi$ und dem Kurzschlußstrom $i$, d. h. also die Funktion $K = F(I, J, n, \varphi, i)$, ist immer noch nicht genügend bekannt, um eine exakte Vorausberechnung der Maschine zu ermöglichen oder mit Sicherheit Konstruktionsregeln aufzustellen. Vor allem sind es die Vorgänge bei der Kommutation, die diese Unsicherheit bewirken, sodaß man bei der Einstellung der Maschinen auf Funkenlosigkeit lange Zeit nur auf Probieren angewiesen war. So liegen den älteren Arbeiten, der zitierten von Clausius und ihrer Fortsetzung von Stern (Wiedemanns Annalen Bd. 26) falsche Vorstellungen über die Kommutation zugrunde. Erst im letzten Jahrzehnt hat sich eine große elektrotechnische Literatur mit der Aufstellung einer einwandsfreien Kommutationstheorie beschäftigt, so besonders die Abhandlungen der Herren Fischer-Hinnen (Elektrotechnische Zeitschrift (E. T. Z.) 1896 und E. T. Z. 1898, Die Gleichstrommaschine, 1899), Thorburn Reid (The Electrician 1898), Arnold und Mie (E. T. Z. 1899), Arnold (Die Gleichstrommaschine I, 1902), Kapp, Isler (E. T. Z. 1899), Prenzlin (E. T. Z. 1902) und Niethammer (Berechnung und Entwurf elektrischer Apparate und Maschinen I, 1904).

In meiner Dissertation (Über den Kurzschluß der Spulen und die Vorgänge bei der Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. Ein Beitrag zur Theorie der Dynamomaschine. Kiel 1905) habe ich diese älteren Arbeiten einer Kritik unterzogen. Auf einen dabei von mir begangenen Fehler habe ich in der E. T. Z. 1906, Heft 3, hingewiesen. Die *Integrationskonstante* der Kurzschlußdifferentialgleichung *ist nämlich nicht gleich Null*, wie ich glaubte, sondern im allgemeinen *von Null verschieden*. Wie ich bereits dort angezeigt habe, hat mich dieser Umstand veranlaßt, *neue Methoden zur Auflösung der Kurzschlußdifferentialgleichung* auszuarbeiten. Aber schon in meiner Dissertation bildete die Untersuchung der Kurzschlußstromkurve *nur einen Teil* der Betrachtungen, und die ganze Frage wurde *von einem viel allgemeineren Gesichtspunkt* aus behandelt. Das ist auch unbedingt nötig; denn die neueren Arbeiten der Herren Fischer-Hinnen und Arnold, zu denen auch noch die Dissertation von Herrn R. Pohl (Über magnetische Wirkungen der Kurzschlußströme in Gleichstromankern. Dissertation Hannover. Stuttgart 1905) und die Abhandlungen der Herren Benischke (E. T. Z. 1903 und 1904) und Hahnemann (E. T. Z. 1906) gekommen sind, haben gezeigt, daß die Resultate, welche aus der früher, besonders von den Herren Arnold und Mie (a. a. O.), zugrunde gelegten Kurzschlußdifferentialgleichung gefolgert sind, *in Widerspruch mit den Tatsachen der Elektrotechnik stehen*, und diese Gleichung daher vielfach *nicht einmal als erste Annäherung an die in der Praxis bestehenden Verhältnisse* gelten kann. Im folgenden soll nun für einen einfachen Fall eine möglichst alle neueren Resultate berücksichtigende Theorie des Gleichstromgenerators geliefert werden.

Inzwischen ist in dieser Zeitschrift (53. Band, 1. Heft, S. 37—60) eine Kritik meiner Dissertation von Herrn Mie erschienen, die ich nicht unbeantwortet lassen kann. Auf die gehässigen persönlichen Bemerkungen werde ich nicht eingehen, sondern nach der Darlegung meiner eigenen, *schon vor dem Erscheinen der Mieschen Arbeit* in der E. T. Z. angekündigten Lösungsmethoden in § 6 in streng sachlicher Weise meine Entgegnung auf die *größtenteils völlig unberechtigten* Angriffe dieses Herrn bringen.

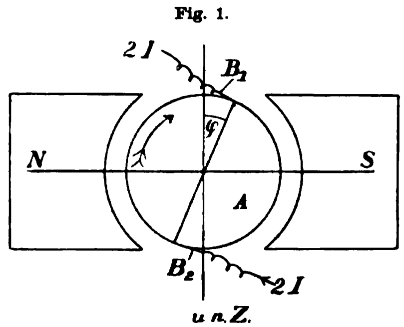
## § 2.

## Die Vorgänge bei der Kommutation.

Den Betrachtungen soll ein zweipoliger Gleichstromgenerator zugrunde gelegt werden, wie er in Fig. 1 schematisiert ist.

Es sind $N$ und $S$ die beiden Feldmagnete, $A$ ein glatter Ringanker mit einfacher, fortlaufender Wicklung, der sich in der Pfeilrichtung drehen möge. $B_1$ und $B_2$ sind die Bürsten, die der Einfachheit halber direkt auf dem Anker schleifend gedacht sind. Um den Bürstenverschiebungswinkel $\varphi$ seien sie gegen die ursprüngliche neutrale Zone (u. n. Z.) verschoben. Die Bürstenbreite sei gleich der Breite einer Kollektorlamelle. Dann wird ein Moment des Kurzschlusses bei der Kommutation durch Fig. 2 veranschaulicht, wo die Bürste $B$, den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend, auf dem Kollektor $K$ schleift. Ist dann:

Fig. 1.




$I$ die Stärke des in jeder Armaturhälfte fließenden Stroms, die vorläufig als konstant angesehen wird;

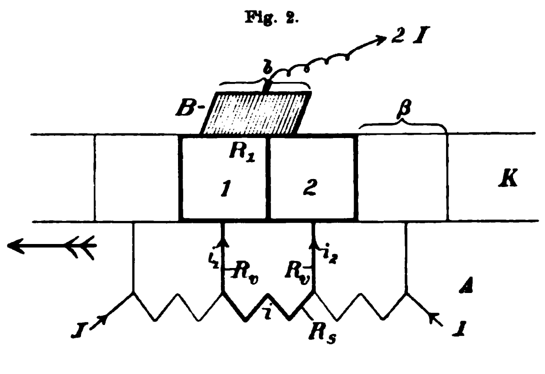
$i$ die Stärke des Stromes in der kurzgeschlossenen Spule zur Zeit $t$, wenn $t$ eine beliebige Zeit, vom Beginn des Kurzschlusses an gerechnet, bedeutet;

$i_1$ und $i_2$ die Stromstärken in den Verbindungen zu den Lamellen 1 und 2;

$R_s$ der Widerstand der kurzgeschlossenen Spule;

$R_v$ der Widerstand von je einer Verbindung zwischen Armatur und Kollektor;

Fig. 2.




$R_1$ der Übergangswiderstand vom Kollektor zur Bürste, wenn diese ganz aufliegt;

$k$ die Zahl der Kollektorlamellen;

$T$ die Zeit, während welcher der Kurzschluß anhält, vom Beginn des Kurzschlusses an gerechnet;

so ist die *Gleichung der Kurzschlußstromkurve:*

$$(1) \qquad L_s \frac{di}{dt} + E' + R_s i + R_v i_1 - R_v i_2 + A_1 i_1 - A_2 i_2 = 0,$$

wo $L_s$ der scheinbare Selbstinduktionskoeffizient, d. h. der durch Selbst-

induktion und gegenseitige Induktion hervorgerufene, $E'$ die kommutierende $EMK$; $A_1$ und $A_2$ die variablen Übergangswiderstände von den Kollektorlamellen zur Bürste; $i_1 = I + i$ und $i_2 = I - i$.

Die Kenntnis des Verlaufs der $i$-Kurve hat für die Technik eine große Bedeutung. Nicht nur ist jede exakte Vorausberechnung der Maschine ohne ihre Kenntnis unmöglich, sondern vor allem gibt sie uns Aufschluß über die Ursachen der Erwärmung und Funkenbildung an der Bürste. Da es sich für die Technik darum handelt, eine Theorie der funkenlosen Kommutierung zu schaffen, so werden wir aus der obigen Gleichung *die Bedingungen für einen funkenfreien Gang* aufzustellen suchen.

Die Ursachen der Funkenbildung führte man früher allein darauf zurück, daß infolge der Selbstinduktion der Strom $i$ zur Zeit $T$ noch nicht zu $-I$ kommutiert wäre, und daher am Schluß der Kurzschlußperiode eine Unterbrechung des Stromes stattfände. Herr Thorburn Reid hat zuerst die Ansicht ausgesprochen, daß die Funken von einer zu großen Stromdichte unter der Bürste herrühren, und Herr Fischer-Hinnen hat dann gezeigt, wie aus Gleichung (1) hervorgeht, daß zur Zeit $t = T : i$ immer gleich $-I$ ist, die Funken daher nur durch die große Spannungsdifferenz oder Stromdichte erzeugt werden können. Aber auch zu Anfang und während der Kurzschlußperiode muß ein zu starkes Anwachsen der Potentialdifferenz unter der Bürste vermieden werden, kurz $i$ muß für Funkenfreiheit ganz bestimmten Bedingungen genügen. Die Gleichung (1) liefert dann für ein vorgeschriebenes $i$ ein bestimmtes $E'$, d. h. eine bestimmte Stelle des Feldes oder einen bestimmten Bürstenverschiebungswinkel. Die so entwickelten günstigen Bedingungen sind mit der Hauptgleichung des Generators für die Klemmenspannung: $K = F(I, J, n, \varphi, i)$ zu vergleichen, wodurch eine Vorausberechnung ermöglicht wird. Wird andrerseits, wie dies neuerdings häufig der Fall ist, von Leerlauf bis Vollast eine konstante Bürstenstellung verlangt, so sind die Grenzen zu ermitteln, in denen dies zulässig ist.

## § 3.

## Die Lösung der Kurzschlußdifferentialgleichung.

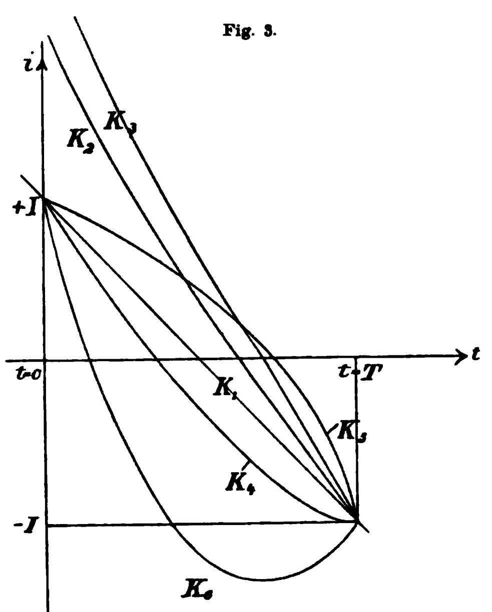
Wird in (1) die gegenseitige Induktion vernachlässigt, der Selbstinduktionskoeffizient $L$ und der Übergangswiderstand zwischen Bürste und Kollektor $R_1$ als konstant angenommen, $\frac{t}{T} = x$ gesetzt, und, da die Bürstenbreite $b$ gleich der Lamellenbreite $\beta : A_1 = \frac{R_1 T}{T - t}$, $A_2 = \frac{R_1 T}{t}$,

außerdem $R = R_s + 2R_v$, und die kommutierende $EMK: E'$ als lineare Funktion von $t$ gleich $E + Ht$ gesetzt, sodann $\frac{R_1 T}{L} = \tau$ und $\frac{R \cdot T}{L} = \tau'$, so nimmt (1) die Gestalt der Mieschen Gleichung an:

$$(2)\quad \frac{di}{dx} + i\left(\tau' + \frac{\tau}{x} + \frac{\tau}{1-x}\right) + I\left(\frac{\tau}{1-x} - \frac{\tau}{x}\right) + E\frac{T}{L} + H\frac{T^2}{L} \cdot x = 0.$$

Hierzu tritt die Anfangsbedingung: $x = 0$, $i = I$. $\tau$ sei $> 0$, aber nicht ganzzahlig.[1])

(2) gehört zu einem Typus von Gleichungen, bei denen der Differentialquotient für die Anfangsbedingung in der Form $\frac{0}{0}$ auftritt. Ebenso wird für $x = 1$, wo, wie später noch gezeigt wird, immer $i = -I$ wird, $\frac{di}{dx} = \frac{0}{0}$. Nach den Untersuchungen von Briot und Bouquet (Journal de l'École Polytechnique, cah. 36), und Poincaré (Journal de l'École Polytechnique, cah. 45) ergibt sich $x = 0$, $i = I$ als „Sattelpunkt", durch den nur *eine* Integralkurve, und zwar eine in seiner Umgebung holomorphe, hindurchgeht, während $x = 1$, $i = -I$ ein „Knotenpunkt" ist, durch den *sämtliche* Integralkurven des allgemeinen Integrals hindurchgehen. Fig. 3 möge die durch das allgemeine Integral dargestellte Kurvenschar veranschaulichen.[2])




$K_1$ stelle das gesuchte partikuläre Integral dar, während die übrigen etwa den Verlauf von $K_2$ und $K_3$ nehmen. Aus (2) ergibt

1) Der Fall eines ganzzahligen $\tau$ soll, da er in der Praxis nur zufällig eintreten kann, hier unberücksichtigt bleiben.

2) Auf die übrigen singulären Punkte, besonders auf die Eigentümlichkeit des Punktes $x = 0$, $i = \infty$ und der durch ihn gehenden Kurven kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Der vorliegende Fall, bei dem die Singularitätenlinien Kurven dritter und zweiter bezw. erster Ordnung sind, ist überhaupt noch nicht genauer untersucht worden. Für die zweite Ordnung findet sich eine Diskussion aus den allgemeinen Sätzen Poincarés bei W. Büchel, Dissertation, Jena 1903.

sich nämlich:

$$i = If_1(x) + E\frac{T}{L}f_2(x) + H\frac{T^2}{L}f_3(x) + C'e^{-\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\tau},$$

wo

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$f_2(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$
$$f_3(x) = c_2 x^2 + \cdots.$$

Die Koeffizienten $\gamma_\nu$ sind allgemein bestimmt durch die Gleichung:

$$\gamma_\nu = \frac{\gamma_{\nu-1}(\nu - 1 - \tau') + \gamma_{\nu-2}\tau'}{\nu + \tau}.$$

Die $f(x)$ sind konvergent für $|x| < 1$, divergent für $|x| > 1$. Für $x = 1$ ergibt sich Konvergenz, $i$ wird $= -I$. Damit die Anfangsbedingung erfüllt ist, muß daher $C' = 0$ sein, und das gesuchte partikuläre Integral lautet:

$$i = If_1(x) + E\frac{T}{L}f_2(x) + H\frac{T^2}{L}f_3(x) \tag{3}$$

oder, wenn (2) durch Quadraturen gelöst wird:

$$i = e^{-\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\tau}\int_0^x e^{\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\tau}\left[-I\tau\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) - E\frac{T}{L} - H\frac{T^2}{L}x\right]dx. \tag{3a}$$

(3) stellt also das den Anfangsbedingungen genügende partikuläre Integral in dem ganzen Bereich, von $x = 0$ bis $x = 1$ einschließlich, eindeutig, endlich und stetig dar. Auf dem Konvergenzkreise muß nun aber mindestens eine singuläre Stelle $x = a$ von $i$ liegen, wo also $i$ sich nicht nach steigenden ganzen Potenzen von $x - a$ entwickeln läßt. Da die Differentialgleichung zeigt, daß $i$ im Endlichen sich nur für $x = 0$ und $x = 1$ singulär verhalten kann, so ist $x = 1$ der singuläre Punkt. Für unser gesuchtes partikuläres Integral ist also $x = 0$ regulärer Punkt und $x = 1$ Verzweigungspunkt, während für die übrigen, d. h. wenn $C' \neq 0$, $x = 1$ Verzweigungspunkt und $x = 0$ algebraische Unendlichkeitsstelle ist.

Um nun $i$ in der Umgebung von $x = 1$ darzustellen, setzen wir $1 - x = y$ und erhalten die Differentialgleichung:

$$\frac{di}{dy} - i\left(\tau' + \frac{\tau}{y} + \frac{\tau}{1-y}\right) + I\tau\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y}\right) - \left(E\frac{T}{L} + H\frac{T^2}{L}\right) + H\frac{T^2}{L}y = 0, \tag{4}$$

mit den Anfangsbedingungen $y = 1$, $i = I$ und $y = 0$, $i = -I$. Als allgemeines Integral ergibt sich:

$$i = IF_1(y) + \left(E\frac{T}{L} + H\frac{T^2}{L}\right)F_2(y) + H\frac{T^2}{L}F_3(y) + C''e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau} \tag{5}$$

oder

$$\text{a)}\quad i = e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau}\left[\int e^{-\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{-\tau}\left\{-I\tau\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{y}\right)+\left(E\frac{T}{L}+H\frac{T^2}{L}\right)-H\frac{T^2}{L}y\right\}dy + C''\right].$$

Da alle Integrale durch den Knotenpunkt hindurchgehen, so handelt es sich darum, durch Bestimmung von $C''$ denjenigen Funktionszweig zu ermitteln, der auch durch den Sattelpunkt $y = 1$ geht. Die Reihen $F(y)$ konvergieren nur für $|y| < 1$, $C'' = 0$ würde also eine der Integralkurven $K_2$, $K_3$ ... liefern, daher nicht das gesuchte Integral darstellen. Führen wir aber in (3a) die Substition $1 - x = y$ ein, so ergibt sich:

$$(6)\quad i = e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau}\int_y^1 e^{-\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{-\tau}\left[I\tau\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{y}\right)-\left(E\frac{T}{L}+H\frac{T^2}{L}\right)+H\frac{T^2}{L}y\right]dy.$$

Der Vergleich mit (5a) zeigt, daß:

$$(7)\quad C'' = \left[\int e^{-\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{-\tau}\left\{I\tau\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{y}\right)-\left(E\frac{T}{L}+H\frac{T^2}{L}\right)+H\frac{T^2}{L}y\right\}dy\right]_{y=1}.$$

## § 4.

### Berechnung der Integrationskonstanten durch unbestimmte Integration.

Da (4) als lineare Differentialgleichung erster Ordnung von der Form $\frac{di}{dy} + Pi = Q$ ist, so wird sie gelöst durch die Substitution $i = uv$, wo $u$ bestimmt ist durch die Gleichung: $\frac{du}{dy} + Pu = 0$ und $v$ durch die Gleichung: $u \cdot \frac{dv}{dy} = Q$. $u$ wird in unserm Fall: $e^{\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\tau}$. Also ist $w = -v$ bestimmt durch die Gleichung:

$$(8)\quad \frac{dw}{dy} = e^{-\tau' y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{-\tau}\left\{I\tau\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{y}\right)-\left(E\frac{T}{L}+H\frac{T^2}{L}\right)+H\frac{T^2}{L}y\right\}.$$

Unsre Konstante $C''$ ist also $w_{y=1}$.

Am einfachsten erhalten wir diesen Wert, wenn wir in (7) unbestimmt integrieren und dann $y = 1$ setzen. Dies ist aber nur erlaubt, wenn die entstehenden Reihen für $y = 1$ konvergent sind. Nun liegt $y = 1$, wie sich zeigt, auf ihrem Konvergenzkreise, und die Konvergenz oder Divergenz hängt daher von dem analytischen Charakter der durch die Reihen definierten Funktionen in der Umgebung von $y = 1$ ab, also von $w_{y=1}$. Nachdem Herr Thomé (Crelles Journal Bd. 100) ein Konvergenzkriterium für gewöhnliche Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise aufgestellt hatte, hat Herr Schlesinger (Handbuch der

Theorie der linearen Differentialgleichungen I, S. 230ff.) gezeigt, daß dieser Satz auch auf die gewöhnlichen Potenzreihen, welche in der Entwicklung eines Elementes des zu einem singulären Punkte einer Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse gehörigen kanonischen Fundamentalsystems auftreten, übertragbar ist. Um dies nachzuweisen, ist nur zu zeigen, daß jede solche Potenzreihe einen Funktionszweig definiert, der in der Umgebung jedes Punktes des Konvergenzkreises, wo er sich nicht regulär verhält, den Charakter eines sich bestimmt verhaltenden Integrals einer linearen Differentialgleichung besitzt. Dies läßt sich in unserm Fall leicht beweisen. Andererseits genügt aber die Funktion $w$, wie wir sehen werden, einer Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse, bzw. $w$ ist in Summanden zu zerlegen, deren jeder durch eine Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse definiert ist; die *Konvergenz der Reihen steht also fest.*

Setzen wir:

$$C'' = I\tau g_1(\tau, \tau') - E\frac{T}{L} g_2(\tau, \tau') - H\frac{T^2}{L} g_3(\tau, \tau'), \tag{9}$$

so lassen sich die Funktionen $g$ durch Reihenentwicklung und gliedweise Integration ermitteln. Das ist erlaubt, da die Reihen konvergent sind. (Vgl. Stolz, Math. Annalen Bd. 24, Encyklopädie I, A, 3). Man erhält:

$$\tag{10} \begin{cases} g_1(\tau, \tau') = \sum\limits_0^\infty {}_{m,n} (-1)^{m+n} \dfrac{\tau'^n}{n!} \left[ \dfrac{\binom{\tau - 1}{m}}{-\tau + 1 + m + n} - \dfrac{\binom{\tau}{m}}{-\tau + m + n} \right] \\ g_2(\tau, \tau') = \sum\limits_0^\infty {}_{m,n} (-1)^{m+n} \dfrac{\tau'^n}{n!} \cdot \dfrac{\binom{\tau}{m}}{-\tau + 1 + m + n} \\ g_3(\tau, \tau') = \sum\limits_0^\infty {}_{m,n} (-1)^{m+n} \dfrac{\tau'^n}{n!} \cdot \dfrac{\binom{\tau + 1}{m}}{-\tau + 1 + m + n}. \end{cases}$$

Ordnet man in diesen Doppelsummen nach Potenzen von $\tau'$, so treten als Koeffizienten *hypergeometrische Funktionen* auf, vom Typus: $F(-\tau + 1,\ -\tau + 1 + n,\ -\tau + 2 + n,\ 1)$, *die für jedes* $\tau > 0$ *konvergent sind.*

Durch Benutzung der Formeln:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}$$

und

$$\Gamma(\tau) \cdot \Gamma(1 - \tau) = \frac{\pi}{\sin \tau\pi}$$

erhalten wir:

$$
(11) \qquad \begin{cases}
g_1(\tau, \tau') = \dfrac{\pi}{\sin \tau\pi} \sum_0^{\infty}{}_n \dfrac{\tau'^n}{n!} \left[ \binom{\tau - 1}{n} + \binom{\tau}{n} \right] \\
g_2(\tau, \tau') = \dfrac{\pi}{\sin \tau\pi} \sum_0^{\infty}{}_n \dfrac{\tau'^n}{n!} \binom{\tau}{n + 1} \\
g_3(\tau, \tau') = \dfrac{\pi}{\sin \tau\pi} \sum_0^{\infty}{}_n \dfrac{\tau'^n}{n!} \binom{\tau + 1}{n + 2}.
\end{cases}
$$

Wir erhalten also *für $C''$ denselben Wert wie Herr Mie*, wenn noch berücksichtigt wird, daß:

$$
(12) \qquad \tau g_1(\tau, \tau') = (2 - \tau') g_2(\tau, \tau') + 2\tau' g_3(\tau, \tau').
$$

Weshalb jedoch *diese Bestimmungsmethode der Mieschen vorzuziehen ist,* wird später ersichtlich.

Zu denselben Resultaten kommen wir auch, wenn wir die Integrale benutzen; so ist:

$$
g_2(\tau, \tau') = \int^1 e^{-\tau' y} y^{-\tau} (1 - y)^{\tau}.
$$

Falls $0 < \tau < 1$, können wir setzen:

$$
g_2(\tau, \tau') = \int_0^1 e^{-\tau' y} y^{-\tau} (1 - y)^{\tau},
$$

und erhalten durch Benutzung der $B$-Funktionen das vorige Resultat. Streng genommen, gilt dies nun aber nur für $0 < \tau < 1$; denn nur dann hat das Integral einen Sinn. Die $B$-Funktion läßt sich ja allerdings durch die Formel, die $B(a + m, b + n)$ mit $B(a, b)$ verbindet, auch für negative Werte der Argumente analytisch fortsetzen, aber die Eulerschen Integrale sind dann sinnlos, die $g$-Funktionen lassen sich nicht mehr als $\int_0^1$ darstellen. Daß wir nun aber in dem Falle $\tau > 1$ für die bestimmten Integrale einen Ersatz finden können, dem die $g$-Funktionen genügen, und dem dann die $B$-Funktionen entsprechen, zeigt die folgende Überlegung. (Vgl. Jordan, Cours d'Analyse III; Pochhammer, Math. Annalen Bd. 35—37, Crelles Journal Bd. 102; Schlesinger, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen, Kap. IV, V).

## § 5.

## Berechnung der Integrationskonstanten durch bestimmte Integration.

Betrachten wir in (8) nur den Faktor von $-E\frac{T}{L}$ und entwickeln $e^{-\tau' y}$ in eine Reihe, so läßt sich die Gleichung zerlegen in:

$$\frac{dw_1}{dy} = y^{-\tau}(1-y)^{\tau}, \quad \frac{dw_2}{dy} = -\tau' y^{-\tau+1}(1-y)^{\tau}, \quad \ldots$$

Jede dieser Differentialgleichungen erster Ordnung ist gleichbedeutend mit einer der zweiten Ordnung. So geht aus der ersten durch Differenzieren die folgende hervor:

$$y(y-1)\frac{d^2 w_1}{dy^2} - \tau\frac{dw_1}{dy} = 0.$$

Dies ist aber ein Spezialfall der **Gaußschen** Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe zweiter Ordnung, die allgemein lautet:

$$y(y-1)\frac{d^2 w_1}{dy^2} + [(\alpha+\beta+1)y - \gamma]\frac{dw_1}{dy} + \alpha\beta w_1 = 0.$$

In unserm Fall ist also $\gamma = \tau$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Als das für unsern Zweck allein brauchbare Hauptintegral in der Umgebung von $y = 0$ ergibt sich:

$$w_1 = c_1 y^{1-\tau} F(-\tau, -\tau+1, -\tau+2, y).$$

$c_1$ bestimmt sich, da $w_1$ auch der Gleichung (8) genügen muß, als: $\frac{1}{-\tau+1}$. Ähnliches gilt für $w_2, w_3, \ldots$, und wir erhalten wieder die Resultate von (11).

Anstatt durch Reihen kann man die **Gaußsche** Differentialgleichung auch durch bestimmte Integrale lösen. Man setzt:

$$w_1 = \int_g^h U(u-y)^{-\beta} du$$

und bestimmt $g$, $h$ und $U$. Das für unsern Zweck in Betracht kommende Hauptintegral wird:

$$w_1 = \int_0^y u^{\beta-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-y)^{-\beta} du,$$

wo den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gewisse Bedingungen auferlegt sind. Indem wir $u = vy$ setzen, erhalten wir ein $\int_0^1$; setzen wir dann $y = 1$, so vermitteln bekanntlich die **Eulerschen** Integrale (Vgl. **Pochhammer** a. a. O.) die Darstellung durch $F$-Reihen mit der durch bestimmte Integrale. In

unserm Fall ist die Konstante $B(-\tau+1, 1)$, was gleich $\frac{1}{-\tau+1}$ ist. Die Integration durch bestimmte Integrale liefert also direkt die Ausdrücke von (11). Natürlich gelten wieder die Integrale streng nur für $0 < \tau < 1$, und für $g_1(\tau, \tau')$ läßt sich direkt überhaupt kein konvergentes Integral aufstellen, außer durch die Relation (12). Wir suchen daher einen Ersatz für die Integrale. Dies gelingt durch *Einführung von gewissen Doppelumlaufintegralen in der komplexen Ebene.* (Jordan, Pochhammer, Schlesinger a. a. O.)

Ist allgemein $f(u) = (u-p)^{\sigma-1}(u-q)^{\tau-1}\varphi(u)$, wo $\varphi(u)$ eine in der Umgebung von $p$ und $q$ eindeutige Funktion von $u$ ist, so werde als Integrationsweg ein Doppelumlauf um die beiden Verzweigungspunkte $p$ und $q$ der zu integrierenden Funktion $f(u)$ gewählt, und zwar so, daß die Punkte $p$ und $q$ abwechselnd umkreist werden, jeder zuerst im positiven, dann im negativen Sinne. Es gilt dann, nach Zusammenziehung des Integrationsweges, die Gleichung:

$$\overline{\int\limits_{(q,p)}} f(u)du = (e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\tau}-1)\int\limits_p^q f(u)du + (e^{2\pi i\tau}-1)s_p - (e^{2\pi i\sigma}-1)s_q;$$

wo $s_p$ bezw. $s_q$ die einfachen kleinen Schleifenintegrale um $p$ und $q$ darstellen. Ist nun das gradlinige Integral $\int\limits_p^q f(u)du$ konvergent, so verschwinden die Schleifenintegrale $s_p$ und $s_q$, also bleibt:

$$\overline{\int\limits_{(q,p)}} f(u)du = (e^{2\pi i\sigma}-1)(e^{2\pi i\tau}-1)\int\limits_p^q f(u)du.$$

„Genügt also das Integral $\int\limits_p^q f(u)du$, wenn es konvergent ist, einer linearen homogenen Differentialgleichung, in welcher $\sigma$ und $\tau$ als Konstante vorkommen, während eine der Größen $p$ und $q$, bezw. ein in $\varphi(u)$ enthaltener Parameter die unabhängige Variable der Differentialgleichung darstellt, so liefert das hier definierte Integral mit Doppelumlauf einen Ersatz für das partikuläre Integral $\int\limits_p^q f(u)du$ in denjenigen Fällen, wo das letztere, wegen der Art der in $u=p$ oder $u=q$ eintretenden Unstetigkeiten von $f(u)$ keinen bestimmten Sinn behält.“ (Pochhammer, Math. Annalen Bd. 35.) Ich kann also für das Integral $w_1 = \int\limits_0^1 u^{-\tau}(1-u)^{\tau}du$ das Integral $\overline{\int\limits_{(1,0)}} u^{-\tau}(1-u)^{\tau}du$ als Ersatz

nehmen. Dies genügt nun aber wieder einer Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, durch deren Auflösung sich wieder $w_1 = c \cdot F(-\tau, -\tau+1, -\tau+2, 1)$ ergibt, wo $c$ passend bestimmt wird. Andrerseits kann ich aber auch direkt das Doppelumlaufintegral als Definition der $B$-Funktionen für beliebige Argumente benutzen. Es ist:

$$\overline{\int\limits_{(1,0)}} u^{\sigma-1}(1-u)^{\tau-1} = (1-e^{2\pi i\sigma})(1-e^{2\pi i\tau})B(\sigma,\tau).$$

In unserm Fall also:

$$\overline{\int\limits_{(1,0)}} u^{-\tau}(1-u)^{\tau} = (2-2\cos 2\pi\tau)\cdot w_1.$$

Wir können daher die Doppelumlaufintegrale wählen, müssen aber das Resultat durch $(2-2\cos 2\pi\tau)$ dividieren.

Eine noch einfachere Methode der Konstantenbestimmung wird erhalten, wenn wir, anstatt die Teilintegrale $w_1, w_2 \ldots$ durch Doppelumlaufintegrale zu ersetzen, direkt für $C''$ ein bestimmtes Integral aufstellen. So ergibt sich z. B. für den Faktor von $-E\frac{T}{L}$, also für $g_2(\tau,\tau')$, daß er, abgesehen von der Konstanten: $2-2\cos 2\pi\tau$ mit folgendem Integral übereinstimmt:

$$\overline{\int\limits_{(1,0)}} e^{-\tau' y} y^{-\tau}(1-y)^{\tau} dy.$$

Dies Doppelumlaufintegral genügt aber einer Laplaceschen Differentialgleichung 2. Ordnung, nämlich der Gleichung:

$$-\tau'\frac{d^2u}{d\tau'^2} + (2+\tau')\frac{du}{d\tau'} - (-\tau+1)u = 0.$$

Durch die Auswertung dieser Gleichungen ergeben sich wieder die Werte (11), die wir nach der bei der Laplaceschen Gleichung üblichen Schreibweise folgendermaßen schreiben können:

$$(13)\quad \begin{cases} g_1(\tau,\tau') = \frac{\pi}{\sin\tau\pi}[F(-\tau+1, 1, -\tau') + F(-\tau, 1, -\tau')] \\ g_2(\tau,\tau') = \frac{\pi\tau}{\sin\tau\pi}F(-\tau+1, 2, -\tau') \\ g_3(\tau,\tau') = \frac{\pi\tau(\tau+1)}{2\sin\tau\pi}F(-\tau+1, 3, -\tau'). \end{cases}$$

Die Funktionen $F$ sind ganze transzendente Funktionen von $\tau'$, die für jedes $\tau'$ konvergieren, und zwar für kleine $\tau'$, auf die es ja in der

Praxis allein ankommt, sehr gut konvergieren. *Die Gleichungen* (10), (11) und (13) *liefern uns also die Konstante $C''$ für alle nicht ganzzahligen positiven $\tau$.*

Ist nun $C''$ von Null verschieden, so ergibt sich $i$ aus (5) als mehrdeutige Funktion von $y$. Da nun aber $i$ in der Umgebung von $x = 0$, bis $x = 1$, eindeutig sein soll, so muß in (5) derjenige Zweig fixiert werden, der durch $x = 0$, $i = I$ hindurchgeht, d. h. wir haben einen ganz bestimmten Wert für $\left(\frac{y}{1-y}\right)^\tau$ zu wählen. Da nur die reellen Integralkurven in Betracht kommen, so handelt es sich um die Bestimmung des Vorzeichens. Nun hängen, wie (5a) zeigt, auch die Potenzreihen von demselben Faktor $\left(\frac{y}{1-y}\right)^\tau$ ab, und damit sie der Anfangsbedingung genügen, muß der positive Wert des Faktors genommen werden. Dasselbe folgt aus der obigen Bestimmungsmethode von $C''$. *Diese notwendige Festsetzung* fehlt auch in der neuen Abhandlung des Herrn Mie. Ebenso fehlt *ein strenger Konvergenzbeweis* für die bei der Bestimmung der Konstanten benutzten mehrfachen Reihen.

## § 6.

## Die Abhandlung des Herrn Mie.

Ich komme nun zu meiner Entgegnung auf die neue Abhandlung des Herrn Mie. Daß zu einer Kritik seiner alten Abhandlung vom Jahre 1899 sehr wohl Veranlassung vorlag, verschweigt Herr Mie, denn *diese Abhandlung ist keineswegs fehlerfrei gewesen.* Um nur das Wichtigste zu nennen, behauptet er dort, daß die *Entwicklung von $i$ nach Potenzen von $x$ für $x = 1$ divergent sei,* und daß *aus diesem Grunde* die weiteren Rechnungen nötig seien. Ferner gibt er für den Fall, daß $\tau$ eine ganze Zahl ist, in seiner Formel (24) *ein falsches Integral für $i$.* Wenn Herr Mie weiter in der Einleitung seiner neuen Abhandlung sagt, daß er jetzt einige Überlegungen und Rechnungen hinzufüge, die die alte *„vielleicht noch etwas ergänzen“*, so ist hierzu zu bemerken, daß die alte Arbeit *in Wahrheit gar keine Konstantenbestimmung* enthält, sondern nur die folgende Andeutung: „$i$ ist mit Hilfe der drei Potenzreihen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ zu berechnen, welche für $x = 1$ (d. h $t = T$) divergent werden. Wir müssen also für die Berechnung von $i$ gegen Ende des Kurzschlusses eine andere Reihenentwicklung suchen. Es gelingt dies, wenn man die Reihen umwandelt in Reihen, welche anstatt nach Potenzen, nach hypergeometrischen Funktionen fortschreiten. Da man die Grenzwerte der hypergeometrischen Funktionen für $x = 1$ kennt, so gelangt man dadurch zu einer Reihenentwicklung der drei

Funktionen $f_1$, $f_2$, $f_3$ nach Potenzen von $y = 1 - x$". Dann folgt gleich das Endresultat. Hieraus *läßt sich nicht deutlich entnehmen*, wie Herr Mie zu seinen Resultaten gelangt ist. Es wird *kein Wort von dem Zusatzstrom* $i'$, *kein Wort über die Integraldarstellung* von $i$ gesagt, auf deren Einführung die Methode beruht, die Herr Mie *jetzt* anwendet. Ob er schon 1899 im Besitze dieser Methode gewesen ist, oder sich nicht vielmehr der falschen Herleitung bedient hat, die ich in meiner Dissertation *auf Grund jener Andeutungen vermutungsweise* als die seinige bezeichnet habe, möge dahingestellt bleiben. Jedenfalls führt auch die neue Methode des Herrn Mie, sobald sie ohne Einführung des Zusatzstroms angewandt wird, *auf den von mir bezeichneten Fehler*, daß $\lim\limits_{y=0}\left[\frac{\mathfrak{P}(y)}{y^{\tau}}\right]$ fälschlich $= 0$ gesetzt wird, oder auf eine Rechnung mit *divergenten hypergeometrischen Reihen*. Sodann steht das Ergebnis, daß $\tau$ unbedingt $> 1$ sein muß, *mit den Tatsachen der Elektrotechnik in Widerspruch*. Trotzdem bezeichnet Herr Mie in seiner neuen Abhandlung $\tau > 1$ *abermals als erste Bedingung für den funkenfreien Gang der Maschinen*. Endlich hat Herr Mie bei Aufstellung seiner Gleichung *Kräfte vernachlässigt*, die erwiesenermaßen einen großen Einfluß auf den Verlauf des Kurzschlußstroms ausüben, so daß *seine Resultate für die Praxis nicht als erste Annäherung* gelten können.

Wenn meine Dissertation auch das genannte Versehen enthält, welches ich, wie erwähnt, *schon vor dem Erscheinen* der neuen Mieschen Abhandlung öffentlich bekannt gegeben habe (E. T. Z. 1906, Heft 3), so bin ich in ihr doch über die alte Abhandlung des Herrn Mie erheblich hinausgegangen, denn ich habe auf Grund der Untersuchungen von Briot und Bouquet *die Differentialgleichung* (2) *klassifiziert* und die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ bezw. als *Sattel- und Knotenpunkte* erkannt. Herr Mie spricht dagegen nur von *dem* Integral $i$, während doch, da $x = 0$ singulärer Punkt der Differentialgleichung ist und $\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=0}$ in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, durch die Anfangsbedingung $x = 0$, $i = I$, nur für $\tau > 0$ ein bestimmtes partikuläres Integral definiert wird.

In der alten Abhandlung *fehlte auch die Bestimmung der Konstanten* $C'$, die *ohne Beweis* gleich Null gesetzt wird. In der neuen Arbeit verfährt Herr Mie nun unter Berufung auf „Die Gleichstrommaschine" von Arnold in folgender Weise (S. 40): „Das allgemeine Integral der Gleichung läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$i = e^{-\tau' x}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\tau}\left[\int_0^x e^{\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\tau}\left\{I\tau\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)-E\frac{T}{L}-H\frac{T^2}{L}x\right\}dx+c\right],$$

wo $c$ eine willkürliche Konstante sein soll. Durch Herübermultiplizieren bekommt man:

$$i \cdot e^{\tau' x} \frac{x^\tau}{(1-x)^\tau} = \int_0^x \cdots + c.$$

Läßt man nun $x$ gegen Null konvergieren, so wird die linke Seite Null, ebenso das bestimmte Integral. Daraus folgt $c = 0$. Dieser einfache Schluß ist Herrn Riebesell so unverständlich, daß er ihn meint mit der kurzen Bemerkung abtun zu können: Das Unzulässige dieser Bestimmung ist ersichtlich."

Ich gebe zu, daß ich mich kurz ausgedrückt habe; ich rechnete eben auf das entgegenkommende Verständnis des aufmerksamen Lesers. Herrn Mie will ich aber ausführlich zeigen, warum sein „einfacher Schluß" unzulässig und fehlerhaft ist. Er beruht auf zwei Voraussetzungen. Daß die linke Seite gegen Null konvergiert, setzt voraus, daß *erstens $i$ für $x = 0$ einen bestimmten endlichen Wert hat*, und *zweitens, daß $\tau$ größer als Null ist.* Was das zweite betrifft, so rechnet Herr Mie wiederholt mit *negativen* Werten von $\tau$. Was das erste angeht, so ist der Punkt $x = 0$ ein *singulärer Punkt der Differentialgleichung*, und daß es überhaupt ein Integral gibt, bei dem $i$ für $x = 0$ einen endlichen Wert hat, ist keineswegs selbstverständlich, muß vielmehr erst bewiesen werden. Der „einfache Schluß" ist nichts anderes als ein Zirkelschluß, da bei ihm die zu beweisende Existenz des Integrals bereits stillschweigend vorausgesetzt wird. Das Fehlerhafte der Schlußweise sieht man am einfachsten ein, wenn man bedenkt, daß genau mit denselben Worten bewiesen werden könnte, daß $C' = 0$ ist bei einem Integrale, das für $x = 0$ irgend einen gegebenen endlichen Anfangswert besitzt, während doch nur ein einziges Integral mit dem endlichen Anfangswerte $I$ für $x = 0$ vorhanden ist, wie ich dies ja auch in der Dissertation *ausdrücklich hervorhebe.*

Daß ich unter diesen Umständen vermutete, Herr Mie möchte bei der Bestimmung der Konstanten $C''$, über die er nur Andeutungen gemacht hatte, in ähnlicher unzulässiger Weise wie bei $C'$ (bzw. $c$) vorgegangen sein, wird man hiernach erklärlich finden. Bei Einführung des Zusatzstroms fällt mein Bedenken allerdings fort, allein von diesem Zusatzstrom war in der Abhandlung des Herrn Mie von 1899 mit keinem Wort die Rede. Bei dieser Gelegenheit behauptet Herr Mie, daß ich „in einem Atemzuge sage, daß das Integral:

$$\int_x^1 e^{\tau' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^\tau \left\{ I\tau\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) - E\frac{T}{L} - H\frac{T^2}{L}x \right\} dx$$

natürlich divergent sei, und, daß dasselbe Integral mit den Grenzen 0 bis 1 einen bestimmten endlichen Wert habe, der mit der gesuchten Konstanten übereinstimmt.“ Diese Behauptung widerspricht dem wirklichen Sachverhalt. *Ich sage im Gegenteil an dieser Stelle ausdrücklich*, daß das Integral von 0 bis 1 „keinen bestimmten Sinn“ hat, daß aber, wenn man es trotzdem durch formale Anwendung der $B$-Funktionen auswertet, ohne also auf die Divergenz Rücksicht zu nehmen, allerdings die Konstante des Herrn Mie herauskomme, *deren Bestimmung auf diesem Wege eben unzulässig sei.* Herr Mie scheint diese einfache Überlegung nicht verstanden zu haben. Ebenso wenig hält dieser Herr es für nötig, eine Fixierung des Vorzeichens in (5) vorzunehmen, um den durch den Sattelpunkt gehenden Zweig des Integrals zu erhalten. Sodann *widerspricht* auch die Anmerkung auf S. 39 *dem wahren Sachverhalt;* denn der Fall (1) ist *nicht* „die Entwicklung der Funktion um den Punkt 0 herum.“ Ich kann deshalb nicht umhin, meine Verwunderung darüber auszusprechen, daß Herr Mie sich für berechtigt hielt, über eine Arbeit zu urteilen, die er so flüchtig durchgelesen hatte.

Die übrigen Ausführungen des Herrn Mie sind wesentlich physikalisch-technischer Art und *werden weiter unten ihre Erledigung finden.*

Zum Schluß möchte ich noch hervorheben, daß die Kritik der alten Mieschen Abhandlung *nur einen Teil meiner Dissertation* bildet. Da die Bedingung $\tau > 1$ für Funkenfreiheit nicht „unerläßlich“ ist, wie Herr Mie glaubt, also auch die Miesche Gleichung, aus der $\tau > 1$ hergeleitet wird, nicht immer der Wirklichkeit entspricht, habe ich dort *auf den letzten 20 Seiten alle Kräfte* festzustellen versucht, die auf eine kurzgeschlossene Spule wirken. Auf diese Ausführungen, die allerdings den Wert der Mieschen Differentialgleichung beeinträchtigen, ist *Herr Mie in seiner neuen Abhandlung mit keinem Worte eingegangen.* Wer nur diese Abhandlung liest, muß daher *ein ganz falsches Bild von dem Inhalt meiner Dissertation* bekommen.

## § 7.

## Die günstigen Bedingungen.

Die technischen Folgerungen aus der Kurzschlußstromkurve beziehen sich, wie gesagt, auf die Ursachen und das Auftreten von Funken zwischen Bürste und Kollektor. Da für $x = 0 : i = I$ ist und auch für $x = 1 : i = -I$, so kann eine eigentliche Unterbrechung des Stroms nicht eintreten. Die Stromdichte und die Potentialdifferenz sind daher ausschlaggebend. Wie die Praxis lehrt, ist der Moment

am Schluß der Kurzschlußperiode der gefährlichste für die Funkenbildung. Da die Stromdichte an der ablaufenden Lamelle gleich $\frac{(I+i)T}{\beta(T-t)}$, wo $\beta$ als Fläche aufgefaßt ist, und die Potentialdifferenz $\frac{R_1(I+i)T}{\beta(T-t)}$, so sind die betreffenden Werte für $x = 1$: $-\frac{T}{\beta}\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T}$ (nicht $\frac{T}{\beta}\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T}$, wie Herr Mie in der neuen Abhandlung S. 52 schreibt) und: $-R_1 T\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T}$, also proportional $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T}$. Nun zeigt (5), daß, da $C''$ im allgemeinen $\neq 0$, $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T} = \infty$ ist für $\tau \lesseqgtr 1$, während $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T}$ endlich für $\tau > 1$. *Letztere Bedingung* tritt also als *unerläßlich für Funkenfreiheit* auf.[1]) Das günstigste Verhältnis tritt natürlich ein, wenn die Stromdichte zum Schluß gleich Null ist, d. h. $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T} = 0$ ist. Der günstigste Verlauf der Kurzschlußstromkurve würde also etwa durch $K_4$ in Fig. 3 dargestellt werden, während $K_5$ kein funkenfreies Arbeiten der Maschine liefern könnte. Aber nicht nur das Ende der Kurzschlußperiode ist für das Funkengeben maßgebend, sondern der ganze Verlauf des Kurzschlußstroms. Vor allen Dingen darf es nicht eintreten, daß der Strom überkommutiert wird, d. h. daß, bevor $t = T$ ist, $i$ schon kleinere Werte als $-I$ annimmt. Ein Verlauf wie $K_6$ in Fig. 3 darf also nicht eintreten; denn sonst würde die Bürste an gewissen Stellen zu stark in Anspruch genommen werden, was zu einer Funkenbildung unter der Bürste führen könnte. Wenn auch nicht sichtbar, so würden diese Funken doch die Bürste an bestimmten Stellen stark abnutzen oder erhebliche Wärmeentwicklung am Kollektor verursachen. Man kann diese Abnutzung auch an gebrauchten Bürsten vielfach wahrnehmen. Man wird nun einigermaßen sicher vor Überkommutierung sein, wenn $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T}$ negativ ist.

Außer der bisher betrachteten lokalen Wärmeentwicklung unter der ablaufenden Bürstenkante ist der während der ganzen Kurzschlußperiode durch die Wärmeentwicklung unter der Bürste bedingte Effektverlust in Betracht zu ziehen. Führen wir den zusätzlichen Kurzschlußstrom $i' = i - I(1 - 2x)$ ein, so wird die während einer Kurzschlußperiode erzeugte Wärme:

$$R_1 T \int_0^1 \left[4 I^2 + \frac{i'^2}{x(1-x)}\right] dx. \tag{14}$$

1) Die Zufallsbedingung $C'' = 0$ bleibt hierbei unberücksichtigt.

Diese wird am kleinsten, wenn $i' = 0$ ist, d. h. wenn $i = I(1 - 2x)$, wenn also der Strom ganz gleichmäßig kommutiert wird. Dann ist die Potentialdifferenz unter der ablaufenden Lamelle wie auch unter der auflaufenden Lamelle konstant $= 2IR_1$, die $i$-Kurve verläuft wie die Gerade $K_1$. Diesen Verlauf bei der konstanten Stromdichte unter der Bürste $\left(\frac{2I}{\beta}\right)$ hatte Herr Thorburn Reid für den günstigsten gehalten. Durch die Untersuchungen, besonders der Herren Fischer-Hinnen und Arnold, hat sich jedoch gezeigt, daß, wie dies ja auch physikalisch klar ist,

$$(15) \qquad \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T} = 0,$$

d. h.: zum Schluß *keine* Potentialdifferenz und Stromdichte, die günstigste Bedingung angibt. In zweiter Linie kommt erst die gesamte Stromwärme in Betracht. Da schon $i' = 0$ nicht den günstigsten Verlauf liefert, so hat die Untersuchung, wann (14) für $i' \neq 0$ ein Minimum hat, die Herr Mie im 11. Abschnitt seiner neuen Abhandlung durchführt, *keine praktische Bedeutung*, zumal die physikalisch unzureichende Kurzschlußdifferentialgleichung (2) zugrunde gelegt ist und hier überdies noch die *völlig willkürliche Bedingung* eingeführt wird, daß die kommutierende *EMK* eine lineare Funktion der Zeit und des Bürstenverschiebungswinkels sei. Außerdem *unterläßt Herr Mie* es, zu untersuchen, ob seine Bedingung (45) *tatsächlich ein Minimum des Effektverlusts liefert.* Jedenfalls zeigen seine Formeln (39) bis (41), daß die zweite Ableitung *negativ* sein kann, so daß also die angeführte Bedingung ein *Maximum der Wärmeentwicklung* liefern könnte. Es muß daher der Bedingung (45) *unbedingt eine zweite Gleichung hinzugefügt werden,* die eine Beziehung zwischen $\tau$ und $\tau'$ für das Eintreten eines Minimums angibt. Eine exakte Herleitung dieser Beziehungsgleichung ist nur mit Hilfe komplizierter Reihenentwicklungen möglich und soll hier nicht gegeben werden. Denn obgleich in dem von Herrn Mie angeführten Zahlenbeispiel die Bedingung für ein Minimum erfüllt ist, so zeigt das Resultat, wonach für diesen angeblich *günstigen Fall starkes Überkommutieren* auftritt, zur Genüge, daß die *ganze Rechnung praktisch wertlos ist.* Wie genauer das Minimum der Wärmeentwicklung als Funktion des Bürstenverschiebungswinkels zu bestimmen ist, wird aus den später abzuleitenden Formeln ersichtlich sein, soll hier jedoch der geringen technischen Bedeutung wegen nicht weiter ausgeführt werden.

Im allgemeinen kann man nur sagen, daß der Effektverlust keine erheblichen Dimensionen annehmen wird, solange die $i$-Kurve nicht

allzusehr von der geraden Linie abweicht. Nun zeigt die Praxis, daß außer dem Endmoment der Kurzschlußperiode auch der Beginn für die Funkenbildung gefährlich sein kann. Solange $\tau > 0$ ist, kann zwar $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}$ nicht $\infty$ werden, aber es kann erhebliche endliche Werte annehmen, so daß wir als günstige Bedingung verlangen können, daß sich in diesem Moment die $i$-Kurve der gradlinigen Kommutierungskurve $K_1$ nähert, d. h. daß:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2I}{T} \tag{16}$$

ist; *dann wird Unter- und Überkommutierung möglichst vermieden werden.*

## § 8.

## Die gegenseitige Induktion und die kommutierende *EMK.*

Die aus der bisher zugrunde gelegten Differentialgleichung (2) folgenden Resultate stehen, wie mehrfach erwähnt, im Widerspruch mit den Tatsachen der Praxis. Schon die erste unerläßliche Bedingung: $\frac{R_1 T}{L} > 1$ wird zwar bei Kohlebürsten, für die $R_1$ relativ groß ist, meist eben erreicht, für Metallbürsten jedoch ist bei durchaus gut funktionierenden Maschinen $\tau$ *fast immer außerordentlich viel kleiner als* 1, wie die Herren Fischer-Hinnen, Arnold und Isler (a. a. O.) festgestellt haben.[1]) Es kann dies nur daran liegen, daß bei der Aufstellung der Differentialgleichung (2) magnetische oder elektrische Wirkungen vernachlässigt worden sind, die tatsächlich einen größeren Einfluß ausüben. Dies ist nun der Fall, nicht nur für die in $\tau$ vorkommenden Größen $R_1$ und $L$, sondern auch für mehrere andere Parameter der Gleichung, während wieder andere Wirkungen ganz außer Acht geblieben sind.

Zunächst ist der *Selbstinduktionskoeffizient* $L$ von $t$ abhängig; da die Spulen sich den Polschuhen nähern, wird er im allgemeinen mit $t$ wachsen. Wie noch gezeigt wird, können wir jedoch in der Nähe der neutralen Zone, um die es sich ja immer handelt, zumal in unserm einfachen Fall, das Feld als homogen ansehen, und so auch $L$ konstant nehmen. Außerdem wirkt nun aber *die gegenseitige Induktion* und zwar einerseits zwischen den Spulen, welche gleichzeitig kurzgeschlossen sind und andrerseits zwischen der betrachteten Spule und

1) Daß Herr Arnold den Ausführungen des Herrn Mie (S. 53—60) zustimmt, ist mir unverständlich, da diese zum Teil seinen früheren Untersuchungen widersprechen.

den sie umgebenden Armaturteilen. Können wir die letztere Wirkung im allgemeinen vernachlässigen, so setzt sich die erstere zusammen aus der Wirkung der unter der *selben* Bürste gleichzeitig kurzgeschlossenen Spulen (bei $b > \beta$) und aus derjenigen der unter den *andern* Bürsten geschlossenen Spulen. Für den einfachen Fall der Fig. 1 und Fig. 2 ist außer der betrachteten immer noch *eine* Spule, nämlich die unter der andern Bürste, dauernd im Kurzschluß. Da wir eine vollkommen symmetrisch konstruierte und laufende Maschine voraussetzen, so wird der Kurzschlußstrom unter der zweiten Bürste dieselbe Phase haben wie unter der ersten. Ist der Koeffizient der gegenseitigen Induktion $M$, so erhalten wir demnach einfach eine additive $EMK: M\left(\frac{di}{dt}\right)$. Ist nun $b > \beta$, so kommen außerdem noch die $EMK_e$ der andern unter derselben Bürste befindlichen Spulen hinzu, in denen der Kurzschlußstrom allerdings verschiedene Phase haben wird. Im allgemeinen können wir sagen, daß die Gesamtwirkung der gegenseitigen Induktion durch den Ausdruck $L_s \frac{di}{dt}$ gegeben wird, wo der „scheinbare Selbstinduktionskoeffizient" $L_s = L + \Sigma M$ ist. $\Sigma M$ kann hierin positiv und negativ sein. Die Arbeiten des Herrn Benischke haben gezeigt, daß meistens die gegenseitige Induktion eine schwächende Wirkung ausübt, *$\Sigma M$ also negativ zu nehmen ist.*

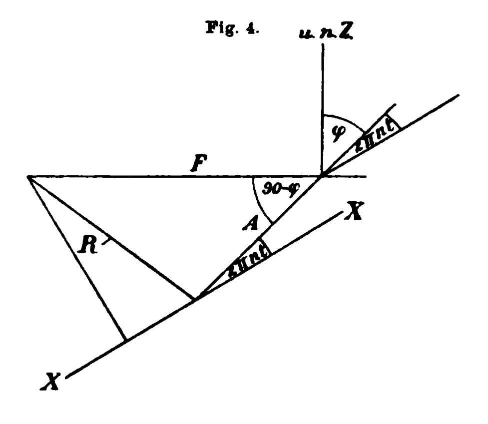
Eine zweite willkürliche Annahme in der Gleichung (2) ist die der kommutierenden *EMK: $E'$ als lineare Funktion der Zeit: $E' = E + Ht$.* Dieser Bedingung wird im allgemeinen nur genügt, wenn $i$ gradlinig verläuft. Da nun aber in der Praxis die gleichmäßige Kommutierungskurve fast nie eintritt, auch nicht, wie wir sahen, den günstigsten Verlauf darstellt, so wird $E'$ eine kompliziertere Funktion von $t$ sein. (Vgl. Pohl a. a. O.). Aus den Daten der Praxis ist die Form dieser Funktion nicht mit Sicherheit zu ermitteln, es wird daher unsre Aufgabe sein, für den zugrunde gelegten einfachen Fall $E'$ aus der Gestalt und den Dimensionen des Feldes nach der Formel: $E' = -\frac{dN}{dt}$ zu berechnen, wo $N$ die Zahl der durch die Spule gehenden Kraftlinien bezeichnet. Wie das Fixieren der Kraftfelder gezeigt hat, ist in der Umgebung der (allerdings verschobenen) neutralen Zone das Feld als homogen anzusehen. Das Gesamtfeld setzt sich nun aus zwei Komponenten zusammen, erstens aus der durch die Feldmagnete erzeugten Feldintensität $F$ und zweitens aus der infolge des Ankerstroms erzeugten Ankerintensität $A$. Denn haben wir eine zweipolige Maschine, so entsteht zwischen den Polen zunächst ein homogenes Feld, welches aber durch die „Ankerrückwirkung" verzerrt wird. Die neutrale Zone

liegt daher nicht mehr in der Mitte zwischen den beiden Polen, wie es in der Ruhelage der Maschine der Fall sein würde, sondern sie ist theoretisch als Senkrechte zur Richtung des resultierenden Magnetismus zu deuten. Die Richtung des Erregermagnetismus ist durch die Linie $NS$ in Figur 1 gegeben. Die des Ankermagnetismus hängt natürlich ganz von der Stellung der Bürsten ab; denn da in den beiden Ankerhälften der Strom in verschiedener Richtung fließt, so werden die Stellen, an denen die Bürsten aufliegen (bei $B_1$ und $B_2$ in Fig. 1) zu Polen. Sollen nun die Bürsten in der resultierenden neutralen Zone stehen, d. h. soll die Resultante senkrecht zur Bürstenstellung sein (damit auch zu $A$), so ist offenbar der Bürstenverschiebungswinkel $\varphi$ gegeben durch:

$$\sin \varphi = \frac{A}{F}.$$

Diese Formel ist die in den elektrotechnischen Lehrbüchern angegebene zur Berechnung des Bürstenverschiebungswinkels. (Vgl. E. Kittler, Handbuch der Elektrotechnik; S. P. Thompson, Die dynamoelektrische Maschine). Ihre Voraussetzung, nämlich die Stellung der Bürsten in der resultierenden neutralen Zone, trifft aber in der Praxis *nicht* zu; vielmehr müssen die Bürsten noch weiter vorwärts geschoben werden, damit die kommutierende $EMK$ wirken kann. Sehen wir die ursprüngliche neutrale Zone als Anfangslage an, und nennen den Winkel, um den die Bürsten verschoben sind, $\varphi$, so gilt allgemein die Fig. 4.

Die Resultante $R$ gibt hier die Intensität des resultierenden Feldes nach Größe und Richtung an. Sehen wir das Feld als homogen an, so müssen wir die Zahl der Kraftlinien bestimmen, die zur Zeit $t$ (vom Beginn des Kurzschlusses gerechnet) durch die Windungsfläche der kurzgeschlossenen Spule des Ringankers hindurchgehen. Der Winkel, um den die kurzgeschlossene Spule sich zur Zeit $t$ von der ursprünglichen neutralen Zone entfernt hat, ist dann in Bogenmaß: $\varphi + 2\pi nt$, da $\varphi$ den Winkel beim Beginn des Kurzschlusses angeben soll. Die Zahl der Kraftlinien, die zur Zeit $t$ die Spule durchsetzen, ist dann gebeben durch die Komponente von $R$,



die senkrecht zur Windungsfläche der Spule, d. h. in Fig. 4 zur Linie $X$, steht. Es ist daher:

$$N = f\,[F \cos(\varphi + 2\pi n t) - A \sin 2\pi n t], \tag{17}$$

wenn $2f$ einen durch die Dimensionen der Polschuhe, des Ankereisens und des Luftabstandes zwischen Anker und Feldmagneten bedingter Faktor ist, der die Dimension des Gesamtfeldes angibt, und etwa als Maschinenkonstante zu bezeichnen ist.[1]) Damit wird:

$$E' = 2\pi n f\,[F \sin(\varphi + 2\pi n t) - A \cos 2\pi n t]. \tag{18}$$

Wir haben hierbei vorausgesetzt, daß das resultierende Feld homogen sei, daß also auch $F$ und $A$ von der Zeit unabhängig sind. Genau genommen wird jedoch durch die Verzerrung des Feldes infolge der Ankerrückwirkung dasselbe etwas inhomogen. Nach der austretenden Polkante zu werden die Kraftlinien allmählich dichter zusammengedrängt, wie sich durch Fixieren der Kraftfelder gezeigt hat. Man müßte daher genauer $F$ und $A$ als lineare Funktionen der Zeit ansehen. Für die Kurzschlußstromkurve, für die es sich immer nur um das Feld in der Nähe der neutralen Zone handelt, gilt jedoch mit genügender Annäherung die Gleichung (18), und auch für das Gesamtfeld sei der Einfachheit halber das Feld als homogen angesehen, also (18) als gültig angenommen. Die schwachen Verluste durch Wirbelströme, Hysteresis, Ausstrahlung und Streuung der Kraftlinien sollen *nicht* berücksichtigt werden, ebensowenig die Kapazität der kurzgeschlossenen Spule.

## § 9.

## Die magnetische Wirkung des Kurzschlußstroms und der Übergangswiderstand.

Die bisher als Ankermagnetismus oder Ankerrückwirkung bezeichnete Größe $A$ setzt sich zusammen aus den Amperewindungen des Ankerstroms $I$ und den Amperewindungen des Kurzschlußstroms $i$. Überdeckt die Bürste mehrere Lamellen, so wird offenbar $i$ beträchtliche Wirkungen ausüben können. Herr Pohl hat (a. a. O.) zuerst genauer diese magnetischen Wirkungen der Kurzschlußströme untersucht, und er gelangt zu dem Resultat, daß „diese Einflüsse der Kurzschlußströme auf die Gesamtzahl der wirksamen Linien von keineswegs zu vernachlässigender, unter Umständen sogar die andern Ursachen der Anker-

1) Die infolge eines bestimmten zugrunde gelegten Maßsystems in den Gleichungen auftretenden Konstanten sollen im folgenden nicht berücksichtigt werden.

rückwirkung weit überwiegender Bedeutung sein können". Wenn ich auch diesem Resultat aus weiter unten zu erörternden Gründen nicht unbedingt zustimmen kann, so verdient doch der Einfluß der Kurzschlußströme auf die Feldgestaltung näher untersucht zu werden. Wie Herr Pohl hervorhebt, ist eine zweifache Wirkung der von den Kurzschlußströmen hervorgerufenen Kraftlinien zu unterscheiden. Ein Teil wird durch Pol und Joch geschlossen werden, und so für das Gesamtfeld in Betracht kommen, ein andrer wird sich direkt um die Drähte der kurzgeschlossenen Spule durch die Luft schließen, und so nur für das Kommutierungsfeld in Betracht kommen. Wir werden also einen Einfluß auf die nutzbare *EMK* der Maschine und eine Wirkung auf die in Betracht kommende kommutierende *EMK* zu unterscheiden haben. Daß das Feld in der Umgebung der Bürsten periodische Schwankungen von der Frequenz der Kommutierung durchmacht, ist mehrfach beobachtet worden. Wollen wir diese Wirkung in unsrer Differentialgleichung berücksichtigen, so müssen wir bedenken, daß sie mit der richtig gemessenen Wirkung der Selbstinduktion und gegenseitigen Induktion identisch ist, da diese ja durch dieselbe Kraftlinienzahl definiert wird. Ist also $E'$ praktisch an einer Maschine durch Intensitätsmessung des Kommutationsfeldes bestimmt, so darf, wenn dieser Wert in die Differentialgleichung eingesetzt wird, die Wirkung der Selbstinduktion in derselben nicht mehr berücksichtigt werden, das Glied $L_s \frac{di}{dt}$ hat also zu fehlen. Ist andrerseits $L_s$ nicht genau unter den bei der betrachteten Maschine vorhandenen Permeabilitätsverhältnissen und der Gestaltung des Feldes bei Belastung bestimmt worden, was ja praktisch kaum durchführbar sein wird, so ist $L_s$ noch um einen konstanten Betrag zu vermehren oder zu vermindern, wenn für $E'$ nur die aus Feld- und Ankerintensität resultierende Wirkung genommen wird. Ist nämlich unter $A$ nur die Rückwirkung des Ankerstroms $I$ verstanden, so ist $N$ in Gleichung (17) noch um $p \cdot f \cdot i$ zu vermindern, wenn $p$ ein von der Permeabilität des betreffenden magnetischen Kreises der Kraftlinien abhängiger, als konstant anzusehender Faktor ist. Während der Kurzschlußperiode können die Kraftlinien als dauernd senkrecht zur Linie $X$ in Fig. 4 angesehen werden. Aus (17) wird dann:

$$(19) \qquad N = f[F \cos(\varphi + 2\pi n t) + A \sin 2\pi n t - p i]$$

also:

$$(20) \qquad E' = f\left[2\pi n\{F \sin(\varphi + 2\pi n t) - A \cos 2\pi n t\} + p \frac{di}{dt}\right].$$

Verstehen wir unter $E'$ die *EMK* der ganzen kurzgeschlossenen Spule,

so ist $E'$ in (20), welche Gleichung nur für eine Windung gilt, noch mit $w_1$ zu multiplizieren, wenn $w_1$ die Anzahl der Windungen der kurzgeschlossenen Spule bezeichnet. Hierbei ist die Entfernung der Windungen voneinander vernachlässigt. Der Wert von $E'$, der in die Kurzschlußdifferentialgleichung einzusetzen ist, lautet demnach:

$$E' = w_1 f\left[2\pi n\{F \sin(\varphi + 2\pi n t) - A \cos 2\pi n t\} + p\frac{di}{dt}\right]. \tag{21}$$

Ist also $E'$ in der Differentialgleichung nur durch $F$ und $A$ definiert und ist $L_s$ nicht $= w_1 f p$, d. h. nicht unter den tatsächlichen Feldverhältnissen bestimmt, so ist zu $L_s$ noch die Differenz $w_1 f p - L_s$ zu addieren. Wir wollen nun im folgenden annehmen, daß unter $E'$ als kommutierender *EMK* nur die durch Feld- und Ankerintensität definierte verstanden sein soll, wir setzen also in der Differentialgleichung:

$$E' = w_1 f \cdot 2\pi n\,[F \sin(\varphi + 2\pi n t) - A \cos 2\pi n t]. \tag{22}$$

Dann haben wir außerdem die Selbstinduktion zu berücksichtigen und setzen:

$$L_k = w_1 f p, \text{ also als erstes Glied: } L_k \frac{di}{dt}.$$

Eine weitere, bei der Aufstellung der Kurzschlußgleichung bisher gemachte Voraussetzung war die, daß der *Übergangswiderstand* $R_1$ *zwischen Bürsten und Kollektor konstant sein sollte.* Wie die Praxis zeigt, ist er aber abhängig von der Stromdichte unter der Bürste, von dem Auflagedruck und der Tourenzahl, abgesehen natürlich von dem Material der Bürsten und des Kollektors. Die Untersuchungen des Hern Arnold (zusammengefaßt in der „Gleichstrommaschine") lassen nun erkennen, daß von diesen Einflüssen derjenige der Stromdichte der weitaus größte ist, während die Tourenzahl nur geringe Wirkung ausübt, und der Auflagedruck für unsre Berechnungen konstant gehalten wird. Die genaue Abhängigkeit des Übergangswiderstandes von der Stromdichte ist nun durch die Praxis bisher nicht festgestellt. Herr Arnold faßt seine Resultate dahin zusammen, daß:

$$R_1 = \frac{\delta}{s_u} + \varepsilon \tag{23}$$

gesetzt werden kann, wo $s_u$ die Übergangsstromdichte, und $\delta$, $\varepsilon$ positive Konstante sind. Unter dieser Bedingung: $\delta$, $\varepsilon$ positiv und nicht gleich Null, berücksichtigt Herr Arnold auch $R_1$ in der Differentialgleichung der Kurzschlußstromkurve, und er zeigt, daß dann, wie leicht ersichtlich, überall $\varepsilon$ an Stelle von $R_1$ tritt. Die Annahme des Herrn Arnold würde auch mit der von Herrn Pohl gemachten Angabe überein-

stimmen, daß der Übergangswiderstand „fast nach einer Hyperbel“ mit zunehmender Stromdichte abnehmen soll. Andererseits zeigen die Untersuchungen der Herren Niethammer (a. a. O.) und Dettmar (E. T. Z. 1900), daß $\varepsilon$ auch negativ sein kann; und Herr Arnold weist darauf hin, daß $\varepsilon$ *meist verschwindend klein* ist. Alle diese Fälle sind daher in der Differentialgleichung zu berücksichtigen und die Konsequenzen in bezug auf die günstigen Bedingungen zu ziehen.

## § 10.

## Die erweiterte Kurzschlußdifferentialgleichung.

Nach diesen Annahmen lautet die Differentialgleichung der Kurzschlußstromkurve:

$$(24)\qquad \frac{di}{dx} + i\left(\sigma' + \frac{\sigma}{x} + \frac{\sigma}{1-x}\right) + I\left(\frac{\sigma}{1-x} - \frac{\sigma}{x}\right) + \frac{T}{L_k}\cdot 2\pi n f w_1 \cdot$$
$$[F \sin(\varphi + 2\pi\, n T x) - A \cos 2\pi n T x] = 0,$$

wo $\sigma' = \frac{R\cdot T}{L_k}$, $\sigma = \frac{\varepsilon\cdot T}{L_k}$, $x = \frac{t}{T}$.

Zur Berechnung von $i$ würden wieder am geeignetsten die Reihenentwicklungen für $i$ sein, die wir nach Entwicklung von $\sin(\varphi + 2\pi n T x)$ und $\cos 2\pi n T x$ mit beliebiger Annäherung erhalten würden. Für die praktischen Folgerungen können wir uns jedoch mit einer qualitativen Diskussion von (24) begnügen, und, da der Typus der Gleichung sich nicht wesentlich geändert hat, so bleiben die günstigen Bedingungen, wie sie in § 7 hergeleitet sind, anwendbar.

*Zunächst sei* $\varepsilon > 0$, *also* $\sigma > 0$.

Dann erhalten wir als *unerläßliche Bedingung:*

$$(25)\qquad \frac{\varepsilon T}{L_k} > 1$$

(was auch sehr wohl der Fall sein kann, wenn $\tau < 1$). Die *günstigste Bedingung:* $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T} = 0$ liefert:

$$(26)\qquad I(R + 2\varepsilon) = 2\pi n f w_1 \left[F \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{k}\right) - A \cos\frac{2\pi}{k}\right],$$

da $T = \frac{1}{n\cdot k}$ ist, wo $k$ die Anzahl der Kollektorlamellen bezeichnet.[1]) So läßt sich auch (25) als Bedingung für die zulässigen Tourenzahlen oder Lamellenzahlen deuten.

---

1) Bemerkenswert ist, daß in dieser günstigsten Bedingung $L_k$ scheinbar nicht vorkommt. Wie sich später zeigt, sind jedoch auch $F$ und $A$ von denjenigen Größen abhängig, die im wesentlichen $L_k$ bestimmen.

(26) liefert für einen bestimmten Bürstenverschiebungswinkel $\varphi$ diejenige Stromstärke $I$, die am günstigsten ohne Feuern der Maschine kommutiert werden kann, wenn $n$ als konstant gilt; ebenso ist die maximale Stromstärke, die die Maschine funkenlos zu kommutieren vermag, berechenbar. Nun sind $I$, $n$ und $\varphi$ nicht unabhängig voneinander, wie noch ausführlich gezeigt wird, so daß (26) nicht von Leerlauf bis Volllast für konstante Bürstenstellung zu erfüllen ist. Hierfür ist offenbar nur die Bedingung $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T} < 0$ erfüllbar, welche aussagte, daß kein Überkommutieren eintritt. Sie liefert:

$$(27) \qquad I(R + 2\varepsilon) > 2\pi n f w_1 \left[F \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{k}\right) - A \cos\frac{2\pi}{k}\right].$$

Ist außerdem die Bedingung $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2I}{T}$ erfüllt, so wird die Maschine auch zu Beginn nicht feuern und wenig Wärme am Kollektor entwickeln, d. h. es muß sein:

$$(28) \qquad \frac{I(R + 2\varepsilon) + 2\pi n f w_1 [F \sin\varphi - A]}{L_k + \varepsilon T} = \frac{2I}{T}.$$

Gelingt es bei einer Maschine nicht, den günstigen Bedingungen zu genügen, so ist durch Anbringen von Hilfspolen (Kommutierungsmagneten) oder Kompensationswicklungen die erforderliche kommutierende *EMK* herzustellen, so daß auch für konstante Bürstenstellung die günstigste Bedingung für variable Belastung erfüllbar wird. Andrerseits sind die obigen Formeln noch auf eine etwas andere Form zu bringen, wenn man sich die Feldmagnete $N$ und $S$ als Elektromagnete denkt. Sei $J$ die Intensität des Erregerstroms und die Zahl der Windungen pro Pol $w_2$, so ist die Intensität: $F = \mu \cdot w_2 \cdot J$, wo $\mu$ ein Faktor ist, der von der Permeabilität des magnetischen Kraftlinienkreises des Gesamtfeldes abhängig ist. Falls die Belastung nicht allzusehr schwankt, ist $\mu$ in erster Annäherung als konstant anzusehen. In weiterer Annäherung wäre $F = F_0 + \mu' w_2 J$ zu setzen, doch soll im folgenden der Einfachheit halber die erste Form beibehalten werden. Ebenso ergibt sich:

$$A = \mu (k - 2) w_1 \cdot I.$$

Die günstigste Bedingung (26) lautet dann:

$$(29) \; I(R + 2\varepsilon) = 2\pi n f w_1 \mu \left[w_2 J \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{k}\right) - (k - 2) w_1 I \cos\frac{2\pi}{k}\right].$$

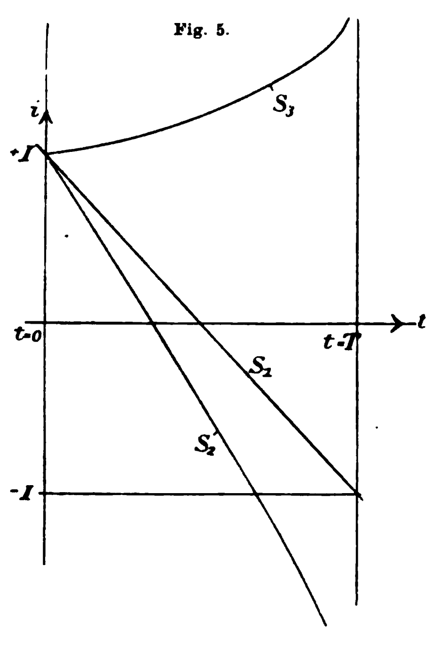
Wir haben jetzt die vier Größen $I$, $J$, $n$ und $\varphi$ als Variable, und da dieselben noch durch eine weitere, später abzuleitende Gleichung verbunden sind, so ist auch bei Konstanz einer der Variablen die günstigste Bedingung zu erfüllen.

Haben wir jedoch eine Hauptstrommaschine, so fällt unter diesen einfachen Annahmen $I$ aus der Gleichung heraus, da dann $J = 2\,I$ ist, während für Nebenschluß- und Kompound-Maschinen durch eine einfache Rechnung sich die betreffenden Stromstärken aus den äußeren Widerständen ergeben. Der Einfachheit halber sei die in Fig. 1 zugrunde gelegte Maschine als fremderregte gedacht.

*Ist zweitens* $\varepsilon < 0$, d. h. $\sigma < 0$, so ändert die Differentialgleichung (24) ihre Eigenschaften dahin, daß die Punkte $x = 0$ und $x = 1$ sich in ihrer Bedeutung für die Kurzschlußstromkurve vertauschen. Setzen wir $\sigma_1 = -\sigma$, wo also $\sigma_1$ positiv ist, so ergibt sich als Lösung von (24) in der Umgebung von $x = 0$:

$$(30) \qquad i = I\varphi_1(x) + F\varphi_2(x) + A\varphi_3(x) + C^* e^{-\sigma' x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\sigma_1},$$

wo die $\varphi(x)$ Reihen sind, die für $|x| < 1$ konvergieren, aber für $x = 1$ divergieren und die für $x = 0$ den Wert $i = I$ liefern. Damit die Anfangsbedingung $x = 0$, $i = I$ erfüllt ist, bleibt also $C^*$ *ganz beliebig*, alle Integralkurven genügen ihr. Es sind also Kurven wie $S_2$ und $S_3$ in Fig. 5 durch *diese Bedingung allein nicht ausgeschlossen.*




Der Fall $\varepsilon < 0$ würde demnach vollkommen den Anschauungen entsprechen, die man früher über die Kommutierungsvorgänge hatte, daß nämlich die Funken durch ein zu starkes Anwachsen der Stromstärke hervorgerufen würden. Nun zeigt aber (24), daß alle Kurven, die nicht auch durch $x = 1$, $i = -I$ gehen, in $x = 1$ eine Unstetigkeitsstelle haben, sie würden also für $x = 1 : i = +\infty$ oder $i = -\infty$ liefern. Derartige abnorme Stromstärken werden natürlich, wenn die Maschinen überhaupt brauchbar sein sollen, nicht auftreten, und falls nur endliche Stromstärken zuzulassen sind, haben wir wieder die Bedingung: $x = 1$ $i = -I$. $i$ ist dann dargestellt durch:

$$(31) \qquad i = I\,\Phi_1(y) + F\Phi_2(y) + A\Phi_3(y),$$

wo die $\Phi(y)$ zwischen $y = 0$ und $y = 1$ einschließlich konvergent sind.

Daraus läßt sich $C^*$ ähnlich wie früher $C'''$ ermitteln. (Dem entspricht etwa die Kurve $S_1$ der Fig. 5). Die günstigen Bedingungen würden ganz ähnlich wie früher abzuleiten sein, nur daß jetzt der Beginn des Kurzschlusses der gefährliche Moment für die Funkenbildung ist. So tritt, wie aus (30) ersichtlich: $\sigma_1 > 1$ als unerläßliche Bedingung auf, und man wird mehr Gewicht auf die Bedingung $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{2I}{T}$ legen als auf $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=T} = 0$.

Es kommt demnach bei der Vorausberechnung der Kurzschlußkurve einer Maschine sehr viel auf die *genaue Bestimmung des Übergangswiderstandes* zwischen Bürste und K[illegible]or an. Die Unvollkommenheit, mit welcher dies bisher in der Pra[illegible]geschehen, ist entschieden als ein Mangel zu bezeichnen. Außer[illegible] natürlich nicht zu vergessen, daß der Bürstenübergangswid[illegible] Zufälligkeiten abhängig ist, die im Betriebe häufig we[illegible]e in die Rechnung nicht eingeführt werden können.

Herr Arnold weist, wie erwähn[illegible] darauf hin, daß $\varepsilon$ stets sehr klein ist. Wir erhalten daher als 3. [illegible]ll: $\varepsilon = 0$, *d. h.* $\sigma = 0$. Dann wird (24):

$$\frac{di}{dx} + i\sigma' + \frac{T}{L_k} \cdot 2\pi n f w_1 \left[F \sin(\varphi + 2\pi n T x) - A \cos 2\pi n T x\right] = 0. \tag{32}$$

Das Integral läßt sich in geschlossener Form darstellen; es ergibt sich:

$$i = \frac{2\pi n T M_1 \left\{ A\left[\sin 2\pi n T x + \frac{\sigma'}{2\pi n T} \cos 2\pi n T x\right] - F\left[\frac{\sigma'}{2\pi n T} \sin(\varphi + 2\pi n T x) - \cos(\varphi + 2\pi n T x)\right]\right\}}{\sigma'^2 + 4\pi^2 n^2 T^2} - Ce^{-\sigma' x}, \tag{33}$$

wo $M_1 = \frac{T}{L_k} \cdot 2\pi n f w_1$.

Die obigen Gleichungen zeigen, daß weder $x = 0$ noch $x = 1$ singuläre Punkte sind, $i$ ergibt sich als ganze transzendente Funktion. Nun ist aber zu bemerken, daß nicht mehr alle Integralkurven durch $x = 1$, $i = -I$ gehen. Bestimme ich also $C$ aus (33) durch die Anfangsbedingung $x = 0$, $i = I$, so ist für $x = 1$ im allgemeinen $i \neq -I$. In diesem Fall würde demnach eine wirkliche Stromunterbrechung eintreten, und die günstige Bedingung müßte lauten $i_{x=1} = -I$. Wir haben in diesem Fall gleiche Potentialdifferenz zwischen den beiden Lamellen und der Bürste (wie (32) zeigt), ohne jedoch geradlinige Kommutierung zu erhalten. In der Praxis wird dieser Fall wohl nie eintreten; denn $\varepsilon$ wird, wenn auch klein, doch nicht vernachlässigt werden dürfen.

## § 11.

## Die Generatortheorie.

Es handelt sich jetzt darum, die *Hauptgleichung des Generators* zwischen $I$, $J$, $\varphi$ und $n$ aufzustellen. Clausius und Stern (a. a. O.) erreichten dies, indem sie die Arbeit des Stroms bei bestimmter Ankergeschwindigkeit berechneten. Ihren Ausführungen liegen jedoch viele veraltete Vorstellungen zugrunde. (Vgl. meine Dissertation). Es soll daher im folgenden ein Ausdruck für die Klemmenspannung berechnet werden.

Die Anzahl der Kraftlinien, die durch eine Windung des Ankers hindurchgehen, ist zur Zeit $t$:

$$N = f\mu\,[w_2 J \cos(\varphi + 2\pi n t) + w_1 (k-2) I \sin 2\pi n t],$$

solange die beiden kurzgeschlossenen Spulen außer Acht bleiben. Die Gesamtzahl der Kraftlinien, die in Folge der magnetischen Wirkung von $i$ durch eine Windung hindurchgehen, ist: $\frac{L_k}{w_1} i$. Sämtlich kommen sie nun aber nicht, wie schon erwähnt, für das Hauptfeld zur Wirkung, sondern, je nach der Permeabilität des durch Pol und Joch geschlossenen Kreises, etwa der $c^{\text{te}}$ Teil, also $\frac{L_k}{c w_1} \cdot i$. Da diese sich dem vorhandenen Felde superponieren, so ist mit einiger Annäherung: $\frac{L_k}{c \cdot w_1} = f \cdot \mu$, welches wir als konstant ansehen wollen. Die Wirkung des Kurzschlußstroms auf das Gesamtfeld ist somit auf die Selbstinduktion und gegenseitige Induktion der kurzgeschlossenen Spulen zurückzuführen. Die eigentliche Ankerrückwirkung wird noch vermehrt oder vermindert um die magnetische Wirkung der Kurzschlußströme. Eine derartige Wirkung ist häufig festgestellt worden. Man hat sie früher auch auf die Selbstinduktion zurückgeführt, indem man annahm, daß $i$ zur Zeit $T$ nicht $= -I$ sei, so daß in der wirksamen Armatur die Umkehr des Stromes zum Teil erfolgen müsse. Dies ist, wie wir sahen, wenigstens für $\varepsilon > 0$, nicht der Fall; die Wirkung der Selbstinduktion auf den Gesamtstrom wird durch die magnetische Verkettung der Spulen bewirkt und nicht durch die elektrische. Herr Pohl hat zuerst diesen Zusammenhang erkannt und versucht, quantitativ die magnetische Wirkung der Kurzschlußströme zu messen, also zunächst sie von der übrigen Ankerrückwirkung zu trennen. Bei konstantem Anker- und Erregerstrom ist nun die übrige Ankerrückwirkung von der Tourenzahl unabhängig; nur die Kurzschlußströme, die ja von der Tourenzahl abhängen, können daher, wenn wir von den Wirbelströmen absehen, die Linienzahl eines Generators

bei konstanten $I$ und $J$ ändern. „Daher sind auch die *EMK* und die Klemmenspannung keine gradlinigen Funktionen der Tourenzahlen, sondern schwach gekrümmte Kurven. Aus der Abweichung der *EMK*-Kurve von der Proportionalität mit der Tourenzahl läßt sich mit Hilfe der Leerlaufcharakteristik der Anteil der Kurzschlußströme an der Ankerrückwirkung bestimmen, wodurch eine Analyse einer gemessenen Ankerrückwirkung ermöglicht wird.“ (Pohl S. 51). Weshalb ich hierin keine exakte Methode zur Bestimmung der durch Schenkelamperewindungen ausdrückbaren magnetischen Rückwirkung der Kurzschlußströme sehe, wird aus folgenden Betrachtungen ersichtlich.

Die totale Anzahl der durch eine Windung gehenden Linien ist zur Zeit $t$:

$$N = f\mu\left[w_2 J \cos(\varphi + 2\pi n t) + w_1 (k-2) I \sin 2\pi n t - i\right]. \tag{34}$$

Also:

$$E' = f\mu\left[2\pi n\left\{w_2 J \sin(\varphi + 2\pi n t) - w_1 (k-2) I \cos 2\pi n t\right\} + \frac{di}{dt}\right], \tag{35}$$

so lange die Windung nicht weit von der Bürste entfernt ist. Die in einer Windung während der Umdrehung, also in beliebiger Lage, befindlichen Kraftlinien zur Zeit $t$ sind dann:

$$N = f\mu\left[w_2 J \cos(\varphi + 2\pi n t) + w_1 (k-2) I \sin 2\pi n t - i \cos 2\pi n t\right]. \tag{36}$$

Demnach:

$$\begin{aligned} E' = f\mu\Big[2\pi n\left\{w_2 J \sin(\varphi + 2\pi n t) - w_1 (k-2) I \cos 2\pi n t\right\} \\ + \cos 2\pi n t \frac{di}{dt} - 2\pi n i \sin 2\pi n t\Big]. \end{aligned} \tag{37}$$

Die in einer Windung nach Schluß des Kurzschlusses bis zum Wiederbeginn desselben unter der andern Bürste während der Umdrehung erzeugte mittlere *EMK* ist nun:

$$e_1 = \frac{\int_T^{\frac{1}{2n}} E'\,dt}{\frac{1}{2n} - T}.$$

Da aber $E' = -\frac{dN}{dt}$ war, so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß $T = \frac{1}{nk}$ ist:

$$\begin{aligned} e_1 = -\frac{2n}{1-2nT} f\mu\Big[w_2 J\left\{\cos(\varphi + \pi) - \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{k}\right)\right\} \\ - w_1 (k-2) I \sin\frac{2\pi}{k} - \int_T^{\frac{1}{2n}} d(i \cos 2\pi n t)\Big]. \end{aligned} \tag{38}$$

Da $i$ während jeder Kurzschlußperiode Schwankungen von $+I$ zu $-I$ ausführt, so ist das letzte Integral in Teilintegrale zu zerlegen, von denen jedes immer die Zeit $T$ umfaßt. Da die Maschine vollkommen symmetrisch laufen soll, so heben sich jedoch alle Teilintegrale bis auf das letzte weg, und es wird, da $\frac{1}{2n}$ den Moment des Kurzschlusses unter der andern Bürste bezeichnet:

$$e_1 = -\frac{2n}{1-2nT} f\mu \left[ w_2 J \left\{ \cos(\varphi+\pi) - \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{k}\right) \right\} - w_1 (k-2) \cdot I \sin\frac{2\pi}{k} + I - I\cos\frac{2\pi}{k} \right].$$

Da $\left(\frac{k}{2}-1\right) w_1$ Windungen für die Gesamt-$EMK$: $E_1$ der Maschine in Betracht kommen, so ist:

$$(39)\quad E_1 = n w_1 f\mu \left[ w_2 J \left\{ \cos\varphi + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{k}\right) \right\} + w_1 (k-2) I \sin\frac{2\pi}{k} - I + I\cos\frac{2\pi}{k} \right]$$

oder:

$$(40)\quad E_1 = n w_1 f\mu \left[ 2 J w_2 \cos\frac{k\varphi+\pi}{k} \cdot \cos\frac{\pi}{k} + I \left\{ w_1 (k-2) \sin\frac{2\pi}{k} - 2\sin^2\frac{\pi}{k} \right\} \right].$$

Die bei diesem einfachen Fall durch die magnetische Wirkung der Kurzschlußströme hervorgebrachte Änderung der Gesamt-$EMK$: $E_1$ besteht demnach in einer Verminderung um den Betrag: $2 n w_1 f\mu I \sin^2\frac{\pi}{k}$, ist also von $n$ linear abhängig. Nun werden aber im allgemeinen, wie Herr Pohl ausführt, die dem Hauptwege folgenden durch Schenkel und Joch sich schließenden Kraftlinien, auf die es ja für die Gesamtwirkung allein ankommt, wegen der „Schirmwirkung des massiven Eisens und der Transformatorwirkung der Magnetspulen" den Schwankungen des Kurzschlußstroms nicht in meßbarer Weise folgen können. Es wird sich also eine von der Stärke des Kurzschlußstroms abhängige Vergrößerung oder Verkleinerung von $E_1$ ergeben, und da $i$ im wesentlichen durch $I$ und $n$ gegeben wird, so können wir die magnetische Wirkung der Kurzschlußströme durch eine Funktion: $\psi(I, n)$ in Rechnung bringen. Es wird dann:

$$(41)\quad E_1 = n w_1 f\mu \left[ 2 J w_2 \cos\frac{k\varphi+\pi}{k} \cdot \cos\frac{\pi}{k} + I w_1 (k-2) \sin\frac{2\pi}{k} + \psi(I, n) \right].$$

Andrerseits ist $E_1$ durch die Widerstände und Stromstärken der einzelnen Zweige des Gesamtstromverlaufs auszudrücken.

Nach dem Kirchhoffschen Satz ergibt sich aus Fig. 6, wenn der äußere (durch die Belastung gegebene) Widerstand $W_a$ ist und der

gesamte Widerstand des betreffenden Ankerzweiges: $2R_e + R_s\left(\frac{k}{2}-1\right) = W_i$ gesetzt wird:

$$E_1 = 2IW_a + IW_i + 2\delta b + \frac{\varepsilon T(I+i)}{T-t} + \frac{\varepsilon T(I-i)}{t}.$$

Führen wir hier den zusätzlichen Kurzschlußstrom, der durch die Gleichung: $i = I\left(1 - 2\frac{t}{T}\right) + i'$ gegeben ist, ein, so wird:

$$E_1 = 2IW_a + IW_i + 2\delta b + \varepsilon\left[4I - \frac{i'(T-2t)T}{(T-t)t}\right]. \tag{42}$$

$2IW_a$ ist gleich der Klemmenspannung $K$.

Mit (41) kombinierend, erhalten wir:

$$K + IW_i + 2\delta b + \varepsilon\left[4I - \frac{i'(T-2t)T}{(T-t)t}\right] = nw_1 f\mu \cdot \left[2Jw_2 \cos\frac{k\varphi+\pi}{k} \cdot \cos\frac{\pi}{k} + Iw_1(k-2)\sin\frac{2\pi}{k} + \psi(I,n)\right]. \tag{43}$$

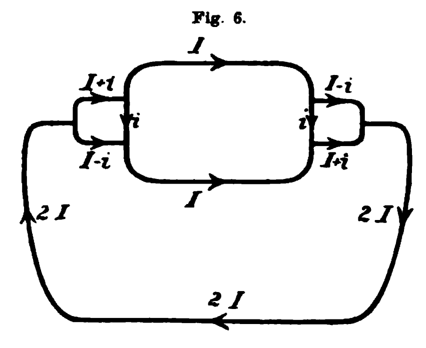


Fig. 6.

Dies ist die *Hauptgleichung des Generators,* die in der Einleitung als:

$$K = F(I, J, n, \varphi, i)$$

bezeichnet wurde. Aus ihr ergeben sich die verschiedenen Charakteristiken der Maschine und, damit Funkenfreiheit existiert, muß sie mit den abgeleiteten günstigen Bedingungen in Verbindung gebracht werden.

Wir sehen, daß die Gesamt-*EMK*: $E_1$ *eine lineare Funktion von* $n$ ist, *falls* $\psi(I,n)$ *konstant oder Null ist,* d. h. nur die magnetischen Wirkungen der Kurzschlußströme können eine Abweichung von der Proportionalität mit der Tourenzahl bewirken, wie dies auch Herr Pohl annahm. Praktisch ist nun aber die $E_1$-Kurve nur nach Kenntnis der $K$-Kurve auf theoretischem Wege zu bestimmen. So nimmt Herr Pohl die $K$-Kurve als Funktion von $n$ für konstante $I$ und $J$ auf und addiert den Spannungsabfall im Anker und den Bürsten. Die Abweichung der so entstehenden $E_1$-Kurve von der geraden Linie läßt sich mit Hilfe der Leerlaufcharakteristik bestimmen und in Schenkelamperewindungen ausdrücken. Nun ist aber der Spannungsabfall unter der Bürste nur konstant, falls $i' = 0$ ist, wie (43) zeigt. Durch Addition des Spannungsabfalls, den Herr Pohl als konstant annimmt, ist somit die elektrische Verkettung der Kurzschlußspule mit dem äußeren

Stromkreis nicht berücksichtigt, und die Abweichung der $E_1$-Kurve von der geraden Linie ist nicht nur durch die magnetische Wirkung der Kurzschlußströme gegeben sondern auch durch die elektrische. So ist diese Abweichung zwar ein Mittel, um die Gesamtwirkung der Kurzschlußströme zu untersuchen, aber sie liefert nicht die magnetische allein, ist demnach nicht ohne weiteres in Schenkelamperewindungen umzurechnen. Daß diese *„elektrische Wirkung der Kurzschlußströme auf den Gesamtstrom"* oder dieser *„zusätzliche Spannungsabfall infolge der Kurzschlußströme"*, wie ich die beschriebene Einwirkung nennen möchte, nun die Hauptwirkung bei der Abweichung der $E_1$-Kurve von der geraden Linie ausübt, ist für unsern einfachen Fall bewiesen, da $\psi(I, n)$ von $n$ unabhängig war. Ob dies auch in praktischen Fällen eintritt, läßt sich natürlich nur entscheiden, wenn es gelingt, die magnetische und elektrische Wirkung zu trennen und jede quantitativ zu messen. Außerdem ist zu bemerken, daß die Abweichung von der geraden Linie keineswegs immer die gesamte magnetische Wirkung der Kurzschlußströme liefert, sondern nur den Teil, der nicht proportional mit $n$ wächst. Jedenfalls kann (43) richtige Aufschlüsse geben, sobald in ihr alle praktisch existierenden Verhältnisse berücksichtigt werden. Offenbar ist die elektrische Wirkung gleich Null, wenn $i' = 0$; das stimmt auch mit den Angaben des Herrn Pohl überein, daß nur die zusätzlichen Kurzschlußströme Abweichungen von $E_1$ mit $n$ ergeben.

Die elektrische Wirkung ist nun außerdem von Herrn Pohl unberücksichtigt gelassen bei der Ermittlung der *gesamten Ankerrückwirkung*, d. h. der Ankerrückwirkung samt Kurzschlußstromwirkung, da dann die Mehrerregung sich aus der Lehrlaufcharakteristik nach Abzug desjenigen Erregerstroms ergibt, der für den (als konstant angesehenen) Spannungsfall im Anker und Bürsten erforderlich ist. Auch hier werden, wie (43) zeigt, die Kurzschlußströme störende Einflüsse ausüben, deren Größe erst weitere praktische Untersuchungen bestimmen müssen. Nun war $\varepsilon$ fast immer klein, so daß auch die elektrische Wirkung meist klein sein wird. So sagt Herr Pohl (S. 37 Anm.): „daß der Bürstenwiderstand mit der Stromdichte variabel ist, läßt sich hier vernachlässigen, da er im vorliegenden Falle gegenüber dem Ankerwiderstand klein ist."

Aus (43) geht nun auch hervor, daß $I$, welches wir bisher als konstant angesehen haben, von $t$ abhängt, daß also im äußeren Stromkreis Schwankungen sowohl der Spannung als auch der Stromstärke stattfinden müssen. Wenn wir diese in unserer Theorie bisher nicht berücksichtigt haben, so geschah dies unter der Voraussetzung, daß alle Untersuchungen für eine möglichst funkenlos laufende Maschine

gelten sollten. Wir haben daher mit der Hauptgleichung (43) die günstigen Bedingungen kombiniert, und sind so zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit der Praxis gelangt. Zugleich hat sich jedoch gezeigt, daß eine exakte Kommutationstheorie nur aus der Kombination der Kurzschlußdifferentialgleichung mit der Hauptgleichung hergeleitet werden kann.

Die beiden Grundgleichungen, die sich aus den geschlossenen Stromkreisen der Fig. 6 ergeben, sind demnach:

*1. die Hauptgleichung:*

$$2IW_a + IW_i + 2\delta b + \varepsilon\left[4I - \frac{i'(T-2t)T}{(T-t)t}\right] - E_1 = 0; \tag{44}$$

*2. die Kurzschlußdifferentialgleichung:*

$$\frac{di}{dx} + i\left(\sigma' + \frac{\sigma}{x} + \frac{\sigma}{1-x}\right) + I\left(\frac{\sigma}{1-x} - \frac{\sigma}{x}\right) + E' = 0; \tag{45}$$

wo in der Gesamt-*EMK*: $E_1$ und der kommutierenden *EMK*: $E'$ die Variabilität von $I$ zu berücksichtigen ist. Die sich ergebenden simultanen Differentialgleichungen für $i$ und $I$ geben dann die Grundlage für die günstigen Bedingungen.

Hamburg, im März 1906.

---

# Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen.

(Fortsetzung der Arbeit im 52. Bd. dieser Zeitschrift, S. 1—43.)

Von J. Horn in Clausthal.

Die gegenwärtige Arbeit schließt sich an die Aufsätze „Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen“ im 48. Bd. dieser Zeitschrift, S. 400—434 (künftig mit A. zitiert) und „Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen“ im 52. Bd., S. 1—43 (künftig mit B. zitiert) an.

Die in A. §§ 2—4 und B. §§ 5—8 enthaltenen mathematischen Untersuchungen über die periodischen Lösungen gewisser Systeme von Differentialgleichungen wurden in den übrigen Paragraphen von A. und B. zur Untersuchung periodischer kleiner Schwingungen benutzt, d. h. periodischer Bewegungen eines mechanischen Systems mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden in der Nähe einer Gleichgewichtslage oder in der Nähe einer stationären Bewegung, wobei jedoch die übliche Beschränkung auf die linearen Glieder der Differentialgleichungen der Bewegung nicht gemacht wird.

In A. § 1 und § 5 werden die periodischen Bewegungen eines allgemeinen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage untersucht, während in A. §§ 6—8 spezielle Fälle behandelt werden. In B. §§ 1—4 und §§ 8—12 finden sich vier spezielle Aufgaben, wobei es sich teilweise um Bewegungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage handelt, teilweise um Bewegungen, welche einer stationären Bewegung benachbart sind.

In der vorliegenden Arbeit werden von den früheren mathematischen Untersuchungen weitere Anwendungen auf periodische Schwingungen gemacht; in §§ 13—15 und in §§ 20—22 werden zwei allgemeinere mechanische Systeme behandelt, welche frühere spezielle Aufgaben umfassen; die §§ 16—19 beziehen sich auf ein anderes allgemeines System mit einer früher nicht behandelten speziellen Aufgabe.

## § 13

Die in B. § 3 und § 11 behandelte Aufgabe III (Periodische Bewegungen eines um einen festen Punkt 0 drehbaren schweren starren Körpers in der Nähe einer Gleichgewichtslage unter Benutzung der Lagrangeschen Gleichungen) ist ein besonderer Fall des folgenden allgemeineren Problems.

Ein System von $n$ Freiheitsgraden, dessen Verbindungen von der Zeit $t$ nicht abhängen, sei durch die $n$ Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt. Die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \sum A_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_m)\, x'_\alpha x'_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n$$

sei eine positive definite quadratische Form von

$$x'_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \ldots, \quad x'_n = \frac{dx_n}{dt},$$

deren Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$, *welche jetzt von den Koordinaten* $x_{m+1}, \ldots, x_n$ *nicht abhängen sollen*, als analytische, in der Nähe der Stelle $x_1 = 0$, $\ldots, x_m = 0$ reguläre Funktionen von $x_1, \ldots, x_m$ vorausgesetzt werden. Es sei eine *nur von den* $m$ *Koordinaten* $x_1, \ldots, x_m$ *abhängige Kräftefunktion*

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ik} b_{ik} x_i x_k + \cdots \qquad (i, k = 1, \ldots, m)$$

vorhanden, welche in eine mit den angeschriebenen quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_m$ entwickelbar sein möge.[1])

1) Der Fall $m = n$ ist in A. § 1 und § 5 behandelt. — Gegenwärtig sind $x_{m+1}, \ldots, x_n$ zyklische Koordinaten.

Die Bewegung unseres Systems wird durch die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

dargestellt. Die Integration der $n - m$ letzten Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_j} = 0 \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

ergibt

$$\frac{\partial T}{\partial x'_j} = C_j, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

wo $C_{m+1}, \ldots, C_n$ Integrationskonstante sind. Außerdem ist die Energiegleichung

$$2(T - U) = C$$

mit der Integrationskonstanten $C$ vorhanden.

Zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen nehmen wir eine lineare Transformation der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ vor.

Wir setzen

$$A_{\alpha\beta}(0, \ldots, 0) = a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

und betrachten die beiden quadratischen Formen der Veränderlichen $u_1, \ldots, u_n$

$$P = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

$$Q = \sum_{ik} b_{ik} u_i u_k; \qquad (i, k = 1, \ldots, m)$$

die Form $P$ ist definit positiv. Wie in § 15 gezeigt wird, lassen sich die beiden Formen $P$, $Q$ durch eine lineare Substitution

$$v_i = h_{i1} u_1 + \cdots + h_{im} u_m \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$v_j = h_{j1} u_1 + \cdots + h_{jn} u_n, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

worin $h_{11}, \ldots, h_{nn}$ reelle Konstante sind, in

$$P = v_1^2 + \cdots + v_m^2 + v_{m+1}^2 + \cdots + v_n^2,$$

$$Q = s_1 v_1^2 + \cdots + s_m v_m^2$$

überführen, wo $s_1, \ldots, s_m$ reelle Größen darstellen.

Führt man an Stelle von $x_1, \ldots, x_n$ vermittels der Gleichungen

$$y_i = h_{i1} x_1 + \cdots + h_{im} x_m, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$y_j = h_{j1} x_1 + \cdots + h_{jn} x_n \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

die neuen Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ ein, so wird

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta = y_1'^2 + \cdots + y_n'^2,$$

$$\sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = s_1 y_1^2 + \cdots + s_m y_m^2 .$$

Wenn wir die neuen Koordinaten wieder mit $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen, so können wir

$$a_{\alpha\alpha} = 1 \quad (\alpha = 1, \ldots, n), \qquad a_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \gtrless \beta)$$
$$b_{ii} = s_i \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad b_{ik} = 0 \quad (i \gtrless k)$$

voraussetzen. Es gelten die Formeln von A. § 1 (Bd. 48, S. 403), wenn man darin $s_{m+1} = 0, \ldots, s_n = 0$ setzt. Die Lagrangeschen Gleichungen lassen sich also auf die Form bringen (Bd. 48, S. 404):

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha; \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{dx'_i}{dt} = s_i x_i + F_i(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_m) + G_i(x_1, \ldots, x_m); \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{dx'_j}{dt} = F_j(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_m) + G_j(x_1, \ldots, x_m); \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

$F_\alpha$ ist eine quadratische Form von $x'_1, \ldots, x'_n$, deren Koeffizienten Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_m$ sind, und $G_\alpha$ eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_m$, welche mit quadratischen Gliedern beginnt.

Indem wir die $n - m$ Differentialgleichungen

$$\frac{dx_j}{dt} = x'_j \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

vorläufig außer acht lassen, betrachten wir die folgenden $m + n$ Differentialgleichungen mit den $m + n$ abhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_n$:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = x'_i, & (i = 1, \ldots, m) \\[2mm] \dfrac{dx'_i}{dt} = s_i x_i + F_i(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_m) + G_i(x_1, \ldots, x_m), & (i = 1, \ldots, m) \\[2mm] \dfrac{dx'_j}{dt} = F_j(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_m) + G_j(x_1, \ldots, x_m). & (j = m+1, \ldots, n) \end{cases}$$

Nach Einführung der neuen Koordinaten ist die Energiegleichung von der Form

$$\text{(B}_1\text{)} \qquad x_1'^2 + \cdots + x_n'^2 - s_1 x_1^2 - \cdots - s_m x_m^2 + \cdots = C,$$

wo die weggelassenen Glieder von höherer als der zweiten Dimension sind. Die Integralgleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial x_j'} = A_{j1}x_1' + \cdots + A_{jn}x_n' = C_j \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

haben, da für $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$

$$A_{jj} = 1, \quad A_{j\alpha} = 0 \qquad (\alpha \gtrless j)$$

ist, die Form

$$(\mathrm{B}_2) \qquad x_j' + \Psi_j = C_j, \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

wo $\Psi_j$ eine lineare homogene Funktion von $x_1', \ldots, x_n'$ darstellt, deren Koeffizienten Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_m$ ohne konstante Glieder sind.

## § 14

Das Differentialgleichungssystem (A) mit den Integralen ($\mathrm{B}_1$) und ($\mathrm{B}_2$) ist von derselben Form wie das in B. §§ 6—8 (Bd. 52, S. 23 ff.) behandelte Differentialgleichungssystem (A) mit den Integralen (B).

Die charakteristische Gleichung unseres jetzigen Systems (A)

$$\prod_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} -s, & 1 \\ s_i, & -s \end{vmatrix} \cdot (-s)^{n-m} = 0$$

hat die Wurzeln

$$\sqrt{s_i}, \quad -\sqrt{s_i} \qquad (i=1,\ldots,m)$$

und die $(n-m)$ fache Wurzel $s = 0$. Wir nehmen an, $s_1, \ldots, s_m$ seien von einander und von Null verschieden, $s_1 = -\lambda^2$ sei negativ, und es sei keiner der Quotienten $\frac{s_2}{s_1}, \ldots, \frac{s_m}{s_1}$ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl. Dann hat die charakteristische Gleichung neben den beiden rein imaginären Wurzeln $\pm\sqrt{s_1} = \pm\lambda\sqrt{-1}$ keine Wurzel $\pm p\lambda\sqrt{-1}$ ($p$ ganze Zahl); außer der $(n-m)$ fachen Wurzel $s = 0$ sind alle Wurzeln einfach und von Null verschieden. Es sind also alle in B. § 6 gemachten Voraussetzungen erfüllt.

Nach dem in B. § 7 bewiesenen Satze besitzt das jetzige Differentialgleichungssystem (A) eine periodische Lösung

$$x_i = x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + \cdots, \qquad (i=1,\ldots,m)$$

$$x_\alpha' = y_\alpha^{(1)} + y_\alpha^{(2)} + \cdots \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots;$$

$T^{(\nu)}$ $(\nu \geqq 2)$ ist eine ganze homogene Funktion $\nu$ ten Grades der Integrationskonstanten $c_1, c_1', c_{m+1}', \ldots, c_n'$,[1] während $T^{(1)}$ eine lineare homogene Funktion von $c_{m+1}', \ldots, c_n'$ ist. Setzt man

$$w = \frac{2\pi t}{T},$$

so ist

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + \frac{c_1'}{\lambda} \sin w, \qquad x_2^{(1)} = 0, \; \ldots, \; x_m^{(1)} = 0,$$

$$y_1^{(1)} = -c_1 \lambda \sin w + c_1' \cos w, \quad y_2^{(1)} = 0, \; \ldots, \; y_m^{(1)} = 0,$$

$$y_{m+1}^{(1)} = c_{m+1}', \; \ldots, \; y_n^{(1)} = c_n';$$

$x_i^{(\nu)}, y_\alpha^{(\nu)}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ sind ganze homogene Funktionen $\nu$ ten Grades von $c_1, c_1', c_{m+1}', \ldots, c_n'$ und lineare Funktionen von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots, \nu)$.

Die beschriebene periodische Lösung kann nach B. § 8 berechnet werden.

Zur Berechnung von $x_j$ $(j = m + 1, \ldots, n)$ bildet man den Ausdruck

$$\frac{dx_j}{dw} = \frac{T}{2\pi} x_j' = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{T^{(1)}}{2\pi} + \frac{T^{(2)}}{2\pi} + \cdots\right)(y_j^{(1)} + y_j^{(2)} + \cdots),$$

welcher als periodische Funktion von $w$ mit der Periode $2\pi$ in eine nach Kosinus und Sinus der Vielfachen von $w$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist. Das konstante Glied dieser Entwickelung, der Mittelwert der periodischen Funktion $\frac{dx_j}{dw}$,

$$\Omega_j = \frac{c_j'}{\lambda} + \cdots,$$

ist eine Potenzreihe von $c_1, c_1', c_{m+1}', \ldots, c_n'$, welche außer dem angeschriebenen Glied nur Glieder zweiten und höheren Grades enthält. Dann ist

$$\frac{dx_j}{dw} = \Omega_j + z_j^{(2)} + z_j^{(3)} + \cdots,$$

wo $z_j^{(\nu)}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ eine ganze homogene Funktion $\nu$ ten Grades der Integrationskonstanten und eine lineare homogene Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 1, \ldots, \nu)$ ist. Wenn der Wert von $x_j$ für $t = 0$ mit $c_j$ bezeichnet wird, erhält man durch Integration

$$x_j = c_j + \Omega_j w + x_j^{(2)} + x_j^{(3)} + \cdots; \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

$x_j^{(\nu)}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ ist eine ganze homogene Funktion $\nu$ ten Grades von

1) Es ist $x_1 = c_1$, $x_1' = c_1'$, $x_{m+1}' = c_{m+1}'$, $\ldots$, $x_n' = c_n'$ für $t = 0$.

$c_1, c_1', c_{m+1}', \ldots, c_n'$ und eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ ($p = 0, 1, \ldots, \nu$), welche für $w = 0$ verschwindet.

Die hier dargestellte Methode ist eine Verallgemeinerung derjenigen, welche in B. § 3 und § 11 auf die (am Anfang von § 13 noch einmal ausgesprochene) Aufgabe III angewandt wurde.

## § 15

Die in § 13 aufgestellten Behauptungen über die Transformation der beiden quadratischen Formen

$$P = \sum a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

$$Q = \sum b_{ik} u_i u_k \qquad (i, k = 1, \ldots, m)$$

sind noch zu begründen.[1])

Die Gleichung $n$ten Grades

$$\varDelta = \begin{vmatrix} sa_{11} - b_{11}, & \ldots, & sa_{1m} - b_{1m}, & sa_{1,m+1}, & \ldots, & sa_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ sa_{m1} - b_{m1}, & \ldots, & sa_{mm} - b_{mm}, & sa_{m,m+1}, & \ldots, & sa_{mn} \\ sa_{m+1,1}, & \ldots, & sa_{m+1,m}, & sa_{m+1,m+1}, & \ldots, & sa_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ sa_{n1}, & \ldots, & sa_{nm}, & sa_{n,m+1}, & \ldots, & sa_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

mit der Unbekannten $s$ hat, da die Form $P$ definit ist, lauter reelle Wurzeln $s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0$, welchen einfache Elementarteiler der Determinante $\varDelta$ entsprechen. Folglich gehen die beiden quadratischen Formen $P$, $Q$ durch eine reelle lineare Transformation in

$$P = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^2, \quad Q = \sum_{i=1}^{m} s_i v_i^2$$

über.

Um diese Transformation auszuführen, schlagen wir den folgenden Weg ein.[2])

Setzt man in der positiven definiten quadratischen Form $P$ die Veränderlichen $u_1, \ldots, u_m$ gleich Null, so erhält man die positive definite quadratische Form

$$\sum a_{jl} u_j u_l \qquad (j, l = m+1, \ldots, n)$$

der Veränderlichen $u_{m+1}, \ldots, u_n$, welche sich durch eine reelle lineare Substitution

$$u_j' = h_{j,m+1} u_{m+1} + \cdots + h_{jn} u_n \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

1) Vgl. Weierstraß, Werke, Bd. I, S. 233 ff., Bd. II, S. 19 ff.

2) Vgl. Bd. 52, S. 11—13.

auf eine Summe von Quadraten

$$u'^2_{m+1} + \cdots + u'^2_n$$

bringen läßt. Dann ist, wenn unter $i$, $k$ Zahlen der Reihe $1, \ldots, m$, unter $j$, $l$ Zahlen der Reihe $m+1, \ldots, n$ verstanden werden,

$$\begin{aligned} P &= \sum a_{ik} u_i u_k + 2\sum a_{ij} u_i u_j + \sum a_{jl} u_j u_l \\ &= \sum a_{ik} u_i u_k + 2\sum a'_{ij} u_i u'_j + \sum u'^2_j \\ &= \sum a_{ik} u_i u_k - \sum_j \Big(\sum_i a'_{ij} u_i\Big)^2 \\ &\quad + \sum_j \Big[u'^2_j + 2u'_j \sum_i a'_{ij} u_i + \Big(\sum_i a'_{ij} u_i\Big)^2\Big] \\ &= \sum_{ik}\Big(a_{ik} - \sum_j a'_{ij} a'_{kj}\Big) u_i u_k + \sum_j \Big(u'_j + \sum_i a'_{ij} u_i\Big)^2. \end{aligned}$$

Setzt man

$$v_j = u'_j + a'_{j1} u_1 + \cdots + a'_{jm} u_m, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

$$a'_{ik} = a_{ik} - \sum_j a'_{ij} a'_{kj},$$

so wird

$$P = \sum_{ik} a'_{ik} u_i u_k + \sum_j v_j^2,$$

während

$$Q = \sum_{ik} b_{ik} u_i u_k$$

ungeändert geblieben ist.

Die beiden quadratischen Formen

$$\sum_{ik} a'_{ik} u_i u_k, \quad \sum_{ik} b_{ik} u_i u_k,$$

deren erste definit positiv ist, gehen durch eine reelle lineare Substitution

$$v_i = h_{i1} u_1 + \cdots + h_{im} u_m \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

in

$$\sum_i v_i^2, \quad \sum_i s_i v_i^2$$

über. Die reellen Größen $s_1, \ldots, s_m$ sind die Wurzeln der Gleichung $m$ten Grades

$$\begin{vmatrix} s a'_{11} - b_{11}, & \ldots, & s a'_{1m} - b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s a'_{m1} - b_{m1}, & \ldots, & s a'_{mm} - b_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden ursprünglichen quadratischen Formen $P$, $Q$ lassen sich also durch die Substitution

$$v_i = h_{i1} u_1 + \cdots + h_{im} u_m, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$v_j = h_{j1} u_1 + \cdots + h_{jm} u_m + h_{j,m+1} u_{m+1} + \cdots + h_{jn} u_n, \quad (j = m+1, \ldots, n)$$

worin

$$h_{ji} = a'_{ji}$$

ist, in

$$P = v_1^2 + \cdots + v_m^2 + v_{m+1}^2 + \cdots + v_n^2,$$
$$Q = s_1 v_1^2 + \cdots + s_m v_m^2$$

überführen.

## § 16

Die Bewegung eines Systems von $n$ Freiheitsgraden werde durch die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

dargestellt, wo $L$ (das kinetische Potential) eine gegebene Funktion von $x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n$ ist.

In A. § 1 handelte es sich um den speziellen Fall, daß $L = T + U$ ist, wo $T$ (die lebendige Kraft, die kinetische Energie) eine quadratische Form von $x'_1, \ldots, x'_n$ ist, deren Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_n$ abhängen, während $U$ (die Kräftefunktion, die negativ genommene potentielle Energie) eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ ist. Jetzt wird jedoch die Voraussetzung, daß $L$ eine Zerlegung in zwei Bestandteile $T$ und $U$ von der früheren Beschaffenheit gestattet, nicht mehr gemacht.[1]

Wir nehmen an, $L$ sei in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n$ entwickelbar, welche mit quadratischen Gliedern beginnt:

$$L = \tfrac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta + \sum b_{\alpha\beta} x'_\alpha x_\beta + \tfrac{1}{2}\sum c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \cdots; \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

---

1) Als Beispiel dient Aufgabe V in § 19. — Ein anderes Beispiel erhält man durch andere Behandlung der in § 13 gestellten Aufgabe. Wir eliminieren $x'_{m+1}, \ldots, x'_n$ vermittels der Integralgleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial x'_j} = C_j \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

(unter Einführung der Integrationskonstanten $C_{m+1}, \ldots, C_n$) und behalten nur die Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ bei. Drückt man

$$L = T + U - \sum_{j=m+1}^{n} C_j x'_j$$

durch Elimination von $x'_{m+1}, \ldots, x'_n$ als Funktion von $x_1, \ldots, x_m; x'_1, \ldots, x'_m$ aus, so wird die Bewegung durch die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

dargestellt. Vgl. Routh, Dynamik, Bd. I, S. 378; Whittaker, Analytical Dynamics, S. 58 ff.

dabei ist

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta},\ c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta},\ b_{\beta\alpha} \gtreqless b_{\alpha\beta}.$$

Die quadratische Form

$$\sum a_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta$$

von $x'_1, \ldots, x'_n$ wird als definit positiv vorausgesetzt.

Dann sind

$$\frac{\partial L}{\partial x'_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x'_\beta + \sum_\beta b_{\alpha\beta} x_\beta + \cdots,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta b_{\alpha\beta} x'_\beta + \sum_\beta c_{\alpha\beta} x_\beta + \cdots$$

Potenzreihen der $x, x'$, welche mit den angeschriebenen linearen Gliedern beginnen;

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'_\alpha} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + \cdots) x''_\beta + \sum_\beta b_{\alpha\beta} x'_\beta + \cdots$$

ist eine lineare Funktion von $x''_1, \ldots, x''_n$, in welcher der Koeffizient von $x''_\beta$ eine mit $a_{\alpha\beta}$ beginnende und das von den zweiten Ableitungen freie Glied eine mit $\sum_\beta b_{\alpha\beta} x'_\beta$ beginnende Potenzreihe der $x, x'$ ist.

Die Lagrangeschen Gleichungen schreiben sich demnach

$$\sum_\beta (a_{\alpha\beta} + \cdots) x''_\beta = \sum_\beta c_{\alpha\beta} x_\beta + \sum_\beta g_{\alpha\beta} x'_\beta + \cdots; \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

dabei ist

$$g_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} - b_{\alpha\beta},$$

also

$$g_{\alpha\alpha} = 0,\ g_{\beta\alpha} = -g_{\alpha\beta},$$

der Koeffizient von $x''_\beta$ ist eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n$, welche mit $a_{\alpha\beta}$, die rechte Seite eine eben solche Potenzreihe, welche mit den angeschriebenen linearen Gliedern beginnt.

Da die quadratische Form $\sum a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ von $u_1, \ldots, u_n$ als definit vorausgesetzt wurde, hat die Gleichung $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} s a_{11} - c_{11}, & \ldots, & s a_{1n} - c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s a_{n1} - c_{n1}, & \ldots, & s a_{nn} - c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

mit der Unbekannten $s$ $n$ reelle (nicht notwendig verschiedene) Wurzeln $c_1, \ldots, c_n$, welchen einfache Elementarteiler der Determinante entsprechen. Die beiden quadratischen Formen

$$\sum a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta,\quad \sum c_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$$

gehen also durch eine reelle lineare Substitution

$$v_\alpha = p_{\alpha 1} u_1 + \cdots + p_{\alpha n} u_n \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

in

$$\sum_\alpha v_\alpha^2, \quad \sum_\alpha c_\alpha v_\alpha^2$$

über. Wenn man

$$y_\alpha = p_{\alpha 1} x_1 + \cdots + p_{\alpha n} x_n \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

setzt, wird

$$\sum a_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta = y_1'^2 + \cdots + y_n'^2,$$

$$\sum c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = c_1 y_1^2 + \cdots + c_n y_n^2.$$

Wenn wir die neuen Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ wieder mit $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen, können wir

$$a_{\alpha\alpha} = 1, \; a_{\alpha\beta} = 0, \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

$$c_{\alpha\alpha} = c_\alpha, \; c_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

voraussetzen.

Die Lagrangeschen Differentialgleichungen in den neuen Koordinaten

$$x''_\alpha + \sum_\beta (\cdots) x''_\beta = c_\alpha x_\alpha + \sum_\beta g_{\alpha\beta} x'_\beta + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

worin der Koeffizient von $x''_\beta$ eine für $x_1 = \cdots = x_n = 0$, $x'_1 = \cdots = x'_n = 0$ verschwindende Potenzreihe ist, lassen sich nach $x''_1, \ldots, x''_n$ auflösen:

$$x''_\alpha = c_\alpha x_\alpha + \sum_\beta g_{\alpha\beta} x'_\beta + \mathfrak{F}_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_n); \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

$\mathfrak{F}_\alpha$ ist eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_n$. Um die Sätze von A. §§ 2—4 anzuwenden, stellen wir ein System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung mit den abhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n$ her:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha,$$

$$\frac{dx'_\alpha}{dt} = c_\alpha x_\alpha + \sum_\beta g_{\alpha\beta} x'_\beta + \mathfrak{F}_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n; x_1, \ldots, x_n). \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Die charakteristische Gleichung dieses Systems ist

$$\varDelta = \begin{vmatrix} -s, \ldots, & 0, & 1, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, & -s, & 0, \ldots, & 1 \\ c_1, \ldots, & 0, & g_{11} - s, \ldots, & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, & c_n, & g_{n1}, \ldots, & g_{nn} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante $\Delta$ geht, wenn man zur $\alpha$ten Kolonne ($\alpha=1,..,n$) die mit $s$ multiplizierte $(n+\alpha)$te Kolonne addiert, über in

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0, \ldots, & 0,\ 1\ , & \ldots, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, \ldots, & 0,\ 0, & \ldots, 1 \\ c_1 + s g_{11} - s^2, \ldots, & s g_{1n},\ g_{11} - s, & \ldots, g_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s g_{n1}, \ldots, c_n + s g_{nn} - s^2, & g_{n1}, & \ldots, g_{nn} - s \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} c_1 - s^2, & s g_{12}, & \ldots, & s g_{1n} \\ s g_{21}, & c_2 - s^2, & \ldots, & s g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s g_{n1}, & s g_{n2}, & \ldots, & c_n - s^2 \end{vmatrix}.^{1)}$$

Als Determinante $n$ten Grades geschrieben, bleibt $\Delta$ unverändert, wenn man $s$ durch $-s$ ersetzt und gleichzeitig die Zeilen und Kolonnen vertauscht. Daher ist $\Delta$ eine ganze Funktion $n$ten Grades von $s^2$. Die Wurzeln $s$ der charakteristischen Gleichung sind paarweise entgegengesetzt gleich; wir nehmen an, es sei ein Paar rein imaginärer Wurzeln $\pm i\lambda$ vorhanden, aber daneben keine Wurzel $\pm ip\lambda$ ($p$ ganze Zahl) und keine Wurzel 0.

Die Lagrangeschen Gleichungen besitzen die Integralgleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x'_\alpha \frac{\partial L}{\partial x'_\alpha} - L = \text{Const.}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta - \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \cdots = \text{Const.},$$

wo die nicht angeschriebenen Glieder von mindestens der dritten Dimension in den $x$, $x'$ sind. Nach Einführung der neuen Koordinaten schreibt sich die Integralgleichung

$$x_1'^2 + \cdots + x_n'^2 - c_1 x_1^2 - \cdots - c_n x_n^2 + \cdots = \text{Const.},$$

## § 17

Wir setzen die Wurzeln $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ der charakteristischen Gleichung, welche die oben angegebenen Bedingungen erfüllen, überdies der bequemeren Schreibweise halber als einfach voraus.

Dann lassen sich die auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha, \qquad \frac{dx'_\alpha}{dt} = c_\alpha x_\alpha + \sum_\beta g_{\alpha\beta} x'_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

1) Dabei ist $g_{11} = \cdots = g_{nn} = 0$ gesetzt.

durch eine lineare Substitution

$$x_\alpha = k_{\alpha 1} Z_1 + \cdots + k_{\alpha, 2n} Z_{2n}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$
$$x'_\alpha = k'_{\alpha 1} Z_1 + \cdots + k'_{\alpha, 2n} Z_{2n}$$

auf die Form bringen:

$$\frac{dZ_1}{dt} = s_1 Z_1, \quad \frac{dZ_2}{dt} = s_2 Z_2, \quad \ldots, \quad \frac{dZ_{2n}}{dt} = s_{2n} Z_{2n}.$$

Wir setzen in den obigen linearen Differentialgleichungen

$$x_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{2n} k_{\alpha\gamma} Z_\gamma, \quad \frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{\gamma=1}^{2n} s_\gamma k_{\alpha\gamma} Z_\gamma,$$

$$x'_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{2n} k'_{\alpha\gamma} Z_\gamma, \quad \frac{dx'_\alpha}{dt} = \sum_{\gamma=1}^{2n} s_\gamma k'_{\alpha\gamma} Z_\gamma$$

und vergleichen die Koeffizienten von $Z_\gamma$. Wir erhalten so für $\gamma = 1, \ldots, 2n$

$$k'_{\alpha\gamma} = s_\gamma k_{\alpha\gamma}$$

und

$$(c_1 - s_\gamma^2) k_{1\gamma} + s_\gamma g_{12} k_{2\gamma} + \cdots + s_\gamma g_{1n} k_{n\gamma} = 0,$$
$$s_\gamma g_{21} k_{1\gamma} + (c_2 - s_\gamma^2) k_{2\gamma} + \cdots + s_\gamma g_{2n} k_{n\gamma} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_\gamma g_{n1} k_{1\gamma} + s_\gamma g_{n2} k_{2\gamma} + \cdots + (c_n - s_\gamma^2) k_{n\gamma} = 0,$$

wodurch die Verhältnisse der Größen $k_{1\gamma}, k_{2\gamma}, \ldots, k_{n\gamma}$ bestimmt sind.

Wenn $s_1 = i\lambda$, $s_2 = -i\lambda$ konjugiert imaginär sind, können wir $k_{\alpha 1}$ und $k_{\alpha 2}$ als konjugiert komplex annehmen. Setzt man

$$k_{\alpha 1} = h_{\alpha 1} + i h_{\alpha 2}, \quad k_{\alpha 2} = h_{\alpha 1} - i h_{\alpha 2},$$

wo $h_{\alpha 1}$ und $h_{\alpha 2}$ reell sind, und

$$z_1 = Z_1 + Z_2, \quad z_2 = i(Z_1 - Z_2),$$

so gehen die Differentialgleichungen

$$\frac{dZ_1}{dt} = s_1 Z_1, \quad \frac{dZ_2}{dt} = s_2 Z_2$$

in

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = -\lambda z_1$$

über, und es ist

$$k_{\alpha 1} Z_1 + k_{\alpha 2} Z_2 = h_{\alpha 1}(Z_1 + Z_2) + i h_{\alpha 2}(Z_1 - Z_2) = h_{\alpha 1} z_1 + h_{\alpha 2} z_2,$$

$$s_1 k_{\alpha 1} Z_1 + s_2 k_{\alpha 2} Z_2 = i\lambda h_{\alpha 1}(Z_1 - Z_2) - \lambda h_{\alpha 2}(Z_1 + Z_2) = -\lambda h_{\alpha 2} z_1 + \lambda h_{\alpha 1} z_2.$$

Sind $s_3$ und $s_4 = -s_3$ reell, so setzt man

$$z_3 = Z_3, \quad z_4 = Z_4;$$

sind $s_3$ und $s_4$ konjugiert imaginär, so setzt man

$$z_3 = Z_3 + Z_4, \quad z_4 = i(Z_3 - Z_4);$$

usw.

Die in § 16 aufgestellten Lagrangeschen Gleichungen lassen sich also durch eine reelle lineare Substitution

$$x_\alpha = h_{\alpha 1} z_1 + \cdots + h_{\alpha, 2n} z_{2n}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$
$$x'_\alpha = h'_{\alpha 1} z_1 + \cdots + h'_{\alpha, 2n} z_{2n},$$

worin

$$h'_{\alpha 1} = -\lambda h_{\alpha 2}, \quad h'_{\alpha 2} = \lambda h_{\alpha 1}$$

ist, auf die Form bringen:

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_2 + F_1(z_1, \cdots, z_{2n}),$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\lambda z_1 + F_2(z_1, \cdots, z_{2n}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo $F_1, F_2, \ldots$ Potenzreihen mit Gliedern zweiten und höheren Grades sind.

Die Integralgleichung

$$\sum_\alpha (x'^2_\alpha - c_\alpha x^2_\alpha) + \cdots = \text{Const.}$$

geht über in[1])

$$A(z_1^2 + z_2^2) + \cdots = \text{Const.},$$

wo

$$A = \sum_\alpha (\lambda^2 h^2_{\alpha 2} - c_\alpha h^2_{\alpha 1}) = \sum_\alpha (\lambda^2 h^2_{\alpha 1} - c_\alpha h^2_{\alpha 2}),$$

also auch

$$A = \tfrac{1}{2} \sum_\alpha (\lambda^2 - c_\alpha)(h^2_{\alpha 1} + h^2_{\alpha 2})$$

ist.

Sind $c_1, \ldots, c_n$ sämtlich negativ, so wird die Gleichung $\Delta = 0$ durch $n$ negative reelle Werte von $s^2$ befriedigt.[2]) Es sei $-\lambda^2$ einer dieser Werte und

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_2 + \cdots, \quad \frac{dz_2}{dt} = -\lambda z_1 + \cdots$$

1) Nach Bd. 52, S. 20 haben $z_1^2$ und $z_2^2$ denselben Koeffizienten, während der Koeffizient von $z_1 z_2$ verschwindet.

2) Vgl. Routh, Dynamik, Bd. II, S. 98.

die zugehörigen Differentialgleichungen. Der entsprechende Wert von $A$ ist positiv, da die $n$ Größen $\lambda^2 - c_\alpha$ positiv sind und die $2n$ Größen $h_{\alpha 1}$, $h_{\alpha 2}$ nicht gleichzeitig verschwinden können.

Wir verstehen unter $c_1, \ldots, c_n$ wieder beliebige reelle Größen, wir setzen aber voraus, *daß $A$ von Null verschieden ist.* Dann besitzt das Differentialgleichungssystem mit den abhängigen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{2n}$ nach A. § 4 eine periodische Lösung mit einer Periode

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \cdots,$$

wo $c$ den Wert von $z_1$ für den Wert $t = 0$ darstellt, für welchen $z_2$ verschwindet. Wenn man

$$w = \frac{2\pi t}{T}$$

setzt, ist

$$z_\gamma = c\psi_{\gamma 1}(w) + c^2\psi_{\gamma 2}(w) + \cdots; \qquad (\gamma = 1, \ldots, 2n)$$

hierin ist

$$\psi_{11} = \cos w, \quad \psi_{21} = -\sin w, \quad \psi_{31} = 0, \ \ldots, \ \psi_{2n,1} = 0;$$

$\psi_{\gamma\nu}$ ist eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw (p = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$.

## § 18

Wir gehen etwas näher auf den Fall $n = 2$ ein.

Das Differentialgleichungssystem

$$x_1'' = c_1 x_1 + g_{12} x_2' + \mathfrak{F}_1(x_1', x_2'; x_1, x_2),$$
$$x_2'' = c_2 x_2 + g_{21} x_1' + \mathfrak{F}_2(x_1', x_2'; x_1, x_2),$$

wo $g_{12} = -g_{21}$ ist, hat die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_1 - s^2, & g_{12} \\ -g_{12}, & c_2 - s^2 \end{vmatrix} = s^4 - (c_1 + c_2 - g_{12}^2)s^2 + c_1 c_2 = 0^{1)}$$

oder, wenn

$$s^2 = \sigma$$

gesetzt wird,

$$f(\sigma) = \sigma^2 - (c_1 + c_2 - g_{12}^2)\sigma + c_1 c_2 = 0;$$

die Auflösung ergibt

$$\sigma = \frac{c_1 + c_2 - g_{12}^2 \pm \sqrt{(c_1 + c_2 - g_{12}^2)^2 - 4c_1 c_2}}{2}.$$

Es ist $f(-\infty) = +\infty$, $f(0) = c_1 c_2$, $f(+\infty) = +\infty$, ferner $f(c_1) = c_1 g_{12}^2$, $f(c_2) = c_2 g_{12}^2$. Für

$$\sigma_0 = \frac{c_1 + c_2 - g_{12}^2}{2}$$

1) Vgl. Thomson-Tait, Natural Philosophy, 2. ed., vol. I, part I, S. 396.

nimmt $f(\sigma)$ den Minimalwert

$$f(\sigma_0) = c_1 c_2 - \frac{(c_1 + c_2 - g_{12}^2)^2}{4}$$

an.

Sind $c_1$ und $c_2$ beide negativ, etwa $c_2 \leqq c_1 < 0$, so liegt eine Wurzel $\sigma$ zwischen $-\infty$ und $c_2$, die andere zwischen $c_1$ und 0; die vier Wurzeln $s$ der charakteristischen Gleichung sind rein imaginär.

Ist von den beiden Größen $c_1$, $c_2$ die eine positiv, die andere negativ, etwa $c_2 < 0$, $c_1 < 0$, so liegt eine Wurzel $\sigma$ zwischen $-\infty$ und $c_2$, die andere zwischen 0 und $c_1$; zwei Wurzeln $s$ sind rein imaginär, zwei reell.

Sind $c_1$ und $c_2$ beide positiv, etwa $0 < c_2 < c_1$, so ist der Minimalwert $f(\sigma_0)$ nur dann negativ, wenn $g_{12}$ entweder kleiner als $\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}$ oder größer als $\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$ ist. Im Falle

$$g_{12} < \sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}$$

ist $\sigma_0 > 0$; die Gleichung $f(\sigma) = 0$ besitzt zwei positive Wurzeln, von denen die eine zwischen 0 und $\sigma_0$ liegt, die andere größer als $\sigma_0$ ist. Im Falle

$$g_{12} > \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$$

(in welchem auch $c_1 = c_2$ sein darf) ist $\sigma_0 < 0$; die beiden Wurzeln der Gleichung $f(\sigma) = 0$ sind negativ, und zwar ist die eine kleiner, die andere größer als $\sigma_0$.

Periodische Bewegungen sind nur möglich, wenn die charakteristische Gleichung rein imaginäre Wurzeln besitzt, d. h. wenn mindestens eine der Größen $c_1$, $c_2$ negativ ist oder wenn beide Größen $c_1$, $c_2$ positiv sind, aber $g_{12} > \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$ ist.

Sind $s_\gamma (\gamma = 1, \ldots, 4)$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so hat man nach § 17

$$(c_1 - s_\gamma^2) k_{1\gamma} + s_\gamma g_{12} k_{2\gamma} = 0,$$
$$s_\gamma g_{21} k_{1\gamma} + (c_2 - s_\gamma^2) k_{2\gamma} = 0,$$

also z. B.

$$k_{1\gamma} = 1, \quad k_{2\gamma} = \frac{s_\gamma^2 - c_1}{s_\gamma g_{12}} = \frac{s_\gamma g_{12}}{c_2 - s_\gamma^2}.$$

Sind

$$s_1 = i\lambda, \quad s_2 = -i\lambda$$

rein imaginär und setzt man

$$h = -\frac{\lambda^2 + c_1}{\lambda g_{12}} = \frac{\lambda g_{12}}{\lambda^2 + c_2},$$

so ist

$$k_{11} = k_{12} = 1, \quad k_{21} = ih, \quad k_{22} = -ih,$$

ferner

$$h_{11} = 1, \quad h_{21} = 0, \quad h_{12} = 0, \quad h_{22} = h.$$

Die Substitutionsgleichungen von § 17 lauten

$$x_1 = z_1 + \cdots,$$
$$x_2 = hz_2 + \cdots,$$
$$x_1' = \lambda z_2 + \cdots,$$
$$x_2' = \lambda h z_1 + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder nur $z_3$ und $z_4$ enthalten.

Man hat die Integralgleichung

$$x_1'^2 + x_2'^2 - c_1 x_1^2 - c_2 x_2^2 + \cdots = A(z_1^2 + z_2^2) + \cdots = \text{Const.},$$

worin

$$A = \lambda^2 h^2 - c_1 = \lambda^2 - c_2 h^2$$

ist. Wenn mindestens eine der Größen $c_1$, $c_2$ negativ ist, ist $A$ positiv. Wir haben noch zu zeigen, daß auch im Falle

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad g_{12} > \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$$

$A$ von Null verschieden ist.

Soll in diesem Falle

$$A = \lambda^2 h^2 - c_1 = \frac{(\lambda^2 + c_1)^2}{g_{12}^2} - c_1 = 0$$

sein, so muß

$$\lambda^2 + c_1 = g_{12}\sqrt{c_1}$$

oder, wenn man

$$\lambda^2 = \frac{g_{12}^2 - c_1 - c_2 \pm \sqrt{[g_{12}^2 - (\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2][g_{12}^2 - (\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2})^2]}}{2}$$

setzt,

$$(g_{12} - \sqrt{c_1})^2 - (\sqrt{c_2})^2 = \mp \sqrt{[g_{12}^2 - (\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2][g_{12}^2 - (\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2})^2]}.$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung und Weglassen der den beiden Seiten gemeinsamen Faktoren erhält man

$$4 g_{12} \sqrt{c_1} = 0,$$

was nicht möglich ist, wenn $g_{12}$ und $c_1$ von Null verschieden sind.

Demnach können auf jedes Paar rein imaginärer Wurzeln $\pm i\lambda$ der charakteristischen Gleichung die Sätze über periodische Bewegungen am Schluß von § 17 angewandt werden.

## § 19

Wir wenden die Sätze von §§ 16—18 auf die folgende Aufgabe an.

Aufgabe V. *Eine Fläche rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um eine lotrechte Achse, welche durch eine Stelle $O$ der Fläche mit wagerechter Tangentialebene geht. Wir untersuchen die periodischen Bewegungen eines an die Fläche gebundenen schweren Punktes in der Nähe der Stelle $O$.*

Wir führen ein mit der rotierenden Fläche fest verbundenes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt $O$ so ein, daß die $z$-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt (nach oben positiv), während die Achsen $x$ und $y$ die Tangenten der Krümmungslinien der Fläche im Punkte $O$ sind. Die Gleichung der Fläche ist dann

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}\right) + \varphi(x, y),$$

wo $\varphi(x, y)$ eine mit Gliedern dritten Grades beginnende Potenzreihe von $x, y$ darstellt.

Die absolute Geschwindigkeit des an der Stelle $x, y, z$ befindlichen Punktes, dessen Masse wir gleich 1 setzen, hat die Komponenten

$$x' - y\omega, \quad y' + x\omega, \quad z';$$

daher ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2}\{(x' - y\omega)^2 + (y' + x\omega)^2 + z'^2\};$$

die Kräftefunktion ist

$$U = -gz.$$

Nach Einführung des Wertes von $z$ ist

$$L = T + U = \frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{x^2}{\varrho_1^2} + \cdots\right)x'^2 + \left(\frac{2xy}{\varrho_1\varrho_2} + \cdots\right)x'y' + \left(1 + \frac{y^2}{\varrho_2^2} + \cdots\right)y'^2 \right.$$
$$\left. + 2\omega(xy' - yx')\right\} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}\right) - g\varphi(x, y),$$

wo die Koeffizienten von $x'^2, x'y', y'^2$ Potenzreihen von $x, y$ sind, welche außer den angeschriebenen Gliedern nur solche dritten und höheren Grades enthalten, oder

$$L = \frac{1}{2}\left\{x'^2 + y'^2 + 2\omega(xy' - yx') + \left(\omega^2 - \frac{g}{\varrho_1}\right)x^2 + \left(\omega^2 - \frac{g}{\varrho_2}\right)y^2 + \cdots\right\},$$

wo die weggelassenen Glieder von mindestens der dritten Dimension in bezug auf $x, y, x', y'$ sind.

Die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

schreiben sich hier

$$x''\left[1 + \left(\frac{x}{\varrho_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] + y''\left(\frac{x}{\varrho_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{\varrho_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - 2\omega y' + \left(\frac{g}{\varrho_1} - \omega^2\right)x$$
$$+ g\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{F}_1(x', y';\ x, y) = 0,$$
$$x''\left(\frac{x}{\varrho_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{\varrho_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + y''\left[1 + \left(\frac{y}{\varrho_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] + 2\omega x' + \left(\frac{g}{\varrho_2} - \omega^2\right)y$$
$$+ g\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{F}_2(x', y';\ x, y) = 0,$$

wo $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ ganze homogene Funktionen zweiten Grades von $x', y'$ darstellen, deren Koeffizienten Potenzreihen von $x, y$ sind, welche für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden. Die auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen sind

$$x'' - 2\omega y' + \left(\frac{g}{\varrho_1} - \omega^2\right)x = 0,$$
$$y'' + 2\omega x' + \left(\frac{g}{\varrho_2} - \omega^2\right)y = 0.$$

Die Sätze von § 18 lassen sich hier anwenden, wenn man

$$c_1 = \omega^2 - \frac{g}{\varrho_1}, \quad c_2 = \omega^2 - \frac{g}{\varrho_2}, \quad g_{12} = 2\omega$$

setzt. Die charakteristische Gleichung

$$s^4 + \left(\frac{g}{\varrho_1} + \frac{g}{\varrho_2} + 2\omega^2\right)s^2 + \left(\frac{g}{\varrho_1} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{\varrho_2} - \omega^2\right) = 0$$

hat im Falle

$$\frac{g}{\varrho_2} \geqq \frac{g}{\varrho_1} > \omega^2$$

und im Falle

$$\omega^2 > \frac{g}{\varrho_2} \geqq \frac{g}{\varrho_1},$$
$$2\omega > \sqrt{\omega^2 - \frac{g}{\varrho_1}} + \sqrt{\omega^2 - \frac{g}{\varrho_2}}\ {}^{1)}$$

lauter rein imaginäre Wurzeln, während im Falle

$$\frac{g}{\varrho_2} > \omega^2 > \frac{g}{\varrho_1}$$

nur ein Paar konjugiert rein imaginärer Wurzeln vorhanden ist.

1) Diese Bedingung ist von selbst erfüllt, wenn $\varrho_1$ und $\varrho_2$ beide positiv sind.

Jedem Paar konjugiert rein imaginärer Wurzeln entsprechen nach § 18 periodische Bewegungen.

§ 20

Die in B. § 1 und § 9 behandelte Aufgabe I (Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche mit lotrechter Achse in der Nähe eines Parallelkreises mit nahezu konstanter Geschwindigkeit) ist als besonderer Fall in der folgenden allgemeineren Aufgabe enthalten. Der Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2}\sum A_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_m)\, x'_\alpha x'_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

eine positive definite quadratische Form von $x'_1, \ldots, x'_n$, stelle wie in § 13 die lebendige Kraft eines Systems von $n$ Freiheitsgraden dar; die Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$ und die Kräftefunktion

$$U = U(x_1, \ldots, x_m)$$

werden als analytische Funktionen der $m < n$ Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ vorausgesetzt.

Wir haben wieder die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

mit den Integralen

$$2(T - U) = C,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x'_j} = A_{j1}x'_1 + \cdots + A_{jn}x'_n = C_j. \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

Es seien

$$x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m,$$

$$x'_1 = 0, \ldots, x'_m = 0, \quad x'_{m+1} = b_{m+1}, \ldots, x'_n = b_n$$

reelle Werte, welche die $m$ Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

befriedigen; es ist also

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}\sum_{jl}\frac{\partial A_{jl}}{\partial x_i} b_j b_l\right]_{x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

wo sich die Summation über die Werte $j, l = m + 1, \ldots, n$ erstreckt. Die Gleichungen

$$x_i = a_i, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$x_j = a_j + b_j t, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

wo $a_{m+1}, \ldots, a_n$ willkürliche Konstante sind, stellen eine *stationäre Bewegung* dar. Wir untersuchen *die benachbarten Bewegungen* und zwar zunächst *die periodischen Bewegungen.*

Wir können $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0$ annehmen; wir brauchen uns nur $x_i - a_i (i = 1, \ldots, m)$ an Stelle von $x_i$ als Koordinaten eingeführt zu denken. Wir setzen

$$a_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(0, \ldots, 0) \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

und betrachten die positive definite Form

$$P = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$$

von $u_1, \ldots, u_n$, welche sich als Summe von Quadraten

$$P = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^2$$

darstellen läßt, indem man eine reelle lineare Substitution von folgender Gestalt anwendet:

$$\begin{aligned} v_1 &= p_{11} u_1, \\ v_2 &= p_{21} u_1 + p_{22} u_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= p_{n1} u_1 + p_{n2} u_2 + \cdots + p_{nn} u_n; \end{aligned}$$

hierbei hängen $v_1, \ldots, v_m$ nur von $u_1, \ldots, u_m$, aber nicht von $u_{m+1}, \ldots, u_n$ ab. Setzt man demnach

$$y_\alpha = p_{\alpha 1} x_1 + p_{\alpha 2} x_2 + \cdots + p_{\alpha\alpha} x_\alpha, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

sodaß $x_1, \ldots, x_m$ lineare homogene Funktionen von $y_1, \ldots, y_m$ sind, so wird

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha' x_\beta' = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha'^2.$$

Indem wir die neuen Koordinaten statt mit $y_1, \ldots, y_n$ wieder mit $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen, können wir voraussetzen, daß

$$a_{\alpha\alpha} = 1, \quad a_{\alpha\beta} = 0 \, (\alpha \gtrless \beta)$$

ist.

Die Lagrangeschen Gleichungen lassen sich durch ein System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x_\alpha', \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

$$A_{i1} \frac{dx_1'}{dt} + \cdots + A_{in} \frac{dx_n'}{dt} + \sum_{\alpha k} \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x_k} x_\alpha' x_k' - \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha k} \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_i} x_\alpha' x_\beta' = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$A_{j1} \frac{dx_1'}{dt} + \cdots + A_{jn} \frac{dx_n'}{dt} + \sum_{\alpha k} \frac{\partial A_{j\alpha}}{\partial x_k} x_\alpha' x_k' = 0; \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

dabei durchlaufen die Indizes $\alpha$, $\beta$ die Werte $1, \ldots, n$, der Index $k$ die Werte $1, \ldots, m$. Wir scheiden die $n-m$ Differentialgleichungen

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j' \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

vorläufig aus und führen in die $n+m$ übrigen Gleichungen die $n+m$ abhängigen Veränderlichen ein:

$$x_i, \quad y_i = x_i', \qquad (i=1,\ldots,m)$$
$$y_j = x_j' - b_j. \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

Unter Beschränkung auf die Glieder, welche in den neuen Veränderlichen und ihren Differentialquotienten linear sind, lauten die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i, \qquad (i=1,\ldots,m)$$
$$\frac{dy_i}{dt} = c_{i1}x_1 + \cdots + c_{im}x_m + g_{i1}y_1 + \cdots + g_{in}y_n, \qquad (i=1,\ldots,m)$$
$$\frac{dy_j}{dt} = g_{j1}y_1 + \cdot \cdot + g_{jm}y_m. \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

Dabei ist

$$c_{ik} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \tfrac{1}{2}\sum_{jl}\frac{\partial^2 A_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} b_j b_l\right]_{x_1=0,\ldots,x_m=0},$$
$$g_{ik} = \left[\sum_l\left(\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{il}}{\partial x_k}\right)b_l\right]_{x_1=0,\ldots,x_m=0},$$
$$g_{ij} = \left[\sum_l \frac{\partial A_{jl}}{\partial x_i} b_l\right]_{x_1=0,\ldots,x_m=0},$$
$$g_{ji} = -\left[\sum_l \frac{\partial A_{jl}}{\partial x_i} b_l\right]_{x_1=0,\ldots,x_m=0};$$

$i$, $k$ durchlaufen die Werte $1,\ldots,m$ und $j$, $l$ die Werte $m+1,\ldots,n$. Es ist

$$c_{ki} = c_{ik},$$
$$g_{ii} = 0, \quad g_{ki} = -g_{ik}, \quad g_{ji} = -g_{ij}.$$

Unser Differentialgleichungssystem hat die charakteristische Gleichung $(n+m)$ten Grades

$$\Delta(s) = 0,$$

wenn man setzt

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} -s, \ldots, & 0, & 1, \ldots, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, & -s, & 0, \ldots, & 1, & 0, \ldots, & 0 \\ c_{11}, \ldots, & c_{1m}, & g_{11}-s, \ldots, & g_{1m}, & g_{1,m+1}, \ldots, & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}, \ldots, & c_{mm}, & g_{m1}, \ldots, & g_{mm}-s, & g_{m,m+1}, \ldots, & g_{mn} \\ 0, \ldots, & 0, & g_{m+1,1}, \ldots, & g_{m+1,m}, & -s, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, & 0, & g_{n1}, \ldots, & g_{nm}, & 0, \ldots, & -s \end{vmatrix}.$$

Wenn man die mit $s$ multiplizierte $(m+k)$te Kolonne $(k=1,\ldots,m)$ zur $k$-ten Kolonne addiert und beachtet, daß $g_{11}=0,\ldots,g_{mm}=0$ ist, erkennt man, daß

$$\pm\Delta(s)=\begin{vmatrix} c_{11}-s^2, & \ldots, & c_{1m}+sg_{1m}, & g_{1,m+1}, & \ldots, & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}+sg_{m1}, & \ldots, & c_{mm}-s^2, & g_{m,m+1}, & \ldots, & g_{mn} \\ sg_{m+1,1}, & \ldots, & sg_{m+1,m}, & -s, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ sg_{n1}, & \ldots, & sg_{nm}, & 0, & \ldots, & -s \end{vmatrix}$$

ist, d. i. gleich

$$s^{n-m}D(s),$$

wenn man setzt:

$$D(s)=\begin{vmatrix} c_{11}-s^2, & \ldots, & c_{1m}+sg_{1m}, & g_{1,m+1}, & \ldots, & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}+sg_{m1}, & \ldots, & c_{mm}-s^2, & g_{m,m+1}, & \ldots, & g_{mn} \\ g_{m+1,1}, & \ldots, & g_{m+1,m}, & -1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}, & \ldots, & g_{nm}, & 0, & \ldots, & -1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante $D(s)$ bleibt ungeändert, wenn man $s$ durch $-s$ ersetzt und gleichzeitig die Zeilen und Kolonnen vertauscht, sie ist also eine ganze Funktion $m$-ten Grades von $s^2$. Wir formen die Determinante $D(s)$ um, indem wir zur $k$-ten Kolonne $(k=1,\ldots,m)$ die mit $g_{m+1,k}$ multiplizierte $(m+1)$te, ..., die mit $g_{nk}$ multiplizierte $n$te Kolonne addieren. Man findet so

$$\pm D(s)=\begin{vmatrix} c_{11}-s^2+\sum_{j=m+1}^{n}g_{1j}g_{j1}, & \ldots, & c_{1m}+sg_{1m}+\sum_{j=m+1}^{n}g_{1j}g_{jm} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}+sg_{m1}+\sum_{j=m+1}^{n}g_{mj}g_{j1}, & \ldots, & c_{mm}-s^2+\sum_{j=m+1}^{n}g_{mj}g_{jn} \end{vmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung $\Delta(s)=0$ hat die $(n+m)$fache Wurzel $s=0$ und die $2m$ paarweise entgegengesetzt gleichen Wurzeln der Gleichung $D(s)=0$.

Beschränkt man sich nicht auf die linearen Glieder, so haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$\frac{dx_i}{dt}=y_i, \qquad (i=1,\ldots,m)$$

$$\frac{dy_i}{dt}+\mathfrak{f}_{i1}\frac{dy_1}{dt}+\cdots+\mathfrak{f}_{in}\frac{dy_n}{dt}$$
$$=c_{i1}x_1+\cdots+c_{im}x_m+g_{i1}y_1+\cdots+g_{in}y_n+\mathfrak{F}_i, \qquad (i=1,\ldots,m)$$

$$\frac{dy_j}{dt}+\mathfrak{f}_{j1}\frac{dy_1}{dt}+\cdots+\mathfrak{f}_{jn}\frac{dy_n}{dt}$$
$$=g_{j1}y_1+\cdots+g_{jm}y_m+\mathfrak{F}_j; \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

hierin sind die $\mathfrak{f}$ Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_m$, welche für $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$ verschwinden, während die $\mathfrak{F}$ Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ sind, welche mit quadratischen Gliedern beginnen. Wenn man die $n$ letzten Gleichungen nach

$$\frac{dy_1}{dt}, \ldots, \frac{dy_n}{dt}$$

auflöst, erhält man die Differentialgleichungen der Bewegung in der folgenden Form:

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = c_{i1}x_1 + \cdots + c_{im}x_m + g_{i1}y_1 + \cdots + g_{in}y_n + \mathfrak{G}_i, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = g_{j1}y_1 + \cdots + g_{jm}y_m + \mathfrak{G}_j; \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

$\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ sind Potenzreihen von $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$, welche mit quadratischen Gliedern beginnen.

Die Integralgleichung

$$\sum_k A_{jk}y_k + \sum_l A_{jl}(b_l + y_l) = C_j \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

schreibt sich

$$\sum_k x_k \left[\sum_l \frac{\partial A_{jl}}{\partial x_k} b_l\right]_{x_1 = 0, \ldots, x_m = 0} + a_{j1}y_1 + \cdots + a_{jn}y_n + \Psi_j = C_j,$$

wo $\Psi_j$ eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$ mit Gliedern zweiten und höheren Grades ist, oder

$$y_j + g_{1j}' x_1 + \cdots + g_{mj}x_m + \Psi_j = C_j \qquad (j = m+1, \ldots, n).$$

Die Energiegleichung

$$2(T - U) = \text{Const.}$$

ersetzen wir durch

$$2(T - U) - 2\sum_{j=m+1}^{n} b_j \frac{\partial T}{\partial x_j'} = \text{Const.}$$

oder

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}x_\alpha' x_\beta' - 2U - 2\sum_{\alpha j} A_{j\alpha}b_j x_\alpha' \\
&= \sum_{ik} A_{ik}y_i y_k + \sum_{jl} A_{jl}(b_j + y_j)(b_l + y_l) \\
&+ 2\sum_{ij} A_{ij}y_i(b_j + y_j) - 2U - 2\sum_{ji} A_{ji}b_j y_i - 2\sum_{jl} A_{jl}b_j(b_l + y_l) \\
&= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta - \sum_{jl} A_{jl}b_j b_l - 2U \\
&= \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta - \sum_{jl} a_{jl}b_j b_l - \sum_i x_i \left[2\frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{jl} \frac{\partial A_{jl}}{\partial x_i} b_j b_l\right]_{x_1 = 0, \ldots, x_m = 0} \\
&- \sum_{ik} x_i x_k \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} b_j b_l\right]_{x_1 = 0, \ldots, x_m = 0} + \Phi = \text{Const.},
\end{aligned}$$

wo $\Phi$ eine mit Gliedern dritten Grades beginnende Potenzreihe von $x_1, \dots, y_n$ ist. Beachtet man, daß der Koeffizient von $x_i$ verschwindet, und bringt man die konstanten Glieder auf die rechte Seite, so hat man die Integralgleichung in der Form

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta - \sum_{ik} c_{ik} x_i x_k + \Phi = \text{Const.}$$

oder

$$\sum_{\alpha} y_\alpha^2 - \sum_{ik} c_{ik} x_i x_k + \Phi = \text{Const.}$$

§ 21

Wir nehmen an, die charakteristische Gleichung $\varDelta(s) = 0$ habe die einfachen konjugiert imaginären Wurzeln $+\lambda\sqrt{-1}$, $-\lambda\sqrt{-1}$, sie habe daneben keine Wurzel $\pm p\lambda\sqrt{-1}$ ($p$ ganze Zahl) und keine mehrfache und keine verschwindende Wurzel außer der $(n-m)$fachen Wurzel $s = 0$.

Wir bezeichnen die von Null verschiedenen (paarweise entgegengesetzt gleichen) Wurzeln der charakteristischen Gleichung, d. h. die Wurzeln der Gleichung $D(s) = 0$ mit $s_1, s_2, \dots, s_{2m}$. Die auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i, \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = c_{i1}x_1 + \dots + c_{im}x_m + g_{i1}y_1 + \dots + g_{in}y_n, \qquad (i = 1, \dots, m)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = g_{j1}y_1 + \dots + g_{jn}y_n \qquad (j = m+1, \dots, n)$$

lassen sich, indem man geeignete lineare Funktionen $Z_1, \dots, Z_{m+n}$ von $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ einführt, auf die Form bringen:

$$\frac{dZ_1}{dt} = s_1 Z_1, \quad \dots, \quad \frac{dZ_{2m}}{dt} = s_{2m} Z_{2m},$$

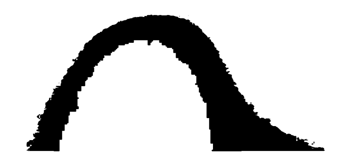
$$\frac{dZ_{2m+1}}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dZ_{m+n}}{dt} = 0.$$

Wenn die $n - m$ letzten Gleichungen wirklich die angegebene Form haben, entsprechen der $(n - m)$fachen Wurzel $s = 0$ der charakteristischen Gleichung $n - m$ einfache Elementarteiler der Determinante $\varDelta(s)$. Man sieht aber sofort, daß der nach $t$ genommene Differentialquotient des Ausdrucks

$$y_j + g_{1j}x_1 + \dots + g_{mj}x_m \qquad (j = m+1, \dots, n)$$

gleich

$$g_{j1}y_1 + \dots + g_{jm}y_m + g_{1j}y_1 + \dots + g_{mj}y_m = 0$$



ist, daß also $n-m$ unabhängige lineare Verbindungen der $x, y$ einen verschwindenden Differentialquotienten besitzen.

Die Koeffizienten der Substitution

$$x_i = k_{i1}Z_1 + \cdots + k_{i,m+n}Z_{m+n},$$
$$y_i = k'_{i1}Z_1 + \cdots + k'_{i,m+n}Z_{m+n},$$
$$y_j = k'_{j1}Z_1 + \cdots + k'_{j,m+n}Z_{m+n}$$

müssen die folgenden Bedingungen erfüllen, in welchen unter $\gamma$ eine der Zahlen $1, \ldots, 2m$, unter $\delta$ eine der Zahlen $2m+1, \ldots, m+n$ zu verstehen ist:

$$k'_{i\gamma} = s_\gamma k_{i\gamma}, \qquad k'_{i\delta} = 0;$$
$$s_\gamma k'_{i\gamma} = c_{i1}k_{1\gamma} + \cdots + c_{im}k_{m\gamma} + g_{i1}k'_{1\gamma} + \cdots + g_{in}k'_{n\gamma},$$
$$0 = c_{i1}k_{1\delta} + \cdots + c_{im}k_{m\delta} + g_{i1}k'_{1\delta} + \cdots + g_{in}k'_{n\delta};$$
$$s_\gamma k'_{j\gamma} = g_{j1}k'_{1\gamma} + \cdots + g_{jm}k'_{m\gamma},$$
$$0 = g_{j1}k'_{1\delta} + \cdots + g_{jm}k'_{m\delta}.$$

Durch Elimination der Größen $k'_{1\gamma}, \ldots, k'_{n\gamma}$ erhält man zur Bestimmung der Verhältnisse der Größen $k_{1\gamma}, \ldots, k_{m\gamma}$ die Gleichungen

$$\left(c_{11} - s_\gamma^2 + \sum_{l=m+1}^{n} g_{1l}g_{l1}\right)k_{1\gamma} + \cdots + \left(c_{1m} + s_\gamma g_{1m} + \sum_{l=m+1}^{n} g_{1l}g_{lm}\right)k_{m\gamma} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(c_{m1} + s_\gamma g_{m1} + \sum_{l=m+1}^{n} g_{ml}g_{l1}\right)k_{1\gamma} + \cdots + \left(c_{mm} - s_\gamma^2 + \sum_{l=m+1}^{n} g_{ml}g_{lm}\right)k_{m\gamma} = 0.$$

Hiernach ist

$$k'_{i\gamma} = s_\gamma k_{i\gamma},$$
$$k'_{j\gamma} = g_{j1}k_{1\gamma} + \cdots + g_{jm}k_{m\gamma}.$$

Ferner hat man nach Nullsetzen von $k'_{i\delta}$ und beliebiger Annahme von $k'_{j\delta}$ die Gleichungen

$$c_{i1}k_{1\delta} + \cdots + c_{im}k_{m\delta} + g_{i,m+1}k'_{m+1,\delta} + \cdots + g_{in}k'_{n\delta} = 0 \qquad (i=1,\ldots,m),$$

aus welchen sich die Größen $k_{1\delta}, \ldots, k_{m\delta}$ berechnen lassen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & \cdots, & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}, & \cdots, & c_{mm} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Setzt man z. B. $k'_{j,m+j} = 1$, alle übrigen Größen $k'_{j\delta}$ gleich Null, so hat man

$$c_{i1}k_{1,m+j} + \cdots + c_{im}k_{m,m+j} + g_{ij} = 0 \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

So erhält man die Substitutionsgleichungen

$$x_i = k_{i1}Z_1 + \cdots + k_{i,2m}Z_{2m} + k_{i,2m+1}Z_{2m+1} + \cdots + k_{i,m+n}Z_{m+n},$$
$$y_i = s_1 k_{i1}Z_1 + \cdots + s_{2m}k_{i,2m}Z_{2m},$$
$$y_j = (g_{j1}k_{11} + \cdots + g_{jm}k_{m1})Z_1 + \cdots + (g_{j1}k_{1,2m} + \cdots + g_{jm}k_{m,2m})Z_{2m} + Z_{m+j}$$

Sind $s_1 = \lambda\sqrt{-1}$ und $s_2 = -\lambda\sqrt{-1}$ konjugiert imaginär, so können wir

$$k_{i1} = h_{i1} + h_{i2}\sqrt{-1}, \quad k_{i2} = h_{i1} - h_{i2}\sqrt{-1}$$

annehmen, wo $h_{i1}$, $h_{i2}$ reell sind. Setzt man

$$z_1 = Z_1 + Z_2, \quad z_2 = \sqrt{-1}(Z_1 - Z_2),$$

so gehen die Gleichungen

$$\frac{dZ_1}{dt} = s_1 Z_1, \quad \frac{dZ_2}{dt} = s_2 Z_2$$

in

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = -\lambda z_1$$

über; es ist

$$k_{i1}Z_1 + k_{i2}Z_2 = h_{i1}z_1 + h_{i2}z_2,$$
$$s_1 k_{i1}Z_1 + s_2 k_{i2}Z_2 = -\lambda h_{i2}z_1 + \lambda h_{i1}z_2,$$
$$(g_{j1}k_{11} + \cdots + g_{jm}k_{m1})Z_1 + (g_{j1}k_{12} + \cdots + g_{jm}k_{m2})Z_2$$
$$= (g_{j1}h_{11} + \cdots + g_{jm}h_{m1})z_1 + (g_{j1}h_{12} + \cdots + g_{jm}h_{m2})z_2.$$

Sind $s_3$ und $s_4 = -s_3$ reell, so setzt man

$$z_3 = Z_3, \quad z_4 = Z_4;$$

sind $s_3$ und $s_4$ konjugiert imaginär, so setzt man

$$z_3 = Z_3 + Z_4, \quad z_4 = \sqrt{-1}(Z_3 - Z_4);$$

usw. Schließlich setzt man

$$z_{2m+1} = Z_{2m+1}, \quad \ldots, \quad z_{m+n} = Z_{m+n};$$

schreibt man

$$k_{i\delta} = h_{i\delta}, \quad k'_{j\delta} = h'_{j\delta}$$

und nimmt man $h'_{j,m+j} = 1$, die übrigen Größen $h'_{j\delta}$ gleich Null an, so ist

$$c_{i1}h_{1,m+j} + \cdots + c_{im}h_{m,m+j} + g_{ij} = 0. \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

Unsere auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen gehen also durch eine lineare Substitution mit reellen Koeffizienten

$$x_i = h_{i1}z_1 + \cdots + h_{i,m+n}z_{m+n},$$
$$y_i = h'_{i1}z_1 + \cdots + h'_{i,2m}z_{2m},$$
$$y_j = (g_{j1}h_{11} + \cdots + g_{jm}h_{m1})z_1 + \cdots + (g_{j1}h_{1,2m} + \cdots + g_{jm}h_{m,2m})z_{2m} + z_{m+j}$$

worin $h'_{i1} = -\lambda h_{i2}$, $h'_{i2} = \lambda h_{i1}$ ist, über in

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = -\lambda z_1, \ldots$$

$$\frac{dz_{2m+1}}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{m+n}}{dt} = 0.$$

Die nicht linearen Differentialgleichungen haben dann die Form

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} &= \lambda z_2 + F_1(z_1, \ldots, z_{m+n}),\\
\frac{dz_2}{dt} &= -\lambda z_1 + F_2(z_1, \ldots, z_{m+n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{2m+1}}{dt} &= F_{2m+1}(z_1, \ldots, z_{m+n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dz_{m+n}}{dt} &= F_{m+n}(z_1, \ldots, z_{m+n}),
\end{aligned}$$

wo $F_1, \ldots, F_{m+n}$ Potenzreihen der beigefügten Argumente mit Gliedern zweiten und höheren Grades sind.

Bezeichnet man die von Null verschiedene Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}, & \ldots, & c_{mm} \end{vmatrix}$$

mit $C$ und die Unterdeterminante von $c_{ik} = c_{ki}$ mit $C_{ik} = C_{ki}$, so ist

$$h_{i,m+j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{C_{ik}}{C} g_{jk}.$$

Hiernach wird

$$\begin{aligned}
y_j + \sum_i g_{ij} x_i &= z_{m+j} + z_{2m+1} \sum_i g_{ij} h_{i,2m+1} + \cdots + z_{m+n} \sum_i g_{ij} h_{i,m+n}\\
&= z_{m+j} + Q_{j,m+1} z_{2m+1} + \cdots + Q_{jn} z_{m+n},
\end{aligned}$$

wo

$$Q_{jl} = \sum g_{ij} h_{m+l} = \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{C} g_{ij} g_{lk}$$

ist. Da, wie wir unten sehen werden, die Determinante

$$E = \begin{vmatrix} 1 + Q_{m+1,m+1}, & \ldots, & Q_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{n,m+1}, & \ldots, & 1 + Q_{nn} \end{vmatrix}$$

unter den früher gemachten Voraussetzungen von Null verschieden ist, so lassen sich die $n - m$ Integralgleichungen

$$y_j + \sum_i g_{ij} x_i + \cdots = \text{Const.}$$

durch Auflösung nach $z_{2m+1}, \ldots, z_{m+n}$ auf die Form bringen:

$$z_{m+j} + \cdots = \text{Const.},$$

wo die weggelassenen Glieder mindestens vom zweiten Grade in $z_1, \ldots, z_{m+n}$ sind.

Die Integralgleichung

$$\sum_a y_a^2 - \sum_{ik} c_{ik} x_i x_k + \cdots = \text{Const.}$$

geht über in

$$A(z_1^2 + z_2^2) + \cdots = \text{Const.},$$

wo

$$A = \lambda^2 \sum_i h_{i2}^2 + \sum_j (g_{j1} h_{11} + \cdots + g_{jm} h_{m1})^2 - \sum_{ik} c_{ik} h_{i1} h_{k1}$$
$$= \lambda^2 \sum_i h_{i1}^2 + \sum_j (g_{j1} h_{12} + \cdots + g_{jm} h_{m2})^2 - \sum_{ik} c_{ik} h_{i2} h_{k2}$$

ist. Wir machen die Voraussetzung, *daß $A$ von Null verschieden ist.*

Wir zeigen noch, daß die Determinante $E$ von Null verschieden ist, wenn die Gleichung $D(s) = 0$ keine verschwindende Wurzel besitzt, wenn also

$$D(0) = \begin{vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1m}, & g_{1,m+1}, & \ldots, & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}, & \ldots, & c_{mm}, & g_{m,m+1}, & \ldots, & g_{mn} \\ g_{m+1,1}, & \ldots, & g_{m+1,m}, & -1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}, & \ldots, & g_{nm}, & 0, & \ldots, & -1 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Wir setzen

$$D_{jj} = \begin{vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1m}, & g_{1j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}, & \ldots, & c_{mm}, & g_{mj} \\ g_{j1}, & \ldots, & g_{jm}, & -1 \end{vmatrix} = -C - \sum_{ik} C_{ik} g_{ij} g_{jk},$$

$$D_{jl} = \begin{vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1m}, & g_{1j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1}, & \ldots, & c_{mm}, & g_{mj} \\ g_{l1}, & \ldots, & g_{lm}, & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{ik} C_{ik} g_{ij} g_{lk}. \qquad (j \gtrless l)$$

Dann ist nach dem Determinantensatz von Sylvester

$$\begin{vmatrix} D_{m+1,m+1}, & \ldots, & D_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n,m+1}, & \ldots, & D_{nn} \end{vmatrix} = C^{n-m-1} D(0),$$

also ist unter den oben gemachten Voraussetzungen die Determinante auf der linken Seite dieser Gleichung von Null verschieden. Diese Determinante ist aber wegen

$$D_{jj} = -C(1 + Q_{jj}), \quad D_{jl} = -CQ_{jl}$$

gleich

$$(-C)^{n-m}E;$$

also ist auch die Determinante $E$ von Null verschieden, w. z. b. w.

Das Differentialgleichungssystem mit den abhängigen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{m+n}$ besitzt unter den bisher gemachten Voraussetzungen nach B. § 7 eine Lösung von der Form

$$z_\alpha = z_\alpha^{(1)} + z_\alpha^{(2)} + \cdots + z_\alpha^{(\nu)} + \cdots. \qquad (\alpha = 1, \ldots, m+n)$$

Hierbei ist

$$z_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_2 \sin w, \quad z_2^{(1)} = -c_1 \sin w + c_2 \cos w,$$

$$z_3^{(1)} = 0, \qquad \ldots, \quad z_{2m}^{(1)} = 0,$$

$$z_{2m+1}^{(1)} = c_{2m+1}, \quad \ldots, \quad z_{m+n}^{(1)} = c_{m+n};$$

$z_\alpha^{(\nu)}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ ist eine ganze homogene Funktion $\nu$ter Dimension von $c_1, c_2, c_{2m+1}, \ldots, c_{m+n}$ und eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots, \nu)$. Es ist

$$w = \frac{2\pi t}{T}$$

und

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots + T^{(\nu)} + \cdots,$$

wo $T^{(1)}$ eine lineare homogene Funktion von $c_{2m+1}, \ldots, c_{m+n}$ und $T^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion $\nu$ten Grades von $c_1, c_2, c_{2m+1}, \ldots, c_{m+n}$ ist. Dabei stellen $c_1, c_2, c_{2m+1}, \ldots, c_{m+n}$ die willkürlich, aber klein anzunehmenden Werte von $z_1, z_2, z_{2m+1}, \ldots, z_{m+n}$ für $t = 0$ dar.

Auf Grund der obigen Substitutionsformeln sind auch $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ Potenzreihen der Integrationskonstanten $c_1, c_2, c_{2m+1}, \ldots, c_{m+n}$ und periodische Funktionen von $w$ mit der Periode $2\pi$. Dasselbe gilt für $x_i' = y_i$ und $x_j' = b_j + y_j$.

Wir haben noch $x_{m+1}, \ldots, x_n$ zu berechnen. Für $j = m + 1, \ldots, n$ ist

$$\frac{dx_j}{dw} = \frac{dt}{dw}\frac{dx_j}{dt} = \frac{T}{2\pi}(b_j + y_j)$$

eine periodische Funktion von $w$ mit dem Mittelwert

$$\Omega_j = \frac{b_j}{\lambda} + \cdots,$$

der als Potenzreihe der Integrationskonstanten erscheint. Soll für $t = 0$ $x_j = x_j^{(0)}$ sein, so erhält man durch Integration

$$x_j - x_j^{(0)} = \mathfrak{Q}_j w + x_j^{(1)} + x_j^{(2)} + \cdots, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

wo $x_j^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion $\nu$ten Grades der Integrationskonstanten und eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots, \nu)$ ist, welche für $w = 0$ verschwindet.

## § 22

Der Fall, daß $m = 1$, $n$ aber beliebig ist, möge etwas genauer behandelt werden.

Wir haben die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= y_1,\\
\frac{dy_1}{dt} &= c_1 x_1 + g_{12} y_1 + \cdots + g_{1n} y_n + \cdots,\\
\frac{dy_2}{dt} &= g_{21} y_1 + \cdots,\\
&\cdots\cdots\\
\frac{dy_n}{dt} &= g_{n1} y_1 + \cdots
\end{aligned}$$

mit den Integralen

$$\begin{aligned}
y_1^2 + \cdots + y_n^2 - c_1 x_1^2 + \cdots &= \text{Const.},\\
y_2 + g_{12} x_1 + \cdots &= \text{Const.},\\
&\cdots\cdots\\
y_n + g_{1n} x_1 + \cdots &= \text{Const.}
\end{aligned}$$

Die Gleichung

$$D(s) = c_1 - s^2 - g_{12}^2 - \cdots - g_{1n}^2 = 0$$

hat, wenn

$$\lambda^2 = g_{12}^2 + \cdots + g_{1n}^2 - c_1$$

positiv ist, die rein imaginären Wurzeln $s_1 = i\lambda$, $s_2 = -i\lambda$. Durch die Substitution

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1 + \frac{g_{21}}{c_1} z_3 + \cdots + \frac{g_{n1}}{c_1} z_{n+1},\\
y_1 &= \lambda z_2,\\
y_2 &= g_{21} z_1 + z_3,\\
&\cdots\cdots\\
y_n &= g_{n1} z_1 + z_{n+1}
\end{aligned}$$

gehen die Differentialgleichungen in

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_2 + \cdots,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = -\lambda z_1 + \cdots,$$
$$\frac{dz_3}{dt} = \qquad + \cdots,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\frac{dz_{n+1}}{dt} = \qquad + \cdots$$

und die Integrale in

$$\lambda^2(z_1^2 + z_2^2) + 2g_{12}z_1 z_3 + \cdots + \left(1 - \frac{g_{12}^2}{c_1}\right) z_3^2 + \cdots = \text{Const.},$$

$$z_{1+j} + \frac{g_{1j}g_{21}}{c_1} z_3 + \cdots + \frac{g_{1j}g_{n1}}{c_1} z_{n+1} + \cdots = \text{Const.} \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

über. Die $n-1$ letzten Integralgleichungen erhalten durch Auflösung nach $z_3, \ldots, z_{n+1}$ die Form

$$z_3 + \cdots = \text{Const.}, \quad \ldots, \quad z_{n+1} + \cdots = \text{Const.}$$

Die Anwendung der jetzigen allgemeinen Methode auf die in B. § 1 und § 9 behandelte Aufgabe I (deren Wortlaut am Anfang von § 20 wiederholt ist) gestaltet sich folgendermaßen.

Unter Beibehaltung der in B. § 1 eingeführten Bezeichnung ist

$$T = \tfrac{1}{2}(1 + f'^2(r))r'^2 + \tfrac{1}{2}r^2\varphi'^2,$$
$$U = -gf(r),$$

so daß $T$ und $U$ von $\varphi$ unabhängig sind. Die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

oder

$$f'(r)f''(r)r'^2 + r\varphi'^2 - gf'(r) = 0$$

wird, wenn $f'(r_0) > 0$ ist, durch

$$r = r_0, \quad r' = 0, \quad \varphi' = \eta_0 = \sqrt{\frac{gf'(r_0)}{r_0}}$$

befriedigt. Setzt man

$$r - r_0 = \frac{x_1}{\sqrt{1 + f'^2(r_0)}}, \quad \varphi = \frac{x_2}{r_0},$$

so wird

$$T = \tfrac{1}{2}(1 + \cdots)x_1'^2 + \tfrac{1}{2}(1 + \cdots)x_2'^2,$$

wo an Stelle von ... Potenzreihen von $x_1$ stehen, welche für $x_1 = 0$ verschwinden. Setzt man weiter

$$y_1 = x_1', \quad y_2 = x_2' - r_0\eta_0$$

und

$$c_1 = \frac{\eta_0^2 - g f''(r_0)}{1 + f'^2(r_0)}, \quad g_{12} = -g_{21} = \frac{2\eta_0}{\sqrt{1 + f'^2(r_0)}},$$

so hat man die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= c_1 x_1 + g_{12} y_2 + \cdots, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \qquad\quad g_{21} y_1 + \cdots. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_1 - s^2, & s g_{12} \\ s g_{21}, & c_2 - s^2 \end{vmatrix} = 0$$

hat, wenn

$$\lambda = \sqrt{g_{12}^2 - c_1} = \sqrt{\frac{g(3f'(r_0) + r_0 f''(r_0))}{r_0(1 + f'^2(r_0))}}$$

reell ist, die rein imaginären Wurzeln $+i\lambda$ und $-i\lambda$. Durch die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + \frac{g_{21}}{c_1} z_3, \\ y_1 &= \lambda z_2, \\ y_2 &= g_{21} z_1 + z_3 \end{aligned}$$

erhält man die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \quad \lambda z_2 + \cdots, \\ \frac{dz_2}{dt} &= -\lambda z_1 + \cdots, \\ \frac{dz_3}{dt} &= \qquad\; + \cdots. \end{aligned}$$

Die Integrale

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \text{Const.}, \quad 2(T - U) = \text{Const.}$$

ersetzen wir durch

$$\begin{aligned} y_2 + g_{12} x_1 + \cdots &= \text{Const.}, \\ y_1^2 + y_2^2 - c_1 x_1^2 + \cdots &= \text{Const.} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda^2}{c_1} z_3 + \cdots &= \text{Const.}, \\ \lambda^2(z_1^2 + z_2^2) + \cdots &= \text{Const.} \end{aligned}$$

Die weitere Behandlung vollzieht sich wie in B. § 9.

---

# Graphische Berechnung der elliptischen Funktionen, mit einigen Anwendungen.

Von N. Delaunay in Warschau.

## § 1.

Die im Laufe des 19. Jahrhunderts entwickelte Theorie der elliptischen Funktionen nahm, nach den Arbeiten von Weierstraß, eine so schöne und abgerundete Form an, daß wir jetzt Lehrbücher über elliptische Funktionen, wie das von Appell und Lacour, besitzen, deren leichtfaßlicher Inhalt sich mit einem Lehrbuch der Trigonometrie vergleichen läßt. Aber diese schöne und wichtige Theorie hat bisher in die Kreise der Ingenieure noch keinen Eingang gefunden. Die Ursache hiervon liegt nach meiner Meinung erstens darin, daß die Theorie der elliptischen Funktionen verhältnismäßig neu ist, zweitens in dem Fehlen graphischer Methoden, mittels deren man die unter der Form der elliptischen Funktionen sich darbietenden Resultate veranschaulichen könnte. In Ingenieurkreisen wendet man gern trigonometrische Funktionen an, nicht nur weil man ihre numerischen Beträge in den Tafeln finden kann, sondern auch weil jede trigonometrische Funktion sich leicht zeichnerisch bestimmen läßt.

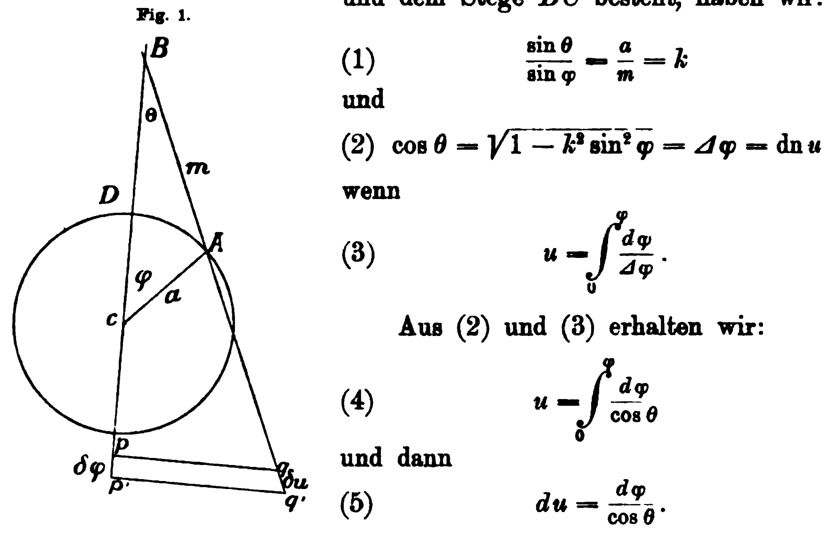
Tafeln für elliptische Funktionen hat bereits Legendre ausgerechnet, es fehlt aber noch an graphischen Methoden zur Berechnung der elliptischen Funktionen. Der Zweck dieser Abhandlung soll ein Versuch sein, die elliptischen Funktionen graphisch zu bestimmen, und mit Hilfe dieser graphischen Methode die Lösung einiger mechanischer und geometrischer Aufgaben vorzuführen. Auf die Möglichkeit, die reellen Werte der elliptischen Funktionen mit hinreichender Genauigkeit graphisch zu bestimmen, habe ich in der Abhandlung „sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultraelliptiques“ (Bullet. de la Société Math. de France, XXX, 1902) hingewiesen. In der vorliegenden Abhandlung wende ich diese graphische Methode auf folgende Probleme an: 1. Rotierendes Seil, 2. einfaches Pendel, 3. elastische Kurve, 4. Kettenlinie und 5. geodätische Kurven auf einem Katenoid.

## § 2.

Die ganze Methode beruht auf folgender Eigenschaft des Hauptmechanismus der Dampfmaschine, also des Schubkurbelgetriebes:

*Fundamentalsatz*: ***Der Kosinus des Ablenkungswinkels $\theta$ der Schubstange $m$ ist eine elliptische Funktion* $\operatorname{dn} u$ *von einem solchen Argument $u$, für das der Kurbelwinkel $\varphi$ gleich* $\operatorname{am} u$ *und der Modul $k$ gleich dem Verhältnisse $\frac{a}{m}$ der Kurbel $a$ zu der Schubstange $m$ ist.*** — Denn aus dem Dreiecke $ABC$ (Fig. 1), das aus der Kurbel $a$, der Schubstange $m$ und dem Stege $BC$ besteht, haben wir:

Fig. 1.




$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{a}{m} = k \tag{1}$$

und

$$\cos\theta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \Delta\varphi = \operatorname{dn} u \tag{2}$$

wenn

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) erhalten wir:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\theta} \tag{4}$$

und dann

$$du = \frac{d\varphi}{\cos\theta}. \tag{5}$$

Diese Beziehung (5) ist die Grundlage unserer graphischen Konstruktionen.

## § 3. Graphische Konstruktion von $\delta u$ für gegebenes $\varphi$.

Wir zeichnen (Fig. 1) mit einem Halbmesser $a$ eine Kreislinie. Wenn wir die Kurbel $a$ als Längeneinheit betrachten, so haben wir:

$$a = 1, \quad k = \frac{1}{m}. \tag{6}$$

Wenn der Kurbelwinkel $\varphi$ eine kleine Änderung $\delta\varphi$ annimmt, so ändert sich der Bogen $DA$ auch um $\delta\varphi$, weil der Halbmesser gleich 1 ist.

Nehmen wir irgendwo auf der Geraden $BC$ die Länge

$$pp' = \delta\varphi$$

an und führen aus den Punkten $p$ und $p'$ zwei zu $BC$ senkrechte Geraden $pq$ und $p'q'$. Diese Geraden werden aus der Verlängerung der Schubstange die Länge

$$qq' = \frac{\delta\varphi}{\cos\theta} = \delta u \tag{7}$$

ausschneiden.

## § 4. Konstruktion des Hauptgitters.

Wenn der Modul $k$ gegeben ist, so bestimmen wir die Länge $m$ der Schubstange aus (6). Dann beschreiben wir (Fig. 2) mit der Längeneinheit als Radius den Fundamentalkreis, teilen den Quadranten $MN$ in $n$ gleiche Teile ein[1]) und bestimmen, indem wir mit der Schubstangenlänge als Radius um die Teilpunkte des Quadranten Kreisbögen beschreiben, deren $n$ Schnittpunkte mit dem Durchmesser $CM$. Die von diesen Schnittpunkten nach den Teilpunkten des Quadranten gezogenen Geraden stellen die $n$ Lagen der Schubstange vor. Auf diesen Geraden erhalten wir, wie oben gezeigt, die Änderungen

$$\delta u_1, \ \delta u_2, \ \ldots \ \delta u_n,$$

indem wir in den im Abstande $\delta\varphi$ voneinander liegenden Punkten $p$ und $p'$ des Durchmessers $CP$ zwei Senkrechte auf $CP$ errichten.

Fig. 2.



Jetzt tragen wir auf einer Abszissenachse $OK$ (Fig. 3) die in der Fig. 2 erhaltenen Änderungen $\delta u_1$, $\delta u_2$, ... $\delta u_n$ eine nach der anderen auf. Dann erhalten wir auf der Abszissenachse $n$ Punkte. Die durch diese $n$ Punkte geführten senkrechten Geraden geben den auf das Intervall $O \ldots K$ bezüglichen Teil des Hauptgitters. Um das ganze Hauptgitter zu erhalten, müssen wir weiter die Änderungen des Argumentes $u$ in umgekehrter Folge, also der Reihe nach $\delta u_n$, $\delta_{n-1} \ldots \delta u_2$, $\delta u_1$, auf der Abszissenachse, dann $\delta u_1$, $\delta u_2$, ... $\delta u_n$ usw. abtragen und die zur Ordinatenachse symmetrische Konstruktion auf der negativen Seite der Abszissenachse ausführen und dann die zur Abszissenachse senkrechten Geraden durch die Punkte des Zusammentreffens von je zwei benachbarten Änderungen ziehen. Die

1) Je größer $n$ ist, desto genauer wird unsere Konstruktion sein. Die Untersuchung der Genauigkeit der Konstruktion ist in meiner oben zitierten Abhandlung angegeben.

Abszissen auf diesem Hauptgitter sind $u$, die Ordinaten wollen wir $y$ nennen.

Man sieht leicht, daß wir die Punkte der Kurven $y = \operatorname{sn} u$ er-

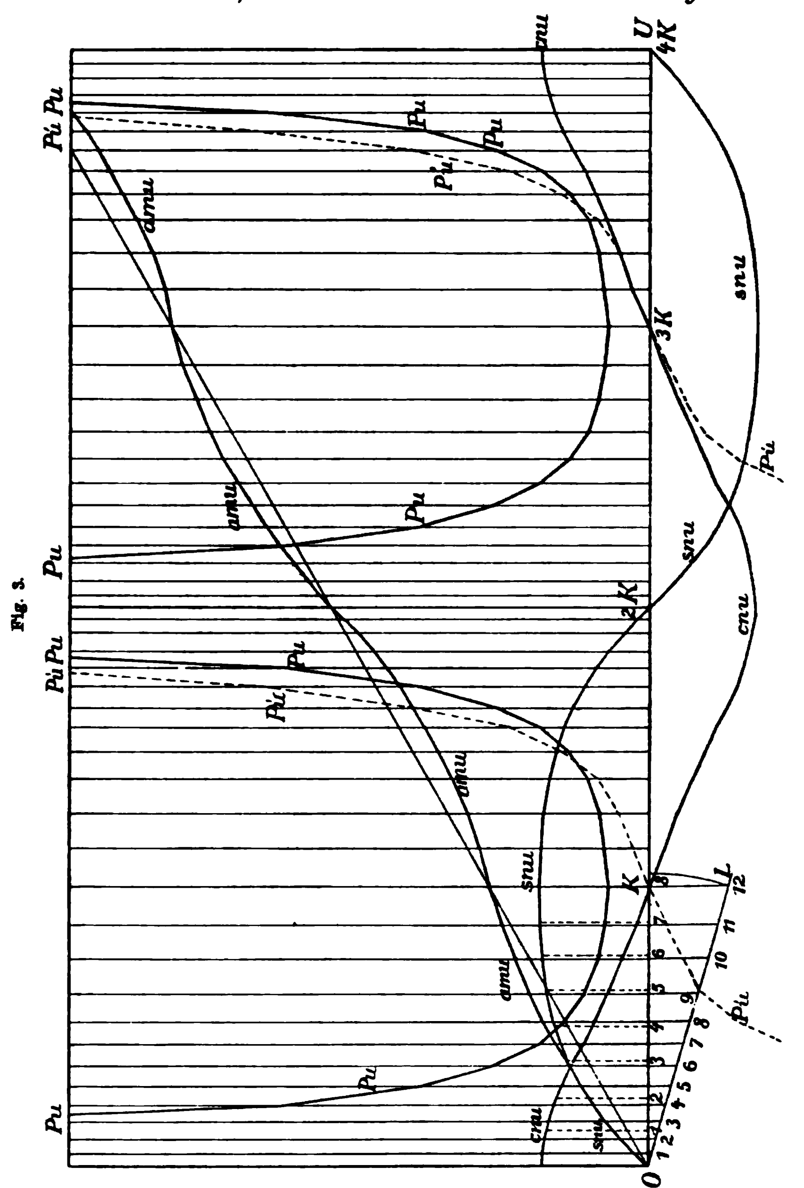



Fig. 3.

halten werden, wenn wir auf den senkrechten Geraden des Gitters die sehr leicht aus der Fig. 2 zu erhaltenden Längen

$$\operatorname{sn} u_1 = \sin \varphi_1 ; \quad \operatorname{sn} u_2 = \sin \varphi_2 \ \ldots$$

auftragen und daß wir in derselben Weise auch die Punkte der Kurven $y = \operatorname{cn} u$ und $y = \operatorname{dn} u$ finden können.

Aber alle auf diese Art erhaltenen Konstruktionen werden ungenau sein. Wir müssen noch einige Verbesserungen einführen. In meiner erwähnten Abhandlung habe ich mit Hilfe der berühmten Eulerschen Formel

$$\int_a^b \mathfrak{f}(\varphi)\,d\varphi = h\left[\frac{\mathfrak{f}(a)}{2} + \mathfrak{f}(\varphi_1) + \mathfrak{f}(\varphi_2) + \cdots + \frac{\mathfrak{f}(b)}{2}\right]$$
$$- \frac{h^2 \varepsilon}{1 \cdot 2}[\mathfrak{f}'(b) - \mathfrak{f}'(a)]; \qquad 1 > \varepsilon > 0,$$

gezeigt, daß wir für genaue Konstruktion noch zwei Korrektionen

$$\xi_1 = -\frac{\pi}{4n}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}} - 1\right]$$

$$\xi_2 = -\frac{\pi^2 \varepsilon k^2 \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{4n^2\, 12\left[1 - k^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

berücksichtigen müssen.

Ich habe dort auch gezeigt, daß man für $k \lesseqgtr 0{,}9$ die Korrektion $\xi_2$ vernachlässigen kann. Was aber die Korrektion $\xi_1$ anbetrifft, so sehen wir, daß sie in der Form

$$\xi_1 = -\frac{\pi}{4n}[\sec\theta - 1]$$

ausgedrückt werden kann. Dieser Wert ist aber sehr leicht konstruierbar wie folgt.

Aus dem Mittelpunkt $C$ des Fundamentalkreises (Fig. 2) ziehen wir eine Gerade parallel zur entsprechenden Schubstange bis zu dem Schnittpunkte $s$ dieser Geraden mit der durch den Punkt $P$ geführten Tangente. Dann haben wir:

$$Cs = \sec\theta$$
$$Ds = \sec\theta - 1.$$

Der aus dem Punkte $D$ mit dem Halbmesser $Ds$ beschriebene und dem Zentriwinkel $\frac{\pi}{4n}$ entsprechende Bogen $st$ gibt also

$$(8) \qquad \xi_1 = st.$$

Wir werden jetzt in einem konkreten Beispiele sehen, wie man diese Korrektion in unsere Konstruktionen einführen kann.

## § 5. Die Konstruktion der elliptischen Funktionen $y = \operatorname{sn} u$; $y = \operatorname{cn} u$ für $k = 0{,}9$; $n = 12$.

Wir teilen den Quadranten des Fundamentalkreises (Fig. 2) in 12 Teile ein. Die aus den Teilpunkten des Quadranten mit dem Halbmesser $m = \frac{1}{k} = \frac{10}{9}$ beschriebenen Kreisbögen geben auf dem Durchmesser $PC$ 12 Schnittpunkte, und auf den 12 durch diese Schnittpunkte und durch die entsprechenden Teilpunkte geführten Geraden erhalten wir 12 Strecken $\delta u_1$, $\delta u_2 \ldots \delta u_{12}$; Wir tragen diese Strecken, eine nach der anderen, auf einer durch den Anfang $O$ der Koordinaten (Fig. 3) geführten Hilfsgeraden $OL$ ab. Dann tragen wir die auf der Geraden $OL$ erhaltene Summe $\sum_{n=1}^{n=12} \delta u_n$ auf der Abszissenachse vom Anfangspunkte $O$ ab und subtrahieren davon die aus der Fig. 2 vorherbestimmte Korrektion $\xi_1 = st$. So erhalten wir $OK = K$ (Fig. 2), also die halbe Periode, weil $\varphi = \frac{\pi}{2}$, oder der ganze Quadrant, dem die halbe Periode $K$ entspricht, ist auf diese Weise $\frac{\pi}{2} = \operatorname{am} K$.

Wir mußten für jedes $n$ der Summe $\sum_{n=1}^{n=12} \delta u_n$ eine solche Korrektion vornehmen, aber die Geraden, welche die so auf der Abszissenachse erhaltenen Teilpunkte mit den Teilpunkten auf der Geraden $OL$ verbinden, sind praktisch einander parallel. Diese Bemerkung gibt eine Vereinfachung unserer Konstruktionen: wir ziehen eine Gerade durch die Punkte $L$ und $K$ und führen dann durch die Teilpunkte der $OL$ Geraden parallel zu $KL$. Aus den Schnittpunkten dieser Geraden mit der Abszissenachse ziehen wir zu dieser Achse senkrechte Geraden und erweitern unsere Konstruktion im Sinne der positiven und negativen $u$. Wir haben so das Hauptgitter (Fig. 3) konstruiert.

Jetzt tragen wir auf den senkrechten Geraden des Hauptgitters, die aus der Fig. 2 leicht zu findenden Strecken $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$, $\ldots \sin\varphi_{12}$, $\sin\varphi_{11}$, $\sin\varphi_{10} \ldots \sin\varphi_1 \ldots$ ab und verbinden die auf dem Hauptgitter erhaltenen Punkte miteinander durch Gerade. So bekommen wir ein Polygon, welches angenähert die Kurve $y = \operatorname{sn} u$ darstellt.

Ebenso einfach konstruieren wir auf dem Hauptgitter die Kurve $y = \operatorname{cn} u$ mit Hilfe der $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2 \ldots$, welche man leicht aus der Fig. 2 finden kann.

## § 6. Die Konstruktion des elliptischen Integrals.

Trägt man auf den senkrechten Geraden 1, 2, 3 ... des Hauptgitters die entsprechenden Längen $\delta\varphi$, $2\delta\varphi$, $3\delta\varphi$ ... auf und verbindet die so erhaltenen Punkte miteinander, so erhält man die Kurve

$$y = \varphi = \operatorname{am} u,$$

die wellenförmig in der Richtung der Geraden

$$x = \frac{\pi}{2K} u$$

aufsteigt.

Diese Kurve stellt das elliptische Integral erster Gattung dar, weil seine Gleichung in die Form

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

gebracht werden kann.

## § 7. Die Konstruktion der elliptischen Funktion $P(u)$.

Für die mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ konstruierte Funktion $P(u)$ haben wir[1]) die Beziehung:

$$P(u) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} - \frac{1}{3}(k^2 + 1)$$

welche für unsere Bezeichnungen die Form

$$P(u) = \operatorname{cosec}^2 \varphi - \frac{1}{3}(k^2 + 1)$$

annimmt.

Wir finden leicht aus der Fig. 2 die Längen $\operatorname{cosec}\varphi_1$, $\operatorname{cosec}\varphi_2$, $\operatorname{cosec}\varphi_3$ ... und dann auch $\operatorname{cosec}^2\varphi_1$, $\operatorname{cosec}^2\varphi_2$ .... Wir tragen die gefundenen Längen $\operatorname{cosec}^2\varphi_1$, $\operatorname{cosec}^2\varphi_2$ ... im Hauptgitter auf (Fig. 3) und subtrahieren von den erhaltenen Ordinaten eine und dieselbe leicht bestimmbare Länge $\frac{k^2+1}{2}$. Dann erhalten wir auf dem Hauptgitter die Punkte der Kurve

$$y = P(u).$$

Die Zweige dieser Kurve wiederholen sich periodisch in den Intervallen: $O \ldots 2K$; $2K \ldots 4K \ldots$.

---

1) Appell et Lacour, loc. cit., p. 140.

### § 8. Die Konstruktion der elliptischen Funktion $P'(u)$.

Für die Konstruktion der Kurve $y = P'(u)$ haben wir[1]) die Formel:

$$P'(u) = -\frac{2\,\mathrm{sn}\,u \cdot \mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^3 u} = -\frac{2\,\mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2 u}.$$

Die Länge $\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{cosec}^2 \varphi$ haben wir schon in dem letzten Paragraphen konstruiert. Wir multiplizieren $\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}$ durch $\mathrm{cn}\,u$, indem wir die Länge $\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}$ auf den entsprechenden Kurbeln (Fig. 2) auftragen und sie auf den Durchmesser projizieren. Wir multiplizieren die gefundene Länge $\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}^2 u}$ mit $dnu$; indem wir sie auf der entsprechenden Schubstange auftragen und dann auf den Durchmesser $CP$ projizieren. Endlich bekommen wir die Ordinaten der gesuchten Kurve, indem wir die gefundene Länge $\frac{\mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2 u}$ verdoppeln und im Hauptgitter auftragen. Die erhaltene Kurve $y = P'(u)$ ist in (Fig. 3) durch eine gestrichelte Linie dargestellt. Die Ordinate dieser Kurve nimmt in jeder Periode alle reellen Beträge von $-\infty$ bis $+\infty$ an, indem die den Abszissen $\cdots -2K, 0, 2K, 4K \ldots$ entsprechenden Ordinaten die Asymptoten dieser Kurve sind.

## Die Anwendungen.

### § 9. Rotierendes Seil.

Das in zwei Punkten der Abszissenachse befestigte und um diese Achse gleichförmig rotierende Seil nimmt[2]) die Gestalt einer Kurve

$$y = \sqrt{b^2 - a^2}\,\mathrm{sn}\left(\frac{u\sqrt{2}}{ak'}\right)$$

an. Unsere, in der Fig. 3 gezeichnete Kurve $y = snu$ stellt also die Form des rotierenden Seils für $b^2 - a^2 = 1$; $ak' = \sqrt{2}$ dar. Wie diese Kurve, kann auch das rotierende Seil aus vielen Wellen bestehen.

### § 10. Das einfache Pendel.

*Erster Fall.* Das Pendel wird aus seiner unteren Gleichgewichtslage mit einer Anfangsgeschwindigkeit in Bewegung gebracht, welche nicht ausreicht, um das Pendel bis in die obere Gleichgewichtslage zu

1) Appell et Lacour, loc. cit., p. 140.
2) Appell et Lacour, loc. cit., p. 191.

führen, so daß der größte Ablenkungswinkel des Pendels gleich $\alpha$ ist. Dieselbe Bewegung nimmt das Pendel an, wenn es um den Winkel $\alpha$ von der Lotrechten abgelenkt wird und sich dann unter dem Einfluß der Schwere bewegt. Für diese Pendelbewegung geben Appell und Lacour (loc. cit., p. 181) die Gleichungen an:

$$k^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{9}$$

$$u = \operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \tag{10}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \tag{11}$$

In diesen Formeln sind: $l$ die Länge des Pendels, $g$ die Beschleunigung der Schwere, $t$ die Zeit, welche von dem Zeitpunkt eines Durchganges des Pendels durch die untere Gleichgewichtslage gerechnet ist.

Wir werden nun eine solche Bewegung des Pendels für $l = g$, also für

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \cdot \operatorname{sn} t \tag{12}$$

untersuchen. Dann werden wir für die halbe Schwingungsdauer die Formel $T = 2K$ haben.

Wir können nunmehr an die Lösung folgender Aufgabe herantreten:

Alle Lagen, welche das Pendel nach gleichen Zeiträumen $\frac{K}{8}$ einnimmt, zu zeichnen, wenn $k = 0{,}9$ ist.

Für $k = 0{,}9$, also für $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}9$, haben wir schon das Hauptgitter in Fig. 3 fertig. Wir teilen die Abszisse $OK$ in 8 gleiche Teile und tragen in den gefundenen 8 Teilpunkten die Ordinaten der Kurve $y = \operatorname{sn} u$ auf. Wir finden so: $\operatorname{sn} u_1$, $\operatorname{sn} u_2 \ldots \operatorname{sn} u_7$ und $\operatorname{sn} u_8 = \operatorname{sn} K = 1$. Wir multiplizieren diese Ordinaten mit $k$, indem wir sie in dem Verhältnisse $\frac{k}{1}$ verkürzen. So haben wir, wie es in der Formel (12) angedeutet ist, die Längen: $\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cdots$ mit welchen wir leicht die Winkel: $\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\theta_2}{2} \cdots$ und dann durch Verdopplung die Winkel $\theta_1$, $\theta_2 \ldots$ und also die gesuchten Lagen des Pendels (Fig. 4) konstruieren.

Es wird etwas bequemer sein, die Sinus nur für die Abszissen $u < \frac{K}{2}$, für die Abszissen $u > \frac{K}{2}$ aber die Kosinus zu konstruieren, weil für $u > \frac{K}{2}$ die Kosinus sich schneller ändern als die Sinus. Man kann die Sinus auf dem horizontalen und die Kosinus auf dem ver-

tikalen Halbmesser, wie es in Fig. 9 angedeutet ist, abtragen. Dann ziehen wir durch die erhaltenen Punkte des Halbmessers die zum anderen Halbmesser parallelen Geraden, welche den Kreis in den Enden der Bogen $\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2} \cdots$ schneiden. Die Verdopplung der diesen Bogen entsprechenden Winkel gibt die gesuchten Lagen des Pendels.

Fig. 4.

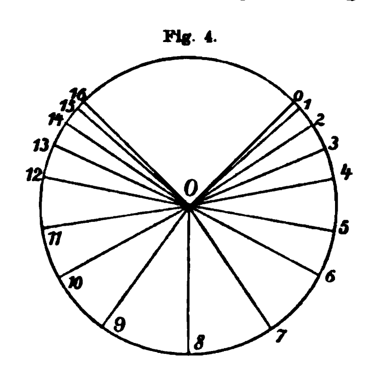



Fig. 5.

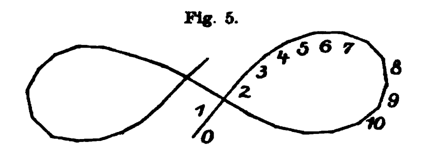



Fig. 13 stellt die verschiedenen Lagen des Pendels für die Zeitintervalle $\frac{K}{6}$, für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also für $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dar. Diese Figur ist natürlich mit Hilfe eines anderen Hauptgitters gezeichnet.

*Zweiter Fall.* Das Pendel bekommt in seiner unteren Gleichgewichtslage einen Impuls, der ausreicht, um das Pendel über seine obere Gleichgewichtslage zu werfen; dann wird das Pendel ganze Umdrehungen um den Punkt $O$ in derselben Richtung ausführen. Für diesen Fall finden wir bei Appell und Lacour (loc. cit., p. 183) die Gleichung

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sn}(\lambda t). \tag{13}$$

Diese Gleichung, für $\lambda = 1$, gibt eine noch einfachere Konstruktion, als in dem ersten Falle, weil wir hier nicht mit $k$ zu multiplizieren brauchen. Die Lagen, welche das Pendel in den Zeitintervallen $\frac{K}{8}$ für $k = 0{,}9$ einnimmt, sind in Fig. 11 gezeichnet.

Der dritte Fall ist in § 16 untersucht.

## § 11. Kettenlinie.

Die Gleichung der Kettenlinie ist:

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{u}{h}} + e^{-\frac{u}{h}}\right) \tag{14}$$

oder, wenn $h = 1$ ist:

$$y = \tfrac{1}{2}(e^u + e^{-u}). \tag{15}$$

Man kann hier die Variable $y$ einer Secans gleich setzen und man erhält dann, wenn man

$$y = \sec\varphi \tag{16}$$

annimmt:

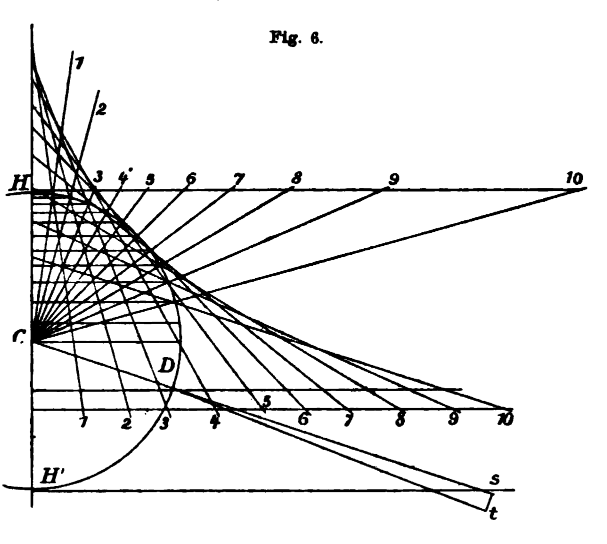
$$\cos\varphi = \frac{2}{e^u + e^{-u}} \tag{17}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \tag{18}$$

$$du = d\varphi \cdot \sec\varphi \tag{19}$$

$$x = u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi}. \tag{20}$$

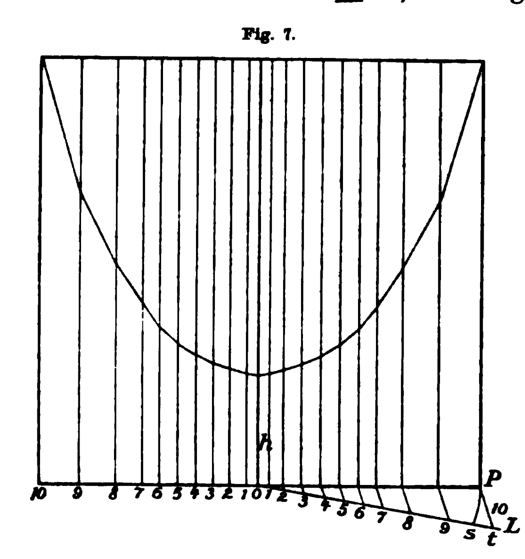
Die Gleichungen (5) und (4) gehen in die Gleichungen (19) und (20) über, falls $\theta = \varphi$, also falls $k = 1$, d. h. wenn das Schubkurbelgetriebe in ein gleichschenkliges Schubkurbelgetriebe übergeht. Die Formeln (16) und (19) führen zur folgenden Konstruktion der Kettenlinie.




Wir teilen den Quadranten des mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Fundamentalkreises (Fig. 6) in $n$ gleiche Teile. Die aus den Teilpunkten mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogen geben auf dem Durchmesser $OH$ $n$ Schnittpunkte. Auf den $n$ durch diese Schnittpunkte und die $n$ Teilpunkte des Quadranten gezogenen Geraden (Lagen der Schubstange) erhalten wir die Änderungen $\delta u_1$, $\delta u_2 \ldots$, indem wir aus den Endpunkten $p$ und $p'$ der auf dem Durchmesser abgetragenen Länge $\delta\varphi$ zwei Lote auf diesem errichten, welche die Änderungen $\delta u_1$, $\delta u_2 \ldots$ aus den Lagen der Schubstange ausschneiden. In Fig. 6 haben wir $n = 12$ angenommen. Die Summe $\sum \delta u$ der aus Fig. 6 erhaltenen Strecken übertragen wir auf eine Hilfsgerade $OL$ (Fig. 7). Wir ziehen durch $C$ (Fig. 6) eine Gerade parallel mit der letzten betrachteten Lage der Schubstange, z. B. mit der 10., bis an den Schnittpunkt $s$ mit der in $H'$ an den Fundamentalkreis gelegten Tangente. Die Gerade $Os$ schneidet den Fundamentalkreis in einem Punkt $D$. Den, dem Winkel $\frac{\pi}{4 \cdot 10}$ entsprechenden Bogen $st$ des aus dem

Punkte $D$ mit dem Halbmesser $Ds$ beschriebenen Kreises substrahieren wir, als eine Korrektion von $\sum \delta u$, und tragen die Länge $OP = \sum \delta u - st$ auf der Abszissenachse (Fig. 7) auf. Dann ziehen wir durch die Teilpunkte der Geraden $OL$ die zu $LP$ parallelen Geraden bis zu ihren Schnittpunkten mit der Abszissenachse, und aus den auf der Abszissenachse erhaltenen 10 Schnittpunkten ziehen wir Ordinatenlinien, auf welchen wir, wie die Formel (16) lehrt, die Längen $\sec \varphi_1$, $\sec \varphi_2 \ldots \sec \varphi_{10}$ auftragen. So erhalten wir 10 Punkte der gesuchten Kettenlinie und dann die 10 ihnen in bezug auf die Ordinatenachse symmetrischen Punkte. Die Kettenlinie wird gezeichnet, indem wir diese 20 Punkte miteinander verbinden.

Fig. 7.




## § 12. Ausartungen der elliptischen Funktionen bei $k = 1$.

Das Hauptgitter für die Kettenlinie, welche wir bei der Annahme $k = 1$ konstruiert haben, kann natürlich dazu dienen, um die Ausartungen der elliptischen Funktionen zu zeichnen. Diese Konstruktionen werden wir in der (Fig. 8) vornehmen.

Die elliptische Sinuslinie $y = \operatorname{sn} u$ artet hier in die Kurve

$$y = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \tag{21}$$

und die elliptische Kosinuslinie $y = \operatorname{cn} u$ in die Kurve

$$y = \frac{2}{e^u + e^{-u}} \tag{22}$$

aus.

Die Kurve (21) hat die Gerade $y = 1$, die Kurve (22) hat die Abszissenachse zur Asymptote.

## § 13. Die Kurven $y = e^u$ und $y = e^{-u}$.

Aus (17) und (18) folgt:

$$e^u + e^{-u} = 2 \sec \varphi \tag{23}$$

$$e^u - e^{-u} = \sin \varphi_1 \, 2 \sec \varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi . \tag{24}$$

Aus (23) und (24) haben wir:

$$e^{u} = \sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi \tag{25}$$

$$e^{-u} = \sec\varphi - \operatorname{tg}\varphi. \tag{26}$$

Man kann leicht die Längen $\sec\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$ aus Fig. 6 finden. Wir werden die Kurve $y = e^{u}$ erhalten, wenn wir auf den Ordinaten des Hauptgitters (Fig. 8) die Summen $\sec\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_1$; $\sec\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_2 \ldots$ auftragen, ebenso die Kurve $y = e^{-u}$, wenn wir die Differenzen $\sec\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_1$; $\sec\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_2 \ldots$ auftragen.

## § 14. Konstruktion der Kettenlinie in dem Falle, daß die Länge der Kette und der Abstand zwischen ihren zwei auf einer Horizontalen sich befindenden Endpunkten gegeben sind.

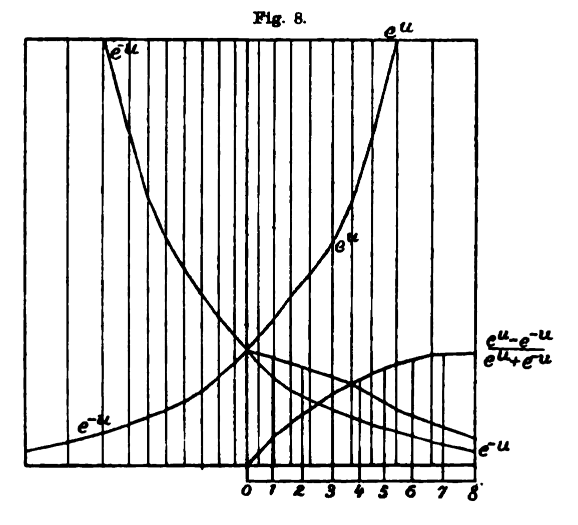
In § 11 haben wir eine Kettenlinie für gegebenes $h$, welches wir als Längeneinheit betrachten, gezeichnet. Aber in technischen Aufgaben sind meistenteils die Länge $s$ der Kette und der Abstand $2p$ zwischen zwei auf einer Horizontalen sich befindenden Punkten gegeben. Betrachten wir nun, wie man die Kettenlinie bei solchen Angaben konstruieren kann. Zu diesem Zwecke konstruieren wir von vornherein das Hauptgitter (Fig. 8) und die Kurven $y = e^{u}$ und $y = e^{-u}$. Dann gibt uns die bekannte Formel

$$s = \frac{h}{2}(e^{u} - e^{-u})$$

die Größe $h$ in der Form

$$h = \frac{2s}{e^{u} - e^{-u}} = \frac{2s}{e^{p} - e^{-p}}. \tag{27}$$

Fig. 8.

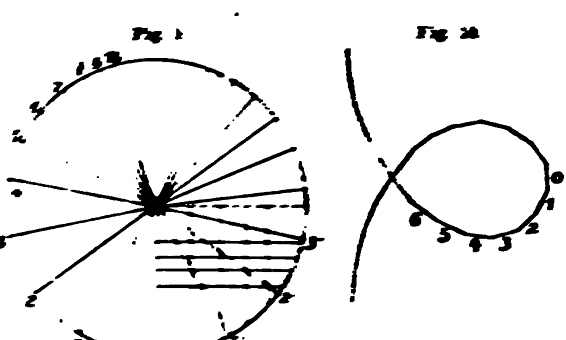



Man kann leicht den Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit Hilfe der Kurven $y = e^{u}$ und $y = e^{-u}$ finden. Wir werden dann aus (27) die Länge $h$ erhalten. Wir zeichnen mit Hilfe des mit dem Halbmesser $h$ beschriebenen Fundamentalkreises ein neues Gitter und folgen dann der in § 11 gezeigten Konstruktion.

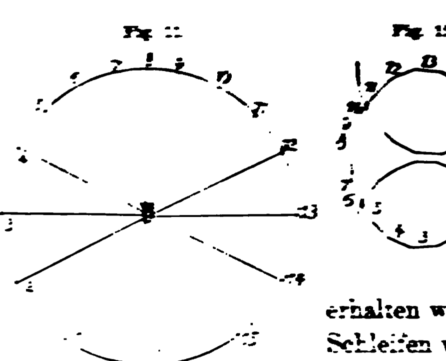
## § 15. Die elastische Kurve.

Für die Konstruktion der elastischen Kurve haben wir den berühmten Kirchhoffschen Satz:

*Es gibt stets einen schweren starren, um einen festen Punkt rotierenden Körper, der dem (elastischen) Stabe in der Art entspricht, daß die durch den festen Punkt und den Schwerpunkt gehende Linie immer der Tangente des Stabes parallel ist, wenn $s = t$ angenommen wird.* (Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik 1877, S. 422).



Nach diesem Satze entspricht der ebenen elastischen Kurve ein einfaches Pendel, und wenn bereits in den Figuren 4, 9, 11 und 13 die verschiedenen Lagen gegeben sind, welche das Pendel in aufeinander folgenden gleichen Zeiträumen einnimmt, so brauchen wir nur das gleichseitige Polygon zu zeichnen, dessen Seiten parallel den gezeichneten Pendellagen sind, um eine angenäherte elastische Kurve zu haben.



Für das Pendel Fig. 4 mit Ablenkungswinkel

$$\alpha = 2 \arcsin(0{,}9)$$

erhalten wir die elastische Kurve Fig. 5, deren Schleifen von beiden Seiten einer Geraden sich ausbreiten und deren Wendepunkte auf dieser Geraden liegen.

Dem Pendel Fig. 11, welches bei $k = 0{,}9$ ganze Umdrehungen ausführt, entspricht die elastische Kurve Fig. 12 ohne Wendepunkte und mit Schleifen, welche auf einer Seite einer Tangente liegen.

Dem Pendel Fig. 13 mit Ablenkungswinkel $90^0$ und $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entspricht die elastische Kurve Fig. 14.

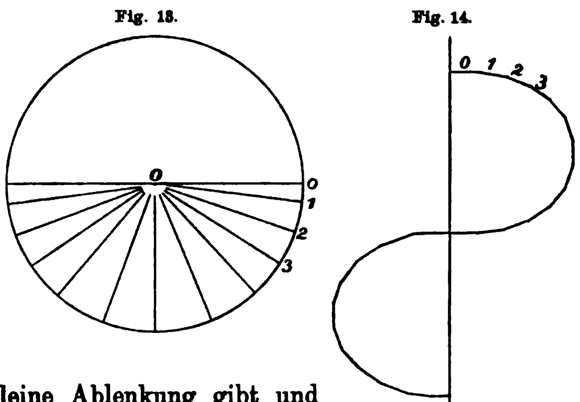
## § 16. Asymptotisches Pendel.

Für $k = 1$ haben wir nach den Formeln (9), (11), (17) und (18):

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \tag{28}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{e^t + e^{-t}}. \tag{29}$$

Der Tatsache entsprechend, daß die Kurve $y = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ sich asymptotisch der Geraden $y = 1$ nähert, erhebt sich das Pendel bei $k = 1$ von der unteren Gleichgewichtslage und nähert sich immer mehr der oberen Gleichgewichtslage, kommt aber in diese letzte Lage erst nach unendlich langer Zeit (Fig. 9). Dieselbe Bewegung wird nach dem Durchgang durch die untere Gleichgewichtslage ein Pendel hervorbringen, wenn man ihm aus der oberen Gleichgewichtslage eine unendlich kleine Ablenkung gibt und es dann unter der Wirkung der Schwere sich bewegen läßt.




Wir haben nur 21 von den unendlich vielen Lagen, welche ein solches Pendel nach gleichen endlichen Zeiträumen einnimmt, in Fig. 9 gezeichnet.

## § 17. Die dem asymptotischen Pendel entsprechende elastische Kurve.

Diese Kurve (Fig. 10) hat nur eine Schleife und nähert sich asymptotisch der Geraden, welche der oberen Gleichgewichtslage entspricht.

## § 18. Die geodätischen Kurven auf einem Katenoid.

Für die geodätischen Linien auf dem Katenoid

$$r = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{s}{h}} + e^{-\frac{s}{h}}\right) \tag{30}$$

geben Appell und Lacour (loc. cit., p. 209) die Gleichung:

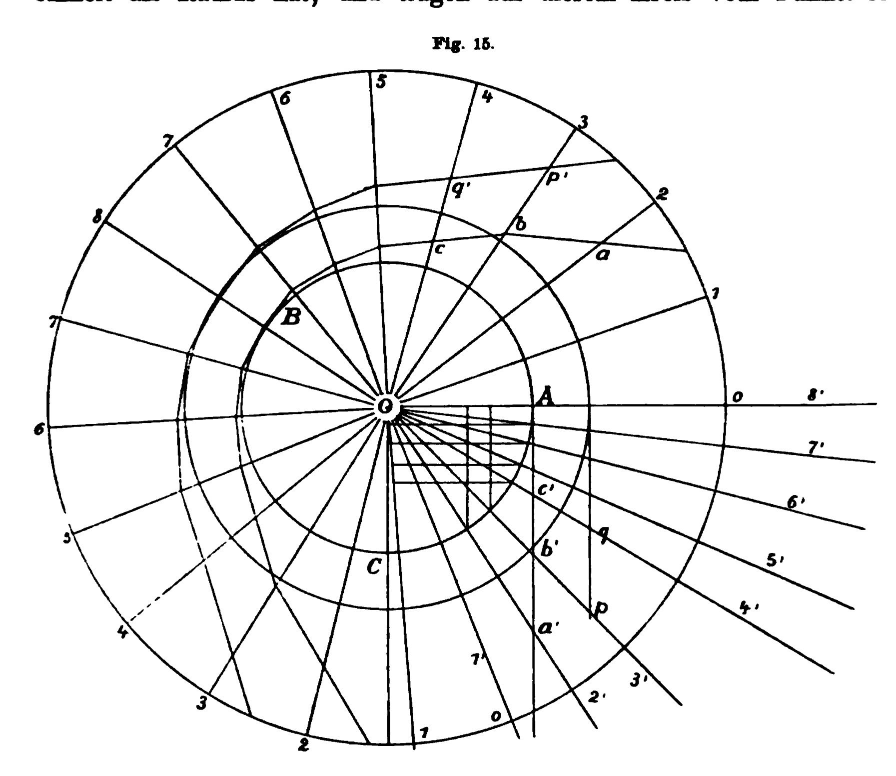
$$r = \frac{b}{\operatorname{sn} u} = \frac{b}{\sin\varphi} = b \cdot \operatorname{cosec}\varphi, \tag{31}$$

wo $r$ und $u$ Polarkoordinaten und $b$ eine Konstante sind. Zeichnen wir nun die geodätischen Linien auf dem Katenoid

$$r = \tfrac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}); \quad k = 0{,}9. \tag{32}$$

Diese Gleichung gibt $r = 1$ für $z = 0$. Der Halbmesser des Katenoids ist also gleich 1. Wir zeichnen (Fig. 15) den Kreis, der die Längeneinheit als Radius hat, und tragen auf diesem Kreis vom Punkte $A$

Fig. 15.




nacheinander Bögen gleich $\frac{1}{8}OK$ (Fig. 3) auf. Der Bogen $AB = 8(\frac{1}{8}OK) = OK$ wird gleich der halben Periode sein. Wir ziehen Halbmesser durch die erhaltenen Teilpunkte des Kreises. Um die geodätische Linie für $b = 1$ zu zeichnen, übertragen wir auf den Halbmesser $OA$ (Fig. 15) die Strecken $\operatorname{sn} u_1$, $\operatorname{sn} u_2 \ldots$, welche wir aus Fig. 3 bestimmen können. Auf den Halbmesser $OC$ (Fig. 15) übertragen wir die Strecken $\operatorname{cn} u_1$, $\operatorname{cn} u_2 \ldots$ Durch die auf dem Halbmesser $OA$ erhaltenen Punkte ziehen wir Geraden parallel dem Halbmesser $OC$, und durch die auf dem Halbmesser $OC$ erhaltenen Punkte ziehen wir ebenso Geraden parallel dem Halbmesser $OA$. Durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreise ziehen wir die Halbmesser, welche uns die den Argumenten

$u_1, u_2, u_3$ entsprechenden Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ geben. Wenn wir jetzt aus Fig. 15 die Strecken $\operatorname{cosec} \varphi_1$, $\operatorname{cosec} \varphi_2$, $\operatorname{cosec} \varphi_3 \ldots$ bestimmen und sie auf den Halbmessern 1, 2, 3 ... auftragen, so daß $oa' = oa$, $ob' = ob \ldots$, dann erhalten wir, der Gleichung (31) entsprechend, die Punkte der gesuchten geodätischen Linie.

Um die geodätische Linie $p'q'$ für ein anderes $b$ zu zeichnen, muß man dieselbe Konstruktion, nur vom Kreise mit dem Halbmesser $b$ ausgehend, durchführen.

§ 19.

Natürlich kann man alle dieser Abhandlung beigefügten Zeichnungen mit Hilfe der aus den Legendreschen Tafeln ausgerechneten Längen, und vielleicht mit größerer Genauigkeit, ausführen. Doch glaube ich, daß die hier gezeigte Methode schneller zum Ziele führen wird. Man kann auch die elliptischen Funktionen je in eine trigonometrische Reihe entwickeln, sich mit den beiden ersten Gliedern dieser Reihe begnügen und diese Glieder graphisch bestimmen. Ich glaube aber, daß diese letzte Methode nur dann schneller als die in dieser Abhandlung gelehrte zum Ziele führen wird, wenn es sich nur um eine einzige Funktion handelt, weil in letzterer nur die Konstruktion des Hauptgitters etwas langwierig ist; wenn aber das Hauptgitter fertig ist, so geht die Konstruktion außerordentlich schnell von statten.

---

# Réflexion de la lumière sur l'eau ébranlée.

Par F. Biske à Strassbourg.

Etant donnés un point d'observation et un point lumineux au-dessus d'une surface d'eau, on observe sur l'eau absolument tranquille en général un point de réflexion, tandis qu'avec quelque ébranlement de l'eau on observe une surface de réflexion, qui augmente à fur et à mesure de l'ébranlement.

Je me propose: Etant données les positions des points d'observation et lumineux au-dessus d'une plane surface d'eau, ainsi que l'angle lequel atteignent en maximum les ébranlements de l'eau, de déterminer la figure de la surface de réflexion, et inversement des dimensions observées de cette figure de trouver l'angle maximal lequel atteignent les ébranlements de l'eau.

Soient (Fig. 1) $AP = h$ la hauteur d'un point $A$, $BM = H$ celle

d'un autre point $B$, $PM = d$ la distance de ces points sur la surface de l'eau, on a pour $E_0$ l'élément réfléchissant avec l'ébranlement $\varepsilon_0 = 0$

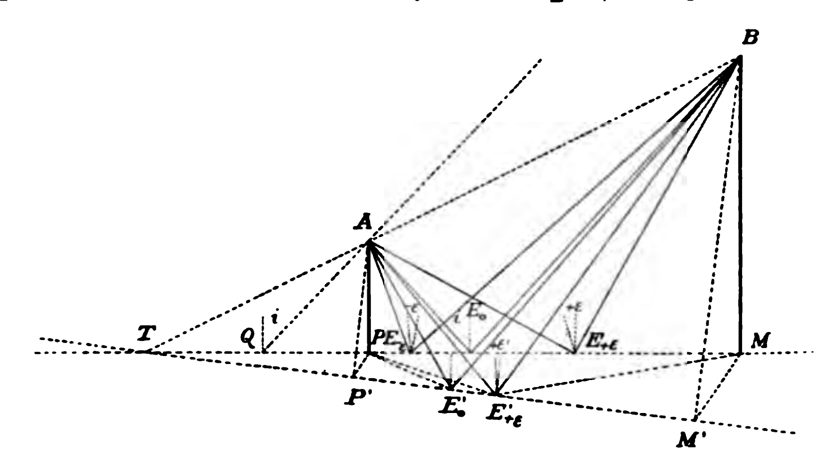
$$\operatorname{tg} PAE_0 = \operatorname{tg} MBE_0 = \frac{d}{H+h}$$

et pour $E_{\pm\varepsilon}$ l'élément avec l'ébranlement $\pm\varepsilon$, en distances angulaires

$$E_0AE_{\pm\varepsilon} = \pm\alpha \text{ et } E_0BE_{\pm\varepsilon} = \pm\beta$$

$$\pm\varepsilon = \pm\frac{\alpha+\beta}{2},$$

parce que si l'on construit à en $E_{\pm\varepsilon}$ les rayons parallèles $E_0A$ et $E_0B$ il faut d'abord tourner l'élément $E_{\pm\varepsilon}$ de l'angle $\pm\frac{\alpha}{2}$ pour faire coïncider le premier rayon avec $E_{\pm\varepsilon}A$ et après de l'angle $\pm\frac{\beta}{2}$ pour faire coïncider le deuxième rayon avec $E_{\pm\varepsilon}B$; enfin pour l'élément




$E_0$ soient $\sphericalangle PAE_0 = \sphericalangle MBE_0 = i$ et $AE_0 = h \sec i = a$, $BE_0 = H \sec i = b$. Dans ce cas on reçoit des triangles $AE_0E_{\pm\varepsilon}$ et $BE_0E_{\pm\varepsilon}$ l'équation

$$\frac{a \sin\alpha}{\cos(i+\alpha)} = \frac{b \sin\beta}{\cos(i-\beta)},$$

ou puisque $\beta = 2\varepsilon - \alpha$,

$$b(\cos i \operatorname{ctg}\alpha - \sin i) = a[\cos i \operatorname{ctg}(2\varepsilon - \alpha) + \sin i],$$

ou

$$\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{a}{\operatorname{tg}(2\varepsilon-\alpha)} = (a+b)\operatorname{tg} i$$

et enfin

$$(1) \quad [(a+b)\operatorname{tg} i - a \operatorname{tg} 2\varepsilon]\operatorname{tg}^2\alpha - (b+a)(1+\operatorname{tg} i \operatorname{tg} 2\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg} 2\varepsilon = 0,$$

ou en résolvant par rapport à $\varepsilon$

$$\operatorname{ctg} 2\varepsilon = \frac{b \operatorname{ctg} \alpha - a \operatorname{tg}(i + \alpha)}{a + b}; \tag{2}$$

en fonction de $\beta$ on a en substituant au lieu de $a$, $b$, $+\alpha$, $+\varepsilon$ resp. $b$, $a$, $-\beta$, $-\varepsilon$

$$[(b + a) \operatorname{tg} i + b \operatorname{tg} 2\varepsilon] \operatorname{tg}^2 \beta + (a + b)(1 - \operatorname{tg} i \operatorname{tg} 2\varepsilon) \operatorname{tg} \beta - a \operatorname{tg} 2\varepsilon = 0, \tag{1'}$$

et

$$\operatorname{ctg} 2\varepsilon = \frac{a \operatorname{ctg} \beta + b \operatorname{tg}(i - \beta)}{a + b}. \tag{2'}$$

De l'équation (1) resp. (1') on trouve pour l'ébranlement $+\varepsilon$ aussi que $-\varepsilon$ deux valeurs distinctes de $\alpha$ resp. $\beta$ et inversement de l'équation (2) resp. (2') pour l'angle de vision $+\alpha$ aussi que $-\alpha$ resp. $+\beta$ et $-\beta$ deux valeurs distinctes de $\varepsilon$, dont les unes correspondent à la réflexion réelle, comme pour l'élément $E_{+\varepsilon}$ et $E_{-\varepsilon}$, tandis que les autres correspondent à la prolongation d'un des rayons.

A) $d$ défini a) $h$, $H$ définis $\alpha$) Point d'observation en $A$, lumineux en $B$ et $h < H$.

I) Déterminer la figure de la surface de réflexion.

1) Dans le plan $BTM$ perpendiculaire à la surface de l'eau on a de l'équation (1)

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\alpha = 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon \gtrless 0$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha \gtrless 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^\circ$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha = \pm 90 - i$.

2) Dans le plan $BTM'$ de l'un ou de l'autre côté de la ligne $TM$ en l'angle azimutale donné $MTM'$ soient $AP' \perp P'M'$ et $BM' \perp P'M'$ on a du triangle sphérique en $T$

$$\operatorname{ctg} AP'P = \operatorname{ctg} BM'M = \sin PTP' \operatorname{ctg} ATP, \text{ où } \operatorname{tg} ATP = \frac{H - h}{d}; \tag{3}$$

alors $AP' = h' = h \operatorname{cosec} AP'P$, $BM' = H' = H \operatorname{cosec} BM'M$ et $P'M' = d' = d \sec MTM'$. L'élément réfléchissant $E_0'$ avec l'ébranlement minimum $\varepsilon_0' = 90^\circ - AP'P$ se trouve en l'angle $P'AE_0' = i'$, determiné analogiquement comme pour $E_0$. Pour l'élément $E'_{\pm\varepsilon}$ avec l'ébranlement $\pm\varepsilon$ soit $\pm\varepsilon'$ l'angle entre la normale à l'élément et celle à $P'M'$, on a du triangle sphérique en $E'_{\pm\varepsilon}$

$$\sin(90^\circ \mp \varepsilon') = \sin(90^\circ \mp \varepsilon) \cdot \operatorname{cosec} AP'P. \tag{4}$$

Ces éléments se trouvent en l'angle $\pm\alpha'$ déterminé comme pour $E_{\pm\varepsilon}$ de l'équation (1) en substituant les nouvelles valeurs $a'$, $b'$, $i'$, $\pm\varepsilon'$.

Parce que $\varepsilon' < \varepsilon$ il est aussi $\alpha' < \alpha$. Dans un plan avec $AP'P = 90^0 - \varepsilon$ il est $\alpha' = 0$.

II) De la figure de réflexion trouver l'angle maximum de l'ébranlement.

1) Dans le plan $BTM$ on trouve pour l'angle observé $PAE_{\pm\varepsilon} - PAE_0 = \pm\,\alpha$ l'ébranlement $\pm\,\varepsilon$ de l'équation (2).

2) Dans le plan $BTM'$ soit l'élément réfléchissant observé en l'angle azimutal $MPE'_{\pm\varepsilon} = \gamma'_{\pm\varepsilon}$ et en l'angle nadiral $PAE'_{\pm\varepsilon} = \delta'_{\pm\varepsilon}$.

D'abord on détermine l'angle $PTE'_{\pm\varepsilon}$ du triangle $PTE'_{\pm\varepsilon}$ par l'équation

$$\frac{PE'_{\pm\varepsilon} + PT}{PE'_{\pm\varepsilon} - PT} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma'_{\pm\varepsilon}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(PTE'_{\pm\varepsilon} - PE'_{\pm\varepsilon}T)} \text{ et } PTE'_{\pm\varepsilon} + PE'_{\pm\varepsilon}T = \gamma'_{\pm\varepsilon},$$

où

$$PT = \frac{d \cdot h}{H - h} \text{ et } PE'_{\pm\varepsilon} = h\operatorname{tg}\delta'_{\pm\varepsilon};$$

aussi que l'angle $AP'P$ par l'équation (3).

Après, parce que

$$\frac{P'E'_0}{E'_0M'} = \frac{h'}{H'} = \frac{h}{H} = \frac{PE_0}{E_0M},$$

il est $E_0E'_0 \perp P'M'$, d'où on détermine

$$TE'_0 = TE_0 \cos E_0TE'_0, \text{ où } TE_0 = TP + h\operatorname{tg} i.$$

Alors on détermine du triangle $PTE'_0$

$$PE'^2_0 = PT^2 + TE'^2_0 - 2PT \cdot TE'_0 \cos PTE'_0,$$

d'où

$$\operatorname{tg} PAE'_0 = \operatorname{tg}\delta'_0 = \frac{PE'_0}{h};$$

et

$$\sin TPE'_0 = \frac{TE'_0}{PE'_0} \cdot \sin PTE'_0,$$

d'où

$$E_0PE'_0 = \gamma'_0 = 180^0 - TPE'_0.$$

Enfin on détermine du triangle sphérique en $A$:

$$\cos E'_0AE'_{\pm\varepsilon} = \cos \pm\,\alpha' = \cos\delta'_0 \cdot \cos\delta'_{\pm\varepsilon} + \sin\delta'_0 \sin\delta'_{\pm\varepsilon} \cdot \cos(\gamma'_0 - \gamma'_{\pm\varepsilon}).$$

De $\pm\,\alpha'$ on trouve $\pm\,\varepsilon'$ par l'équation (1) avec nouvelles valeurs $a'$, $b'$, $i'$, $\pm\,\alpha'$. L'ébranlement de l'élément $E'_{\pm\varepsilon}$ est égal à $\pm\,\varepsilon$ trouvé par l'équation (4). Si l'ébranlement est $\varepsilon \leq 90^0 - ATP$, il existe un plan $BTM'$ n'ayant qu'un seul élément réfléchissant $E'_0$. Parce que les éléments $E_0$, $E'_0$ ... se trouvent sur un cercle décrit avec $E_0T$ comme diamètre, on peut calculer pour des valeurs successives de $PTE'_0$

les valeurs correspondantes de $\gamma_0'$ et $\delta_0'$ de ces valeurs afin de trouver l'élément $E_0'$ par l'observation. Alors $\varepsilon = 90 - AP'P$, où $AP'P$ on détermine de $PTE_0'$.

$\beta$) Point d'observation en $B$, lumineux en $A$, $H > h$.

I) La figure de réflexion reste la même comme en $\alpha$). On détermine l'angle $\beta$ de l'équation (1′) analogiquement comme en $\alpha$).

II) L'ébranlement $\varepsilon$ se trouve: 1) Dans le plan $BTM$ de l'équ. (2′). 2) Dans le plan $BTM'$ analogiquement comme en $\alpha$) en déterminant d'abord des données d'observation $\sphericalangle PME'_{\pm\,\epsilon} = \eta'_{\pm\,\epsilon}$ et $\sphericalangle MBE'_{\pm\,\epsilon} = \zeta'_{\pm\,\epsilon}$ du triangle $PME'_{\pm\,\epsilon}$:

$$h^2 \operatorname{tg}^2 \delta'_{\pm\,\epsilon} = PE'^2_{\pm\,\epsilon} = ME'^2_{\pm\,\epsilon} + d^2 - 2ME'_{\pm\,\epsilon} \cdot d \cos \eta'_{\pm\,\epsilon}$$

et

$$\sin \gamma'_{\pm\,\epsilon} = \sin MPE'_{\pm\,\epsilon} = \sin \eta'_{\pm\,\epsilon} \cdot \frac{ME'_{\pm\,\epsilon}}{PE'_{\pm\,\epsilon}}, \text{ où } ME'_{\pm\,\epsilon} = H \operatorname{tg} \zeta'_{\pm\,\epsilon}.$$

Dans certains cas on peut aussi trouver par l'observation l'élément $E_0'$, en calculant pour valeurs successives de $MTE_0'$ des valeurs $TME_0' = \eta_0'$ et $MBE_0' = \zeta_0'$ du triangle $TME_0'$:

$$H^2 \operatorname{tg}^2 \zeta_0' = ME_0'^2 = MT^2 + TE_0'^2 - 2MT \cdot TE_0' \cdot \cos MTE_0'$$

et

$$\sin \eta_0' = \sin MTE_0' \frac{TE_0'}{ME_0'}.$$

Alors on trouve $\varepsilon$ comme en $\alpha$).

$\gamma$) Point d'observation en $A$, lumineux en $B$, $h = H$.

I) On détermine la figure de réflexion: 1) Dans le plan $BTM$ et 2) Dans un autre plan, donné ici par l'angle $AP''P$, comme en $\alpha$).

II) L'ébranlement $\varepsilon$ se trouve: 1) Dans le plan $BTM$ comme en $\alpha$) 2) Dans un autre plan avec $P''M'' \# PM$ et $EE_0'' \perp PM$ aussi comme en $\alpha$), en déterminant d'abord des données d'observation $\sphericalangle MPE''_{\pm\,\epsilon} = \gamma''_{\pm\,\epsilon}$ et $\sphericalangle PAE''_{\pm\,\epsilon} = \delta''_{\pm\,\epsilon}$

$$E_0 E_0'' = h \operatorname{tg} \delta''_{\pm\,\epsilon} \cdot \sin \gamma''_{\pm\,\epsilon},$$

après

$$\operatorname{tg} \gamma_0'' = \operatorname{tg} MPE_0'' = \frac{E_0 E_0''}{PE_0}, \quad h \operatorname{tg} \delta_0'' = PE_0'' = PE_0 \cdot \sec \gamma_0''$$

et

$$\operatorname{tg} AP''P = \frac{h}{EE_0''}.$$

On peut ici aussi trouver l'élément $E_0''$, en calculant pour des $\gamma_0''$ les $\delta_0''$ et enfin on détermine $\varepsilon = 90^0 - AP''P$ ou $AP''P$ comme ci-dessus.

b) Une hauteur ou toutes les deux $= 0$.

$\alpha$) Point d'observation en $B$, lumineux en $P$, $h = 0$.

I) Trouver la figure de réflexion.

1) Dans le plan $BPM$ on trouve de l'équ. (1'), en substituant $a = 0$

$$(5) \qquad (\operatorname{tg} i + \operatorname{tg} 2\varepsilon)\operatorname{tg}^2\beta + (1 - \operatorname{tg} i \operatorname{tg} 2\varepsilon)\operatorname{tg}\beta = 0;$$

donc

$\operatorname{tg}\beta_1 = 0$, $\operatorname{tg}\beta_2 = -\operatorname{ctg}(i + 2\varepsilon)$, d'où $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \mp 90^0 + (i + 2\varepsilon)$

En comptant les angles $\beta$ de la ligne $BP$ avec $\operatorname{tg} MBP = \operatorname{tg} i = \frac{d}{H}$, on trouve:

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\beta_1 = 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon < +\frac{90^0 - i}{2}$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\beta_1 = 0$

et si l'ébranlement atteind $\varepsilon > \frac{90 - i}{2}$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\beta_1 = 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon > +\frac{90^0 - i}{2}$, les éléments réflechissants sont visibles jusqu'à $\beta_2 > 0$

et si l'ébranlement atteind $\varepsilon < -\frac{90^0 + i}{2}$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\beta_2 < 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^0$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\beta_2 = \pm 90^0 + i$.

2) Dans un plan $BPM'$ la recherche est identique, en déterminant premièrement $\varepsilon'$ analogiquement comme en $a)$ $\alpha)$.

Parce que $\varepsilon' < \varepsilon$, il est aussi $\beta' < \beta$. Dans un plan avec $BM'M = 90^0 - \varepsilon$ il est $\beta' = 0$.

II) L'ébranlement $\varepsilon$ on trouve 1) Dans le plan $BPM$ de l'angle donné $\beta$ de l'équ. (5)

$$\varepsilon = \frac{\pm 90 - i + \beta}{2}$$

Si l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\beta = 0$, l'ébranlement $\varepsilon$ peut être de 0 jusqu'à $\frac{90^0 - i}{2}$.

2) Dans un plan $BPM'$ on détermine d'abord l'angle $\beta'$ des données d'observation $\sphericalangle PME'_{\pm\varepsilon} = \eta'_{\pm\varepsilon}$ et $MBE'_{\pm\varepsilon} = \zeta'_{\pm\varepsilon}$ du triangle sphérique en $B$ par l'équation

$$\cos\beta' = \cos MBP \cdot \cos\zeta'_{\pm\varepsilon} + \sin MBP \cdot \sin\zeta'_{\pm\varepsilon} \cdot \cos\eta'_{\pm\varepsilon},$$

aussi que $\sphericalangle MPE'_{\pm\varepsilon}$ du triangle $MPE'_{\pm\varepsilon}$ par l'équ.

$$\frac{d + H \operatorname{tg}\zeta'_{\pm\varepsilon}}{d - H \operatorname{tg}\zeta'_{\pm\varepsilon}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\eta'_{\pm\varepsilon}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(ME'_{\pm\varepsilon}P - MPE'_{\pm\varepsilon})}, \quad ME'_{\pm\varepsilon}P + MPE'_{\pm\varepsilon} = 180^0 - \eta'_{\pm\varepsilon}$$

et $d'$, $H'$ comme en a) $\alpha$).

Après on trouve $\pm \varepsilon'$ comme ci-dessus avec la nouvelle valeur $i'$. L'ébranlement $\pm \varepsilon$ se trouve de $\pm \varepsilon'$ comme en a) $\alpha$).

Si $\varepsilon' \lesseqq 90^0 - BPM$ il y a un plan $BPM'$ tangente à la figure de réflexion avec un élément réfléchissant $P$, mais la détermination de la direction de ce plan n'est pas exacte.

$\beta$) Point d'observation en $P$, lumineux en $B$, $h = 0$.

I) La figure de réflexion reste la même comme en $\alpha$); on ne la définit pas par l'angle constante $\alpha = 90^0 - i$, mais par la distance de l'élément réfléchissante

$$PE_{\pm\varepsilon} = d - H \operatorname{tg}(i - \beta).$$

II) L'ébranlement $\pm \varepsilon$ se trouve comme en $\alpha$), en déterminant $\beta$, si l'on connaît $PE_{\pm\varepsilon}$ par l'observation, comme ci-dessus.

Dans certains cas on peut déterminer l'angle $MPE'_{\pm\varepsilon}$ du plan tangente à la figure de réflexion avec un élément réfléchissant $P$; alors on trouve $\pm \varepsilon'$ en substituant $\beta' = 0$ et enfin $\varepsilon$, comme en $\alpha$).

$\gamma$) Point d'observations en $M$, lumineux en $P$, $H = 0$, $h = 0$.

I) Pour déterminer la figure de réflexion: 1) Dans le plan vertical on substitue $i = 90^0$ dans l'équ. (5); alors $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \mp 90 + (90^0 + 2\varepsilon)$.

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, les éléments réfléchissants sont visibles sur toute la ligne $MP$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon \gtrless 0$, les éléments réfléchissants sont visibles sur toute la ligne $MP$, et surtout en $M$ et $P$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^0$, les éléments réfléchissants sont visibles sur toute la ligne $MP$, et surtout en $M + \infty$, $P - \infty$.

2) Dans le plan de la surface de l'eau les éléments réfléchissants sont visibles partout seulement si l'ébranlement est $\varepsilon = \pm 90^0$.

II) Il est possible de déterminer seulement l'ébranlement $\varepsilon = \pm 90^0$ inversement de la figure de réflexion.

B) $d = 0$ a) $h$, $H$ définis; $h \lesseqgtr H$, point d'observation en $A$, lumineux en $B$.

I) On détermine la figure de réflexion identiquement dans tous les plans passants par $A$ et $B$ de l'équ. (1) en substituant $i = 0$, $a = h$, $b = H$

$$h \operatorname{tg} 2\varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha + (H + h) \operatorname{tg} \alpha - H \operatorname{tg} 2\varepsilon = 0. \tag{6}$$

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\alpha = 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon \gtrless 0$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha \gtrless 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^0$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha = \pm 90^0$.

II) On trouve l'ébranlement $\pm\varepsilon$ de l'équ. (2)

$$\operatorname{ctg}^2\varepsilon = \frac{H\operatorname{ctg}\alpha - h\operatorname{tg}\alpha}{h+H}.$$

b) Une hauteur ou toutes les deux $= 0$. $\alpha$) Point d'observation en $A$, lumineux en $P$, $H = 0$.

I) On trouve la figure de réflexion de l'équ. (6)

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -\operatorname{ctg}2\varepsilon,$$

d'où

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \mp 90^0 + 2\varepsilon.$$

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\alpha = 0$,
si l'ébranlement atteind $\varepsilon \lesseqgtr \pm 45^0$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\alpha = 0$,
si l'ébranlement atteind $\varepsilon \gtrless \pm 45^0$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha \gtrless 0$,
si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^0$, les éléments réflechissants sont visibles jusqu'à $\alpha = \pm 90^0$.

II) L'ébranlement $\pm\varepsilon$ se trouve inversement de l'équation

$$\varepsilon = \frac{\pm 90^0 + \alpha}{2}.$$

Si $\alpha = 0$, l'ébranlement $\varepsilon$ peut être de $0^0$ jusqu'à $\pm 45^0$.

$\beta$) Point d'observation en $P$, lumineux en $A$, $H = 0$. I) La figure de réfléxion reste la même; on la définit par la distance de l'élément réfléchissant

$$PE_{\pm\varepsilon} = h\operatorname{tg}\alpha.$$

II) L'ébranlement $\pm\varepsilon$ se trouve comme en $\alpha$), si l'on connait $PE_{\pm\varepsilon}$ par l'observation.

$\gamma$) Point d'observation en $P$, lumineux aussi en $P$, $h = 0$, $H = 0$.

I) La figure de réflexion se détermine de l'équation en $\alpha$).

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, l'élément réfléchissant est visible en $P$,
si l'ébranlement atteind $\varepsilon \gtrless 0$, l'élément réfléchissant est visible en $P$,
si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^0$, les éléments réfléchissants sont visibles sur les lignes $P \pm \infty$.

II) Il est possible de trouver seulement l'ébranlement $\varepsilon = \pm 90^0$.

C) $d = \infty$ a) $h$ défini, $H = \infty$; point d'observation en $A$, lumineux en l'angle zénital $i$, dans la direction $QA$.

I) Déterminer la figure de réflexion. 1) Dans le plan normal on trouve de l'équ. (1) en la divisant par $b$ et faisant $\frac{a}{b} = 0$:

$$\operatorname{tg}i\operatorname{tg}^2\alpha - (1 + \operatorname{tg}i\operatorname{tg}2\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\varepsilon = 0;$$

donc

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}2\varepsilon \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{ctg} i, \quad \text{d'où} \quad \alpha_1 = 2\varepsilon, \quad \alpha_2 = \pm 90^0 - i.$$

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, l'élément réfléchissant est visible en l'angle $\alpha_1 = 0$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon \leqq \frac{90^0 - i}{2}$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha_1 \leqq 90^0 - i$

et si l'ébranlement atteind $\varepsilon \geqq -\frac{90^0 + i}{2}$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha_1 \geqq -(90^0 + i)$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon > \frac{90^0 - i}{2}$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha_2 = 90^0 - i$

et si lébranlement atteind $\varepsilon < -\frac{90^0 + i}{2}$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha_2 = -(90^0 + i)$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^0$, les éléments réfléchissants sont visibles jusqu'à $\alpha_2 = \pm 90^0 - i$.

2) Dans un plan quelconque $AQP'$ la recherche est identique, en déterminant premièrement $i'$ et $\varepsilon'$ comme en A) a).

II) L'ébranlement $\pm\varepsilon$ se trouve: 1) Dans le plan normal de l'angle observé $\alpha$ par l'équ.

$$\varepsilon = \pm\frac{\alpha}{2}.$$

Si les éléments réfléchissants sont visibles en l'angle $\alpha = 90^0 - i$ ou $\alpha = -(90^0 + i)$, l'ébranlement $\varepsilon$ peut être de $\frac{90^0 - i}{2}$ jusqu'à $+90^0$ ou de $-\frac{90^0 + i}{2}$ jusqu'à $-90^0$.

2) Dans un plan quelconque $AQP'$, ou tangente à la figure de réflexion, la recherche est identique, en déterminant premièrement $\alpha'$ et finalement $\varepsilon$ comme en A) a).

Les cas particuliers $i = 90^0$ et $i = 0^0$ peuvent être considérés par la même recherche.

b) $h = 0$, $H = \infty$; point d'observation en $Q$, lumineux en l'angle zénital $i$.

I) Déterminer la figure de réflexion: 1) Dans le plan normal on a comme en a)

$$\alpha_1 = 2\varepsilon, \quad \alpha_2 = \pm 90^0 - i.$$

Si l'ébranlement est $\varepsilon = 0$, l'élément réfléchissant est visible en $Q$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon < \frac{90^0 - i}{2}$, l'élément réfléchissant est visible en $Q$

et si l'ébranlement atteind $\varepsilon > -\frac{90^\circ + i}{2}$, l'élément réfléchissant est visible en $Q$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon \gtreqless \frac{90^\circ - i}{2}$, les éléments réfléchissants sont visibles sur toute la ligne $Q + \infty$

et si l'ébranlement atteind $\varepsilon \lesseqgtr -\frac{90^\circ + i}{2}$, les éléments réfléchissants sont visibles sur toute la ligne $Q - \infty$,

si l'ébranlement atteind $\varepsilon = \pm 90^\circ$, les éléments réfléchissants sont visibles sur toute la ligne $Q \pm \infty$.

2) Dans un plan quelconque $AQP'$ la recherche est identique, en déterminant premièrement $i'$ et $\varepsilon'$ comme en A) a).

II) Pour trouver l'ébranlement $\pm \varepsilon$ on a: 1) Dans le plan normal il est possible de déterminer seulement l'ébranlement $\varepsilon = \frac{90^\circ - i}{2}$ et $\varepsilon = -\frac{90^\circ + i}{2}$ inversement de la figure de réflexion.

2) Dans le plan $AQP'$ limitant la figure de réflexion on trouve $\varepsilon'$ de $i'$ comme ci-dessus, en déterminant premièrement $i'$ et finalement $\varepsilon$ comme en A) a). Les cas particuliers $i = 0^\circ$ et $i = 90^\circ$ peuvent être aussi considérés par la même recherche.

Il semble qu'il serait possible au bord de la mer dans certains cas par l'observation de la figure de réflexion, provenant d'une source de lumière, telle qu'une lanterne marine éloignée, ou immédiatement proche, ou aussi du soleil et d'un autre astre, de trouver le dégré d'ébranlement des ondes en pleine mer, et d'ajouter par cela un élément, intéressant pour la Navigation, aux autres, donnés par les observations en Météorologie.

Odessa 1902.

---

# Über die dichteste Lagerung gleicher Kreise in einem Kreise.

Von Otto Biermann in Brünn.

Den Anlaß zu folgenden Erörterungen hat die Frage gegeben, welcher Raum von regelmäßig verteilten Poren eingenommen wird.[1]

Es sei die Aufgabe gestellt, in einem endlichen kreisförmigen Bereich $B$ eine bestimmte vorgegebene Anzahl $n$ $(n > 2)$ gleichgroßer Kreisflächen so zu legen, daß sie einander berühren, aber die Be-

1) Vgl. Darapsky, Über die Enteisenung von Grundwasser, Leipzig 1905.

grenzung keiner Fläche die einer anderen oder die Begrenzung von $B$ schneidet und so daß ein möglichst kleiner Teil von $B$ unbedeckt bleibt.

Der Bereich $B$ sei die Kreisfläche vom Radius $R$ und durch den Mittelpunkt lege man zwei rechtwinklige Koordinatenachsen, eine $x$- und $y$-Achse, so daß die Gleichung der Begrenzung von $B$ heißt:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Legt man ferner um einen beliebigen Punkt $(p_1, q_1)$ des Bereiches $B$, so daß $p_1^2 + q_1^2 < R^2$ ist, einen Kreis $r$, doch so, daß auch

$$p_1^2 + q_1^2 \leqq (R - r)^2$$

ist, und wählt auf diesem einen Punkt $(a_1', a_1'')$, so ist

$$(p_1 - a_1')^2 + (q_1 - a_1'')^2 - r^2 = 0.$$

Macht man aber den Punkt $(a_1', a_1'')$ zum Berührungspunkt des um $(p_1, q_1)$ gelegten Kreises $r$ und eines gleichgroßen zweiten Kreises um die Stelle $(p_2, q_2)$, deren Koordinaten wieder die Beziehung erfüllen sollen

$$p_2^2 + q_2^2 \leqq (R - r)^2,$$

so ist auch

$$(p_2 - a_1')^2 + (q_2 - a_1'')^2 - r^2 = 0,$$

und die Subtraktion der letzten von der drittletzten Gleichung liefert:

$$(p_2 - p_1)(2a_1' - p_2 - p_1) + (q_2 - q_1)(2a_1'' - q_2 - q_1) = 0.$$

Hier schließt man, daß jedesmal, wenn

$$2a_1' = p_1 + p_2$$

ist, auch

$$2a_1'' = q_1 + q_2$$

gelten müsse, weil der Berührungspunkt der beiden Kreise in die Mitte ihrer Zentren fällt.

In der Tat, wäre nämlich $q_2 - q_1 = 0$, so müßte der Berührungspunkt der beiden Kreise die Ordinate

$$a_1'' = q_1$$

haben, und es wäre auch jetzt

$$2a_1'' - q_1 - q_2 = 0,$$

was behauptet war.

Zugleich mit $p_1 = p_2$ ist auch

$$2a_1' - p_1 - p_2 = 0$$

und danach besteht entsprechend dem Vorkommen des Berührungspunktes $(a_1', a_1'')$ außer den früheren zwei Gleichungen noch die dritte

$$2a_1' - p_1 - p_2 = 0.$$

Machen wir auf dem zweiten Kreise um $(p_2, q_2)$ eine Stelle $(a_2', a_2'')$ zum Berührungspunkt dieses Kreises und eines dritten $r$ um die Stelle $(p_3, q_3)$, deren Koordinaten die Bedingung erfüllen

$$p_3^2 + q_3^2 \leqq (R - r)^2,$$

so findet diese Aussage wieder in dem Bestande der folgenden drei Gleichungen ihren Ausdruck:

$$(a_2' - p_2)^2 + (a_2'' - q_2)^2 - r^2 = 0,$$
$$(a_2' - p_3)^2 + (a_2'' - q_3)^2 - r^2 = 0,$$
$$2a_2' - p_2 - p_3 = 0.$$

So gehen wir $(n - 1)$-mal weiter und schließlich lassen wir entsprechend der Minimumsaufgabe einen Kreis $r$, dessen Mittelpunktskoordinaten $p_n, q_n$ die Bedingung erfüllen

$$p_n^2 + q_n^2 \leqq (R - r)^2,$$

mit dem ersten Kreise um $(p_1, q_1)$ an der Stelle $(a_n', a_n'')$ in Berührung treten, setzen also die drei Gleichungen fest:

$$(a_n' - p_n)^2 + (a_n'' - q_n)^2 - r^2 = 0,$$
$$(a_n' - p_1)^2 + (a_n'' - q_1)^2 - r^2 = 0,$$
$$2a_n' - p_n - p_1 = 0;$$

und so haben wir, was rascher auszusagen gewesen wäre, $3n$ Gleichungen und $n$ Forderungen

$$p_\nu^2 + q_\nu^2 \leqq (R - r)^2, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

deren erste den Bestand der Ungleichung

$$p_1^2 + q_1^2 < R^2$$

mit sich bringt, so daß diese nicht besonders genannt werden muß.

Nun wähle man den von den Mittelpunktskoordinaten und denen der Berührungspunkte der Kreise abhängig zu setzenden Radius $r$ derart, daß

$$R^2\pi - nr^2\pi$$

ein Minimum wird.

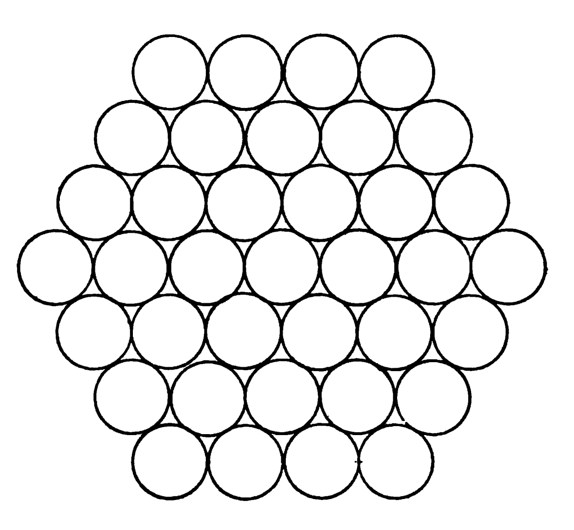
Zur Behandlung dieser Aufgabe ist nun aber noch abzuzählen, wie viel Bedingungen an die $3n$ die $n$ Kreise bestimmenden Stücke zu

knüpfen sind, damit jeder Kreis mindestens zwei andere berühre, aber keiner einen anderen schneide und dem Bereiche $B$ angehöre.

Wenn man beachtet, daß ein Kreis höchstens von sechs ihm gleichen einander nur berührenden Kreisen berührt werden kann, so ist die letzte Aufgabe einfach zu erledigen, sobald man die Anzahl der in den Bereich $B$ zu legenden Kreise in der besonderen Form wählt:

$$n = 1 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + \cdots + (\nu - 1)6 = 1 + 3\nu(\nu - 1).$$

Denn nun kann man die $n$ gleichen Kreise so anordnen, daß jeder, abgesehen von den äußersten, von sechsen umgeben wird, keiner einen anderen oder den Kreis $R$ schneidet, wenn der erste und diejenigen sechs, deren Mittelpunkte von dem des ersten gleich weit und am weitesten entfernt sind, innerhalb $B$ liegen oder die Begrenzung von $B$ nur berühren.



In der Tat (siehe Figur) kann man zunächst einen ersten Kreis mit einem noch unbestimmt gelassenen Radius $r$ um die innerhalb $B$ befindliche Stelle $(p_1, q_1)$ mit sechs gleichen und untereinander in Berührung stehenden Kreisen umgeben. Dazu sind $3 \cdot 6$ Bedingungen erforderlich.

Soll ferner jeder dieser sechs Kreise von je sechs gleichen einander berührenden umgeben werden, so hat man auf den Seiten eines um die früheren $1 + 6$ Kreise gelegten regelmäßigen Sechseckes, dessen Seiten den Verbindungslinien der Mittelpunkte aufeinander folgender der letzten sechs Kreise parallel sind, zweimal sechs Kreise $r$ so anzubringen, daß sechs je zwei und sechs je einen der letzten sechs Kreise berühren. Hierzu sind $3 \cdot 2 \cdot 6$ neue Bedingungen zu erfüllen.

Man kann sie so treffen, daß jeder von den den ersten Kreis berührenden sechsen von sechs Kreisen umgeben wird, unter den neuen Kreisen nur einander berührende vorkommen und kein neuer Kreis und um so weniger ein früherer den Kreis $R$ schneidet, wenn der Mittelpunkt $(p_1, q_1)$ des ersten Kreises und wenn die Mittelpunkte der

sechs von $(p_1, q_1)$ gleich weiten und entferntesten Kreise dem Bereich angehören, wo

$$x^2 + y^2 \leqq (R - r)^2$$

ist.

Damit ebenso jeder der $(\nu - 2)6$ Kreise, deren Mittelpunkte auf den früheren Sechseckseiten parallelen Seiten eines $(\nu - 2)$ten regelmäßigen Sechseckes liegen, von je sechs Kreisen umgeben werde, hat man noch $3(\nu - 2)6$ neue Bedingungen gelten zu lassen. Und man sieht, daß die $6(\nu - 1)$ Kreise, deren Mittelpunkte auf dem äußersten $(\nu - 1)$sten Sechsecke liegen, und gar keiner der $n$ Kreise den Kreis $R$ schneidet, wenn die sechs Kreise, deren Mittelpunkte gleiche und die größten Entfernungen von der Stelle $(p_1, q_1)$ besitzen, dem Bereiche $B$ angehören oder die Begrenzung nur berühren.

Man hat also

$$1 + 6 + 3 \cdot 6 \cdot (1 + 2 + \cdots + \overline{\nu - 2}) = 1 + 6 + 9(\nu - 1)(\nu - 2)$$

an die Koordinaten der Mittelpunkte und der Berührungspunkte zu knüpfende Forderungen und ist

$$3n = 3 + 9\nu(\nu - 1)$$

die $n$ Kreise bestimmende Konstante. Doch weil die zweite Zahl größer ist als die erste, wenn, was wir voraussetzen, $\nu > 1$ ist, d. h. weil nicht zu viele Forderungen gestellt sind, so kann man wirklich $n$ gleiche Kreise den Forderungen entsprechend anbringen und hat die Möglichkeit die Lagrangesche Vorschrift zur Ermittelung des Minimums von

$$R^2\pi - n r^2 \pi$$

anzuwenden, wo zu bemerken ist, daß die Rechnung zur Bildung eines extremen Wertes einer Funktion jetzt, wo Ungleichungen statt, wie in dem Falle von Lagrange, Gleichungen als Nebenbedingungen vorgegeben sind, gerade so durchzuführen ist, denn die Differentiation der Ungleichungen liefert Beziehungen, wie sie anschließend an Gleichungen in dem Lagrangeschen Schema vorkommen.

Beachtet man endlich, daß von einer Kreisfläche $R$ durch sieben gleiche eingeschriebene Kreisflächen dann am meisten bedeckt wird, wenn sechs derselben die siebente um den Mittelpunkt des Kreises $R$ umgeben und die Begrenzung des letzten von innen berühren, so daß der Radius jeder der sieben Kreisflächen $\frac{R}{3}$ ist, so wird man im allgemeinen Falle die Stelle $(p_1, q_1)$ in den Mittelpunkt des Kreises $R$ legen und

$$R = (1 + 2(\nu - 1))r = (2\nu - 1)r$$

setzen, also weil

$$\nu^2 - \nu = \frac{n-1}{3}, \quad \nu = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{4n-1}{3}}\right)$$

ist,

$$r = \frac{R}{2\nu - 1} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{4n-1}}.$$

Drei einander berührende unserer gleichen Kreise $r$, deren Mittelpunkte in den Ecken eines gleichseitigen Dreieckes von der Seitenlänge $2r$ liegen, umschließen einen Zwickel von der Größe

$$\frac{2r}{2}\sqrt{3}\,r - 3\frac{r}{2}\frac{r\pi}{6} \equiv r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

und von den $n$ Kreisen werden

$$6[1 + (2\cdot 1 + 1) + \cdots + ((\nu - 2)\cdot 2 + 1)] = 6(\nu - 1)^2$$

Zwickel umschlossen.

Endlich die Größe des unseren $n$ Kreisen umschriebenen regelmäßigen Sechseckes wird, wenn die vom Mittelpunkte $(p_1, q_1)$ entferntesten Punkte die Entfernung $d$ besitzen,

$$3\frac{\sqrt{3}}{2}d^2.$$

Nunmehr lassen wir $\nu$ unendlich werden und suchen das Verhältnis der von den unendlich vielen einander berührenden gleichen Kreisflächen $r$ bedeckten Fläche zu der unendlichen Ebene, die wir aus dem den $n$ Kreisen umschriebenen regelmäßigen Sechsecke hervorgehen lassen.

Dieses Verhältnis wird, weil $d = R$ zu setzen ist:

$$\frac{n r^2 \pi}{\frac{3}{2}\sqrt{3}\,R^2} = \frac{\pi}{4} : \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

also näherungsweise 7852 : 8660 = 0,90, und eben dieses Verhältnis findet man in der Arbeit von Minkowski über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper, denn in unserem Falle der dichtesten Lagerung von gleichen Kreisen in der Ebene bilden die Mittelpunkte ein parallelogrammatisches Punktsystem.[1])

Es ließe sich nun auch eine unserer Forderung entsprechende Anordnung von $n$ Kreisen geben, wenn $n = 1 + 3\nu(\nu - 1) + \mu$ ist, wo $\mu$ eine von null verschiedene ganze Zahl bedeutet. Doch in diesem Falle wird die Stelle $(p_1, q_1)$ nicht in den Mittelpunkt des Bereiches $B$ zu legen sein, und ferner ist die Lösung darum nicht bestimmt, weil

1) Göttinger Nachrichten 1904, S. 331.

alle gegenüber den verschiedenen Seiten des Sechseckes symmetrischen Lösungen gleichberechtigt sind.

Die Drehung um den Mittelpunkt des Kreises $R$ ist jetzt wie im früheren Falle gestattet.

Es wäre ferner auch naheliegend, das Verhältnis des von gleichen einander berührenden Kugeln umschlossenen Raumes, in dem zwölf Kugeln um jede einzelne gelegt werden können, zu dem unendlichen Raume zu suchen. Doch man findet in der genannten Arbeit dieses Verhältnis gleich

$$\frac{\pi}{6} : \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d. i. näherungsweise 6235 : 7071 = 0.88.

Diese Angabe ist wegen der eingangs erwähnten Frage nach dem Raume, der von regelmäßig verteilten Poren eingenommen wird, von Bedeutung.

---

## Das Potential einer leitenden Kreisscheibe[1]).

Von R. Gans in Tübingen.

Um das Potential einer leitenden, elektrisch geladenen Kreisscheibe zu bestimmen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen:

1. Man bestimme das Potential eines abgeplatteten Rotationsellipsoids und lasse die Rotationsachse unendlich klein werden. Zu diesem Zwecke führe man die krummlinigen Koordinaten ein

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{\sigma^2+1}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi \\ y &= a\sqrt{\sigma^2+1}\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi \\ z &= a\sigma\mu. \end{aligned} \tag{1}$$

$\sigma$ läuft von 0 bis $\infty$, $\mu$ von $-1$ bis $+1$, $\varphi$ von 0 bis $2\pi$. $\sigma = \text{const}$ ist eine Schar konfokaler Rotationsellipsoide mit der Exzentrizität $a$, $\mu = \text{const.}$ ist die hierzu orthogonale Schar konfokaler Rotationshyperboloide, $\varphi = \text{const}$ die Schar der Meridianebenen.

Führt man $\sigma$, $\mu$, $\varphi$ als unabhängige Variable in die Laplacesche

1) Gelegentlich der Besprechung der früheren Arbeit des Herrn Gans (Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 49, S. 298) in den Fortschritten der Mathematik hatte Herr Wangerin die Richtigkeit eines dort abgeleiteten Resultats beanstandet. Wie Herr Wangerin der Redaktion mitteilt, beruht diese Beanstandung auf einem Versehn. Herr Wangerin hat sich inzwischen auf einem von der Gansschen Ableitung ganz verschiedenen Wege von der Richtigkeit jenes Resultats überzeugt.

Die Redaktion.

Gleichung ein, berücksichtigt, daß das Potential $V$ aus Symmetriegründen von $\varphi$ unabhängig ist und benutzt die Methode der Partikularlösungen, so ergibt sich, daß $V$ die Form haben muß

$$(2)\qquad V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu)\, Q_n(i\sigma).$$

Hier bedeutet $P_n(\mu)$ die Kugelfunktion erster Art $n$. Ordnung vom Argument $\mu$, $Q_n\,(i\sigma)$ die Kugelfunktion zweiter Art $n$. Ordnung vom Argument $i\sigma$. Die Abhängigkeit von $\sigma$ muß durch die Kugelfunktion *zweiter* Art ausgedrückt werden, damit $V$ im Unendlichen verschwindet wie $1/R$.

Da nun $V$ auf der leitenden Oberfläche, d. h. für $\sigma = \sigma_0$ nicht mehr von $\mu$ abhängen soll, so müssen alle $A_n = 0$ sein außer $A_0$. Es ist aber $P_0(\mu) = 1$; $i Q_0(i\sigma) = 2 \operatorname{arc\,ctg} \sigma$, wo $\operatorname{arc\,ctg} \sigma < \pi/2$[1]), also ist

$$(3)\qquad V = 2 A_0 i \operatorname{arc\,ctg} \sigma.$$

Für $\sigma = \infty$ folgt $\sigma = R/a$, $\operatorname{arc\,ctg} \sigma = a/R$, wenn $R$ den Abstand vom Koordinatenursprung bedeutet. Ist die Ladung $M$ auf der Scheibe, so wird $V = \frac{M}{R}$ im Unendlichen, also muß

$$(4)\qquad 2 A_0 i = \frac{M}{a}$$

sein. Damit folgt aus (3)

$$(5)\qquad V = \frac{M}{a} \operatorname{arc\,ctg} \sigma.$$

Aus (1) drückt sich $\sigma$ durch $z$ und $r^2 = x^2 + y^2$ aus, und wir haben

$$(6)\qquad V = \frac{M}{a} \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{z^2}{a^2}}} < \frac{M}{a}\frac{\pi}{2},$$

wo beide Wurzeln mit dem + Zeichen verstanden sind.

Diese Formel gab ich gelegentlich bei der Untersuchung einer Frage über Nobilische Farbenringe[2]) an und stellte sie einem Ausdruck gegenüber, der von H. Weber[3]) abgeleitet worden ist. Man findet ihn folgendermaßen:

2. Man gehe direkt von der Kreisscheibe vom Radius $a$ aus, führe Zylinderkoordinaten $r$, $z$, $\varphi$ in die Gleichung $\Delta V = 0$ ein und berücksichtige, daß $V$ von $\varphi$ unabhängig ist. Dann erhält man

$$(7)\qquad V = \int_0^{\infty} \mathfrak{f}(\alpha)\, e^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\, d\alpha.$$

1) cf. z. B. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen. 2. Aufl. 1878 Bd. 1, S. 162.
2) R. Gans, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 49 (1903) S. 298, Formel (22).
3) H. Weber, Partielle Differentialgleichungen d. math. Phys. Bd. 1, (1900) S. 329.

$J_0(\alpha r)$ bedeutet die Besselsche Funktion erster Art 0. Ordnung vom Argument $\alpha r$. $\mathfrak{f}(\alpha)\,d\alpha$ entspricht dem $A_n$ in (2). Da den Werten von $\alpha$ keine Beschränkung auferlegt ist, wird die Summation eine Integration von 0 bis $\infty$, während in (2) $n$ aus Stetigkeitsgründen eine ganze Zahl sein mußte.

$\mathfrak{f}(\alpha)$ muß so bestimmt werden, daß $V$ konstant ist für $z = 0$ und $r < a$. Das läßt sich bewerkstelligen mit Hilfe eines von H. Weber[1]) abgeleiteten bestimmten Integrals. Es zeigt sich, daß

$$\mathfrak{f}(\alpha) = \frac{M}{a} \cdot \frac{\sin a\alpha}{\alpha} \tag{8}$$

sein muß.

Es folgt also

$$V = \frac{M}{a}\int_0^\infty e^{-\alpha z}\frac{\sin a\alpha}{\alpha}J_0(\alpha r)\,d\alpha. \tag{9}$$

Es fragt sich nun, wie man die Identität von (6) und (9) nachweisen kann. Das soll im folgenden ausgeführt werden.

3. Ersetzt man in dem Ausdruck $\int_0^\infty e^{-p\alpha}J_0(\alpha r)\,d\alpha$ $J_0(\alpha r)$ durch das bestimmte Integral

$$J_0(\alpha r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-i\alpha r\cos\omega}\,d\omega \tag{10}$$

und vertauscht die Integrationsfolge, so ergibt sich[2])

$$\int_0^\infty e^{-p\alpha}J_0(\alpha r)\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\omega\int_0^\infty e^{-\alpha(p+ir\cos\omega)}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{p+ir\cos\omega} = \frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}}. \tag{11}$$

Multiplizieren wir die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-p\alpha}J_0(\alpha r)\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}} \tag{11}$$

beiderseits mit $dp$ und integrieren von 0 bis $p$, so haben wir, wenn wir links die Integrationsfolge vertauschen,

$$\int_0^\infty d\alpha\,J_0(\alpha r)\int_0^p e^{-p\alpha}dp = -\int_0^\infty \frac{e^{-p\alpha}}{\alpha}J_0(\alpha r)\,d\alpha + \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha}\,d\alpha \tag{12}$$

1) H. Weber l. c. p. 187ff.

2) vgl. H. Weber l. c. p. 186.

und rechts

(13) $$\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{p^2+r^2}} = lg \frac{p+\sqrt{p^2+r^2}}{r}.$$

Setzen wir $p = z + ai$, so folgt durch Gleichsetzung von (12) und (13)

(14) $$-\int_0^\infty e^{-(z+ai)\alpha} J_0(\alpha r)\, d\alpha + \int \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha} d\alpha = lg \frac{z+ai+\sqrt{(z+ai)^2+r^2}}{r}.$$

Der imaginäre Teil links ist das in (9) vorkommende Integral. Rechts nennen wir die komplexe Zahl unter dem $lg$ Zeichen $u + vi$; dann ist der imaginäre Teil $\operatorname{arc\,ctg} \frac{u}{v}$.

Wir setzen

$$\sqrt{(z+ai)^2+r^2} = g + hi,$$

d. h.

(15) $$z^2 + r^2 - a^2 = g^2 - h^2$$

(16) $$az = gh,$$

also

(17) $$g = \sqrt{\frac{z^2+r^2-a^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{z^2+r^2-a^2}{2}\right)^2 + a^2 z^2}}.$$

Nun ist $u = \frac{z+g}{r}$ und $v = \frac{a+h}{r}$ wegen (14), also

$$\frac{u}{v} = \frac{z+g}{a+h} = \frac{g}{a}$$

wegen (16), d. h. der imaginäre Teil der rechten Seite von (14) ist

$$\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{z^2+r^2-a^2}{2a^2} + \sqrt{\left(\frac{z^2+r^2-a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{z^2}{a^2}}}.$$

Damit ist die Identität von (6) und (9) erwiesen.

Tübingen, Physikal. Institut 28. März 1906.

---

# Kleinere Mitteilungen.

## Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik und Physik 1907.

Académie Royale de Belgique. 1. On peut assimiler au phénomène de la déliquescence proprement dite divers phénomènes d'absorption de gaz ou de vapeurs par des solides ou des liquides, tels que l'absorption du gaz sulfureux $SO_2$ par le camphre et l'acétone, du gaz ammoniac $NH_3$ par divers sels ammoniacaux, surtout le nitrate, du gaz chlore par le trichlorure d'antimoine, etc., etc. On demande de compléter nos connaissances sur les faits de ce genre par de nouvelles recherches méthodiquement instituées. — Preis 1000 Frs.

2. (Wiederholt aus dem J. 1905.) Trouver, en hauteur et en azimut, les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale, dans l'hypothèse de la non-coincidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres. — Preis (erhöht) 800 Frs.

3. On demande de nouvelles recherches sur le siège de la pression osmotique. — Preis 600 Frs.

Die Arbeiten dürfen noch nicht veröffentlicht und müssen leserlich geschrieben sein. Sie können in französischer, flämischer oder lateinischer Sprache abgefaßt sein. Sie sind vor dem 1. August 1907 an den ständigen Sekretär der Akademie in Brüssel (à M. le Secrétaire perpétuel, au Palais des Académies, Bruxelles) einzusenden.

## Auskunft

auf die Anfrage im laufenden Bd. dieser Zeitschrift, S. 287.

**v. B., R.** Die Verwaltung der Bibliothek der Marineakademie und -Schule in Kiel teilt uns mit, daß die *Tafeln der natürlichen Logarithmen* von Dase, Wien 1850, dort vorhanden sind und leihweise entnommen werden können. Ferner schreibt uns Herr Dr. H. Clemens in Berlin-Friedenau, daß die Annalen der k. k. Sternwarte in Wien, aus deren 34. Teil (14. Bd. Heft 1 der 2. Reihe, 1851) die fraglichen Tafeln abgedruckt sind, sich auf jeder Sternwarte befinden.

# Bücherschau.

**W. Foerster, Astrometrie oder die Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume zugleich als Grundlage aller Zeit- und Raummessung.** Erstes Heft: Die Sphärik und die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnungen und die sphärischen Koordinatenmessungen. 8°. 160 S. Berlin, G. Reimer 1905.

Das Vorwort dieser Schrift definiert die Astrometrie (neben Astromechanik und Astrophysik) „als Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume oder von den Maßbestimmungen der makrokosmischen Konfigurationen

und ihrer Veränderungen"; sie „hat zugleich die Aufgabe, solche Konfigurationsänderungen oder -bewegungen, welche durch die besondere Einfachheit und Stetigkeit ihres Verlaufs sich zum Grundmaße aller anderen Bewegungserscheinungen eignen, aufzusuchen, zu erforschen und für die Maßbestimmung aller Bewegungen zu verwerten". Es lag nicht in des Verfassers Absicht, ein neues Lehrbuch der sphärischen Astronomie zu schreiben, er wollte vielmehr in „kritischem und erkenntnistheoretischem Sinne die ganze Aufgabe behandeln, indem auf Vollständigkeit im einzelnen und besonders in den numerischen Angaben" verzichtet wurde.

Neben dem didaktischen Zweck, den das Buch in meist neuartiger Weise verfolgt, bietet es weiter zahlreiche Betrachtungen und Entwickelungen, die von denen der gebräuchlichen Lehrbücher abweichen.

Ein erster Abschnitt von 15 Seiten Umfang behandelt unter der Überschrift „die Sphärik" wesentlich die Grundzüge der Winkelmessung und die Bedeutung der sphärischen Trigonometrie. Der zweite kürzeste Abschnitt — er nimmt nur $5\frac{1}{2}$ Seiten ein — skizziert die sphärischen Koordinatensysteme und die in ihnen geltenden Bezeichnungen. Der dritte und letzte Abschnitt ist mit 130 Seiten zugleich der längste; er lehrt die sphärischen Koordinatenmessungen und beschäftigt sich der Hauptsache nach mit dem, was man sonst wohl als Theorie der Instrumente zu bezeichnen pflegt. Besondere Aufmerksamkeit verdient hier eine Methode der Konstruktion von Tafeln zur leichteren Ermittelung der Zenitdistanz eines Gestirns. Der Vorschlag läuft darauf hinaus, bei gegebener Polhöhe die Zenitdistanzen für die festen („singulären") Azimute, Stundenwinkel oder parallaktischen Winkel $0^0$, $\pm 45^0$, $\pm 90^0$ nach einfach gebauten Formeln zu berechnen und dann den Übergang von diesen Wertgruppen auf irgend einen Punkt der Sphäre durch eine Art von Differenzformel zu bewerkstelligen. Es wäre wohl einer Diskussion wert, ob dieser Plan etwa zum Entwurf der bisher ohne rechten Erfolg angestrebten nautischen Höhentafel sich verwenden ließe, d. h. einer Tafel, die für beliebige Werte von geographischer Breite des Beobachtungsortes, Stundenwinkel und Deklination des Gestirns die Zenitdistanz des Gestirns bequemer und ebenso sicher liefert, wie dies vierstellige logarithmische Rechnung vermag. —

In einem nächsten Hefte wird Herr Foerster sich mit den durch Präzession, Nutation, Aberration, Parallaxe und Refraktion hervorgerufenen Koordinatenänderungen beschäftigen.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

---

## Neue Bücher.

### Arithmetik und Analysis.

1. Ahrens, Rich., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate und ihre spezielle Anwendung auf die Geodäsie, nebst e. Anh. v. Beispielen. Leipzig, Göschen. M. 2.
2. Bronzin, Vinzenz, Lehrbuch der politischen Arithmetik. Wien und Leipzig, Deuticke. K. 2.50; geb. K. 3.
3. Fassbinder, Ch., Théorie et pratique des approximations numériques. Paris, Gauthier-Villars.

4. Krüger, L., Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze. (Veröffentlichung des K. preußischen geodät. Instituts, neue Folge Nr. 25.) Potsdam (Leipzig, Teubner). M. 2.80.
5. Mautz..li, Sigm., Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung mathematischer Tabellen. Solothurn, Lüthy. M. 3.60.
6. Möller, Max, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Ein Beitrag. Wien, Hölder. M. —90.

## Astronomie und Geodäsie.

7. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. VI. Bd., 1. Tl. Geodäsie und Geophysik. Red. v. Ph. Furtwängler und E. Wiechert. 1. Heft. Leipzig, Teubner. M. 3 40.
8. Gauss, F. G. Trigonometrische und polygonometrische Rechnungen in der Feldmeßkunst. 3. Aufl., 2. u. 3. Heft. Halle, Strien. Je M. 3.50.
9. Klauser und Lahn, Lehrbuch der Vermessungskunde. Für den Gebrauch an Gewerbeschulen, zugleich als Hilfsbuch f. Bau- und Maschinen-Techniker usw. Bearb. u. herausg. v. Alfons Cappilleri. 3. Aufl. Wien, Deuticke. K. 3.60; geb. K. 4.
10. Newcomb, Simon, A compendium of spherical astronomy. With its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars. London, Macmillan. 12 s. 6 d.

S. auch N. 1, 4, 53.

## Darstellende Geometrie.

11. Goudie, W. J., The geometry of the screw propeller. London, Blackie. 1 s. 6 d.
12. Öttingen, Arthur von, Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte. M. 85 Abb. im Text und auf 4 Tafeln. Leipzig, Engelmann. M. 5.
13. Volk, Karl, Das Skizzieren v. Maschinenteilen in Perspektive. 2., verb. Aufl. Berlin, Springer. Geb. in Leinw, M. 1.40.

S. auch Nr. 54.

## Mechanik.

14. Caldarera, Francesco, Corso di meccanica razionale. vol. III. Palermo. L. 11.
15. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. IV. Bd., 2. Tl. 3. Heft. Leipzig, Teubner. M. 5.80.
16. Fischer, Otto, Theoretische Grundlagen f. eine Mechanik der lebenden Körper. Mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. (Teubners Sammlung Bd. 22.) Leipzig und Berlin, Teubner. Geb. in Leinw. M. 14.
17. Hollefreund, Karl, Die Elemente der Mechanik vom Standpunkte des Hamilton'schen Prinzips. (Teil II.) Progr. Luisenstädt.-Realgymn. Berlin. Berlin, Weidmann. M. 1.
18. Mohr, Otto, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin, Ernst & Sohn. M. 15; in Leinw. M. 16.50.
19. Ritter, W., Anwendungen der graphischen Statik. Nach C. Culmann bearb. 4. Tl. Der Bogen. Zürich, Raustein. M. 9.60; geb. in Leinw. M. 10.60.
20. Saussure, René de, Théorie géométrique du mouvement des corps. Fin de la 1re partie et commencement de la 2e partie. La géométrie des feuillets. (Extrait des Archives des Sciences physiques et naturelles, T. XVIII, 1904 et XXI, 1906.) Genève, Kündig.
21. Vaes, F. J., Graphostatica. II. Zwaartepunten. Deventer, Kluwer. F. 1.25.
22. Veen, H. J. van der, Graphische statiek. 2e verb. druk. Amsterdam, Veen. F. 1.90.

23. Vonderlin, J., Statik f. Hoch- und Tiefbautechniker. 3. Aufl. Bremerhaven 1905, v. Vangerow. M. 5; geb. M. 5.50.
24. Zimmermann, H., Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Mit 3 in den Text eingedruckten Abbildungen, e. Tafel und zahlreichen Tabellen. Berlin, Ernst & Sohn. M. 2.

S. auch Nr. 49, 52, 59.

## Physik.

25. Brass, Arnold, Untersuchungen über das Licht und die Farben. Osterwieck (Harz), Zickfeldt. M. 4.
26. Contributions from the Jefferson physical laboratory of Harvard University for the year 1905. vol. III. Cambridge, Mass, U. S. A.
27. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. V. Bd. Physik. 1. Tl., 3. Heft. Leipzig, Teubner. M. 5.20.
28. Fischer, Victor, Grundbegriffe und Gleichungen der mathematischen Naturwissenschaft. Leipzig, Barth. M. 4.50
29. Fleming, J. A., Elektrische Wellentelegraphie. Vier Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe v. E. Aschkinass. Leipzig und Berlin, Teubner. M. 4.20.
30. Fortschritte, die, der Physik im J. 1905. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 61. Jahrgang. 1. Abtlg. Allgemeine Physik, Akustik, physikalische Chemie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 28.
31. Grimsehl, E., Ausgewählte physikalische Schülerübungen. Leipzig, Teubner. M. —.80.
32. Gruner, Paul, Die radioaktiven Substanzen und die Theorie des Atomzerfalles. Bern, Francke. M. 1.60.
33. Holzmüller, Gustav, Die neueren Wandlungen der elektrischen Theorien einschließlich der Elektronentheorie. Zwei Vorträge. Berlin, Springer. M. 3.
34. Jäger, G., Die Fortschritte der kinematischen Gastheorie. („Die Wissenschaft" Heft 12.) Braunschweig, Vieweg & Sohn.
35. Jamin, J., Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique. 3ème supplément par M. Bouty. Radiations. Electricité, Ionisation. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 8.
36. Klimpert, Rich., Lehrbuch der Akustik. 2. Bd. Die verschiedenen Tonerreger. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearb. nach System Kleyer. Bremerhaven, v. Vangerow. M. 10; geb. M. 11.
37. Kraus, Konrad, Experimentierkunde. Anleitung zu physikalischen und chemischen Versuchen in Volks- und Bürgerschulen und Fortbildungsschulen. Wien, Pichlers Witwe & Sohn. M. 4.20; geb. M. 4.50.
38. Leon, Alfons, Über die Wärmespannungen in runden Schornsteinen. Wien und Leipzig, Fromme.
39. Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. 1. Band, 1. Lfg. Leipzig und Berlin, Teubner. M. 10.
40. Metz, G. de, La double réfraction accidentelle dans les liquides. („Scientia". Nr. 26.) Paris, Gauthier-Villars. cart. Frs. 2.
41. Müller, Friedrich C. G., Technik des physikalischen Unterrichts nebst Einführung in die Chemie. Berlin, Salle. M. 6.
42. Pernter, J. M., Meteorologische Optik, 3. Abschn. Wien, Braunmüller. M. 9.
43. Planck, Max, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig, Barth. M. 7; geb. M. 7.80.
44. Ramsay, Sir William, The gases of the atmosphere. The history of their discovery. 3 rd. ed., with portraits. London, Macmillan. 6 s.
45. J. J. Thomson, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe, unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt v. Erich Marx. Leipzig 1905/1906, Teubner.

46. TRAUTSCHOLD, M., Zur Entdeckungsgeschichte der lichtelektrischen Erscheinungen. Progr. Leipzig, Dürr. M. 2.
47. WHITEHEAD, B. N., On mathematical concepts of the material world. London, Dulau. 2 s. 6 d.
48. WOOD, ROBERT, Physical optics. London, Macmillan. 15 s.

S. auch Nr. 50, 56.

### Tafeln.

49. HAIMOVICI, EMANUEL, Graphische Tabellen und graphisch dargestellte Formeln zur sofortigen Dimensionierung von Eisenbeton-Plattendecken resp. Plattenbalken. M. 5 Lichtdrucktafeln 48/63 cm. Leipzig, Teubner. M. 15.
50. KÜSTER, F. W. Logarithmische Rechentafeln f. Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. 6., verb. u. verm. Aufl. Leipzig, Veit & Co. geb. in Leinw. M. 2.
51. MOČNIK, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 6., verm. Aufl., besorgt von Johann Reidinger. Wien, Tempsky (Leipzig, Freytag). M. 2
52. PRÖLL, R., Rechentafeln f. Schraubenfedern. Dresden, (Berlin, Springer.). M. 1.
53. WERKMEISTER, P., Graphische Tachymetertafeln f. alte Kreisteilung. Entworfen f. Entfernungen von 5 bis 500 m und f. Höhenunterschiede von 0,1 bis 70 m. Mit e. Vorwort v. E. Hammer. Stuttgart, Wittwer. Mit Zelluloidstab. M. 4.60.

S. auch Nr. 5.

### Verschiedenes.

54. LÖSCHNER, HANS, Über Sonnenuhren. Beiträge zu ihrer Geschichte und Konstruktion nebst Aufstellung e. Fehlertheorie. 2., umgearb. u. verm. Ausg. Graz, Leuschner & Lubensky. M. 7.50.
— dasselbe. Sonder-Abdr. Konstruktionen. Ebenda. M. 1.20.
55. MARTIN, W. R., Lectures on compass adjustment. London, Philip. 5 s.
56. NEUMANN, FRANZ, Gesammelte Werke. Hrsg. v. seinen Schülern. II. Bd. M. e. Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. Leipzig, Teubner. M. 36.
57. POINCARÉ, HENRI, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. u. L. Lindemann. 2., verb. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. M. 4.80.
58. POINCARÉ, HENRI, Der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber und einem Bildnis des Verfassers. Leipzig, Teubner. Geb. M. 3.60.
59. WAGENER, A., Indizieren und Auswerten von Kurbelweg und Zeitdiagrammen. Berlin, Springer. M. 3.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

BERKHAN, GUSTAV, Zur projektivischen Behandlung der Dreiecksgeometrie. Diss. Königsberg, Leipzig 1905, Teubner.

BRASS, A., Untersuchungen über das Licht und die Farben, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 25.

BRONZIN, V., Lehrbuch der politischen Arithmetik, s. N. B. 2.

CLEBSCH, ALFRED, Vorlesungen über Geometrie, bearb. und hrsg. v. Ferdinand Lindemann. 2., vermehrte Aufl. I. Bd., 1. Tl., 1. Lfg. Leipzig, Teubner. M. 16.

Contributions from the Jefferson physical laboratory of Harvard University for the year 1905. vol. III, s. N. B. 26.

Fassbinder, Ch., Approximations numériques, s. N. B. 3.

Fischer, O., Mechanik der lebenden Körper, s. N. B. 16.

Fischer, V., Grundbegriffe und Grundgleichungen der mathematischen Naturwissenschaft, s. N. B. 28.

Fleming, J. A. Elektrische Wellen-Telegraphie. s. N. B. 29.

Frischauf, J., Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. Sonderabdruck aus der Zeitschrift f. mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 36. Jahrgang. Leipzig 1905, Teubner. M. 1.

Grimsehl, E., Ausgewählte physikalische Schülerübungen, s. N. B. 31.

Grünfeld, E., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. 21. Jahresbericht der k. k. Staats-Realschule in XVIII. Gemeindebezirke von Wien.

Hahn, Hermann, Die Lehraufgaben des physikalischen und chemischen Unterrichts an den höheren Schulen Frankreichs. Wissenschaftl. Beilage zum Jahresber. des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums. Ostern 1906. Berlin, Weidmann. M. 1.

Haimovici, E., Graphische Tabellen und graphisch dargestellte Formeln, s. N. B. 49.

Hochheim, Adolf, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft 2. Die Kegelschnitte. Abtlg. 1. A. Aufgaben. 3., verm. Aufl., bearb. v. Oswald Jahn und Franz Hochheim. Leipzig und Berlin, Teubner. M. 1.80.

Hollefreund, K., Die Elemente der Mechanik . . ., II, s. N. B. 17.

Holzmüller, G., Die neueren Wandlungen der elektrischen Theorien . . ., s. N. B. 33.

Jäger, G., Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie, s. N. B. 34.

Jamin, Cours de Physique, 3ème supplément, s. N. B. 35.

Klauser und Lahn, Lehrbuch der Vermessungskunde, s. N. B. 9.

Koppe-Diekmann, Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. (23. Aufl.) Ausgabe f. Reallehranstalten. I. Teil der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. 7. Aufl. der neuen Bearbeitung, besorgt von Karl Knops. Essen, Bädeker. geb. M. 2.40.

Kraus, K., Experimentierkunde, s. N. B. 37.

Krüger, L., Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze, s. N. B. 4.

Leon, Alfons, Spannungen und Formänderungen einer um einen ihrer Durchmesser gleichmäßig sich drehenden Kreisscheibe. Wien und Leipzig, Fromme.

Léon, A., Über die Wärmespannungen in runden Schornsteinen, s. N. B. 38.

Lesser, Oskar, Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima. Berlin, Salle.

Lippmann, Alexander, Die absolute Wahrheit der Euklidischen Geometrie. Eine kritische Untersuchung der Grundlagen der Euklidischen Geometrie. Beweise f. die Wahrheit der Axiome und Postulate, insbesondere f. die des Parallelenaxioms (V. Postulat Euklids). Leipzig, Gerstäcker.

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik, s. N. B. 39.

Loria, Gino, Vergangene und künftige Lehrpläne. Rede, gehalten zu Mailand den 22. April 1905. Autorisierte Übersetzung von H. Wieleitner, Leipzig, Göschen.

Metz, G. de, La double réfraction . . ., s. N. B. 40.

Močnik, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 51.

Möller, M., Abgekürzte Dezimalbruchrechnung, s. N. B. 6.

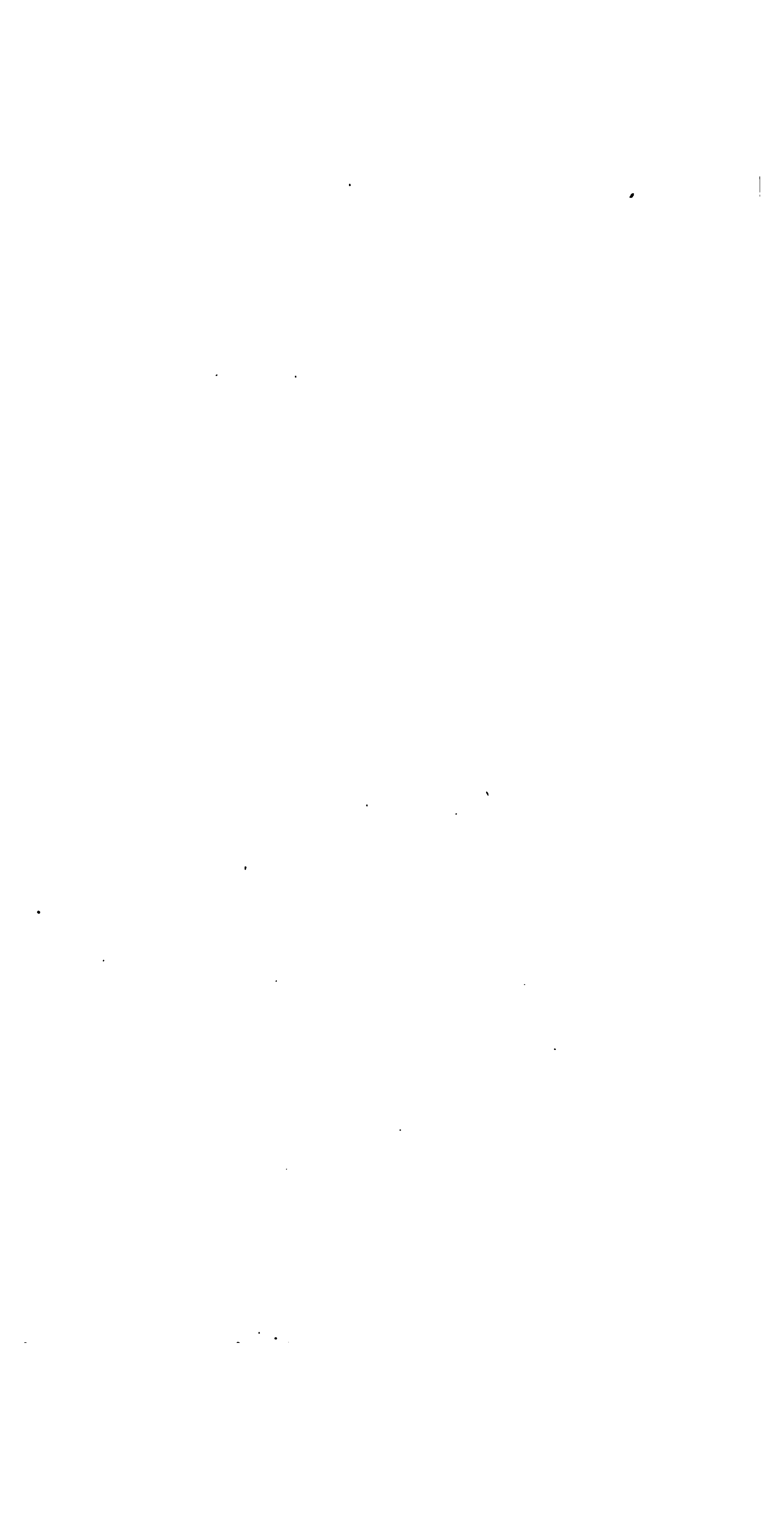
Mohr, O., Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, s. N. B. 18.

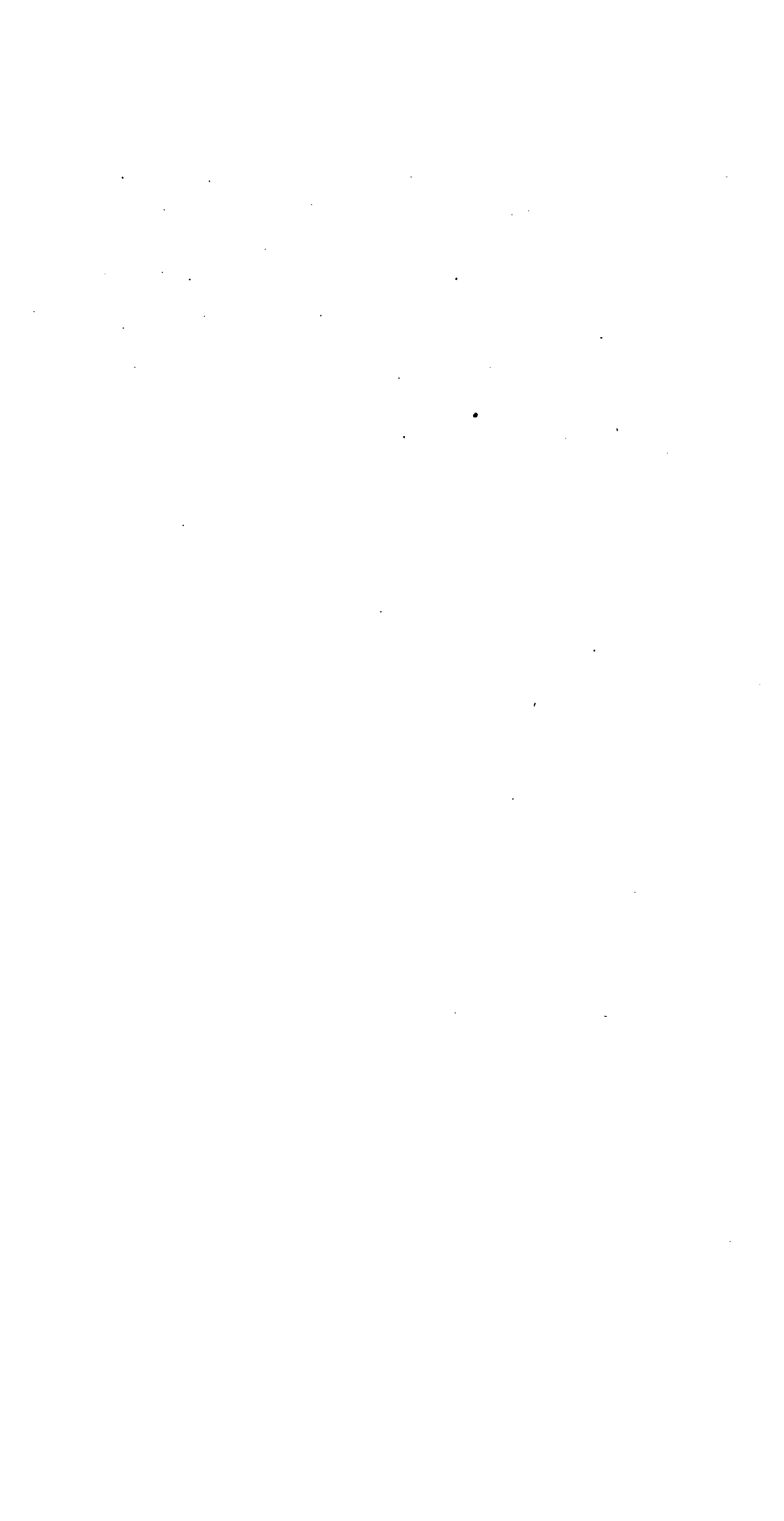
Müller, Fr. C. G., Technik des physikalischen Unterrichts, z. N. B. 41.

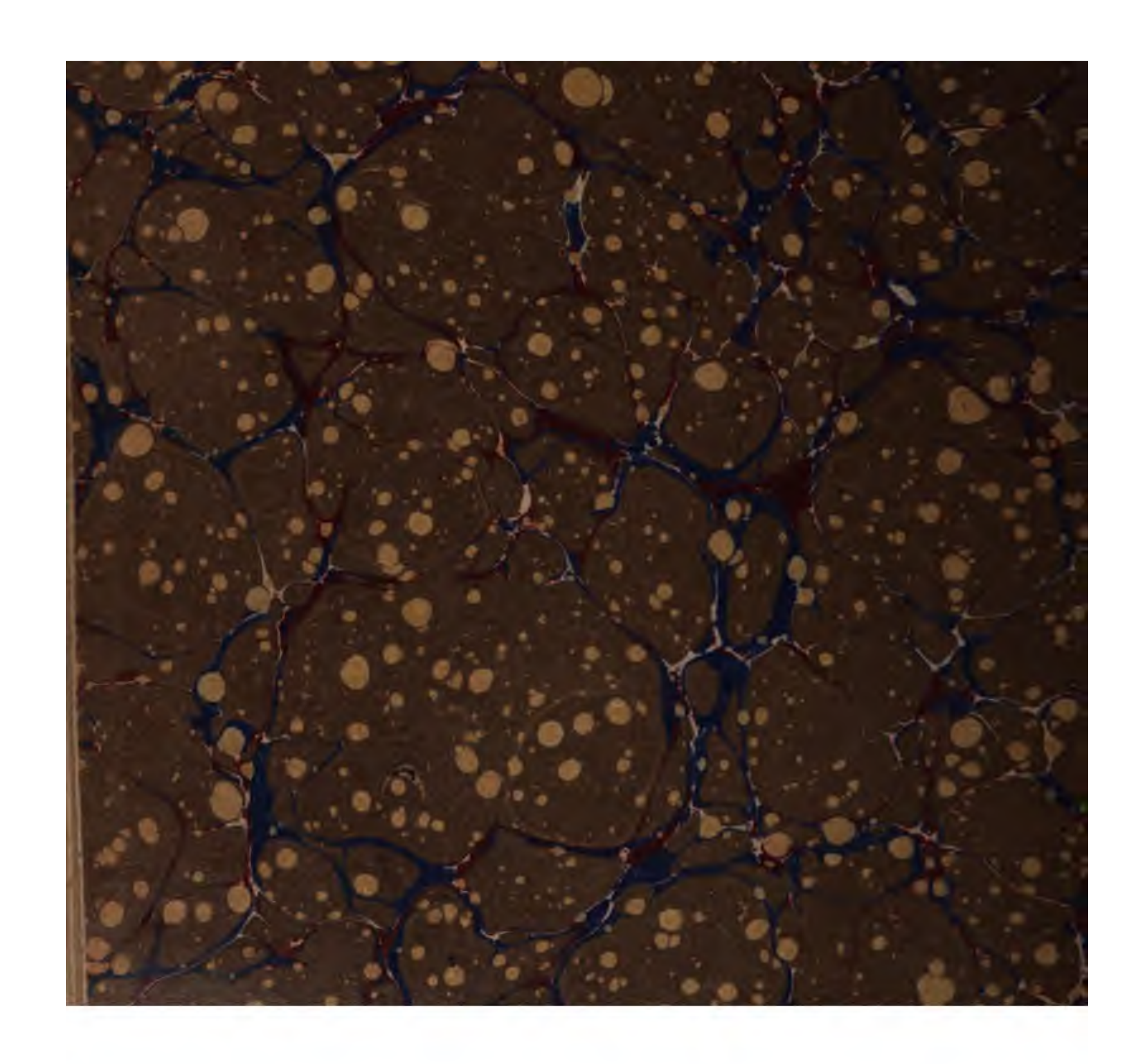
Müller, H., und Kutnewsky, M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Ausgabe f. bayerische Lehranstalten. Leipzig und Berlin, Teubner. M. 2.60.

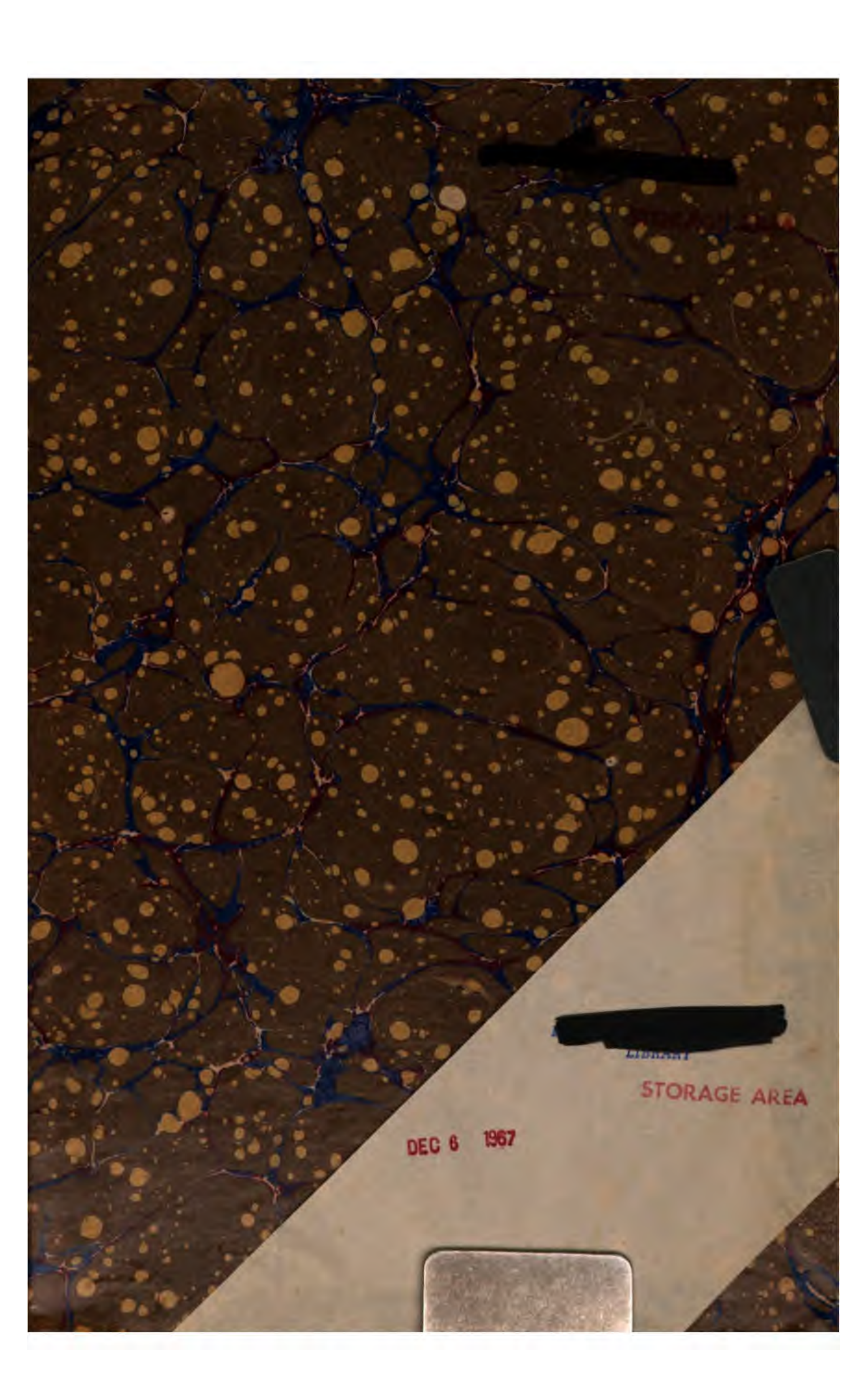
MÜLLER, HEINRICH, Lehrbuch der Mathematik. Ausgabe f. bayrische Lehranstalten. I, II. Leipzig, Teubner. I M. 1.60; II M. 2.
NEUMANN, FRANZ, Gesammelte Werke, II., s. N. B. 56.
ÖTTINGEN, ARTHUR VON, Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte, s. N. B. 12.
POINCARÉ, H., Wissenschaft und Hypothese, s. N. B. 57.
POINCARÉ, HENRI, Der Wert der Wissenschaft, s. N. B. 58.
ROHR, M. VON, Die optischen Systeme aus J. Petzvals Nachlaß. Sonderabdruck aus der Zeitschrift: „Photographische Korrespondenz" Juni 1906. Wien, Jasper.
SAUSSURE, RENÉ DE, Théorie géométrique du mouvement des corps, s. N. B. 20.
SCHELLHORN, O., Planimetrische Beweise, mit Anhang: Algebraische Regeln. Lehrbuch f. den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht, hauptsächlich aber f. die Vorbereitung der Schüler auf die Lehrstunden bis Untersekunda. Essen, Bädeker. geb. M. 1.60.
SIMON, MAX, Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig und Berlin, Teubner. geb. M. 3.20.
SIMON, MAX, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband I.) Leipzig, Teubner.
TANNERY, JULES, Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales. 2. volumes. Paris, Gauthier-Villars. Chaque volume Frs. 12.
TESAŘ, L., Elemente der Differential- und Integralrechnung. Hilfsbuch f. den mathematischen Unterricht zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Leipzig und Berlin, Teubner.
TEWS, J., Schulkämpfe der Gegenwart. Vorträge zum Kampf um die Volksschule in Preußen, gehalten in der Humboldt-Akademie in Berlin. („Aus Natur und Geisteswelt", 111. Bändchen.) Leipzig, Teubner. M. 1; geb. M. 1.25.
THOMAE, J., Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig, Teubner. geb. M. 3.60.
J. J. THOMSON, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen, s. N. B. 45.
WERKMEISTER, P., Graphische Tachymetertafeln, s. N. B. 53.
WILCZYNSKI, E. J., Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. (Teubners Sammlung Bd. XVIII.) Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 10.
WILTZ, HERMANN, Mathematische Unterrichtsbriefe. Unter Mitwirkung von bewährten Fachgelehrten bearb. u. hrsg. 1. Lehrbrief. Arithmetik: Additon und Subtraktion, Multiplikation und Division. Potenzlehre. Dezimalbrüche. Wurzelrechnung. 2. Lehrbrief. Arithmetik (Forts.): Das Logarithmieren, das Brigg'sche Logarithmensystem. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und Proportionen. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades.
ZIMMERMANN, H., Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, s. N. B. 24.
ZINDLER, KONRAD, Liniengeometrie mit Anwendungen. Zweiter Teil. (Sammlung Schubert LI.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. M. 8.
Zeitschrift f. Gletscherkunde, für Eiszeitforschung und Geschichte des Klimas. Annales de glaciologie. Annals of glaciology. Annali de glaciologia. Organ der internationalen Gletscherkommission, unter Mitwirkung von S. Finsterwalder (München), F. A. Forel (Morges), J. Geikie (Edinburgh), W. Kilian (Grenoble), F. Nansen (Kristiania), A. Penck (Berlin), F. Porro (La Plata, früher Genua), Charles Rabot (Paris), H. F. Reid (Baltimore), F. Wahnschaffe (Berlin), A. Woeikoff (St. Petersburg) hrsg. v. Eduard Brückner, Band 1, Heft 1, Mai 1906. Berlin, Bornträger. Preis f. den Band M. 16.










STORAGE AREA
DEC 6 1967

